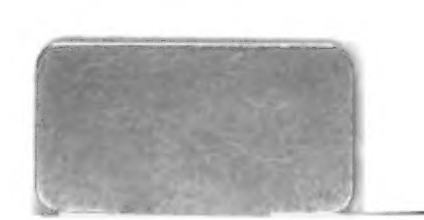
3 3433 06152048 6

Digitized by Google



Digitized by Google

*QCB
Akademi
Digitized by Google

* QCB
Akademiya

Digitized by Google

* QCB
Akademiya

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

S^T. PÉTERSBOURG.

[Ser. 5]

TOME IV.

AVEC

L'HISTOIRE DE L'ACADÉMIE

POUR L'ANNÉE 1811.

S^T. PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMÉRIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

1813.

Digitized by Google

Publié par ordre de l'Académie

N. Fuss

Secrétaire perpétuel.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Histoire de l'Académie Impériale des Sciences.

Année 1811.

Page

I. Changemens arrivés dans l'Académie :

1. Membres décédés 3
2. Nouvelles réceptions 5
3. Nouveaux Employés au service de l'Académie . 6
4. Gratifications, Décorations et avancemens civils . 7
5. Distinctions littéraires . . . . ibid.
6. Election d'un membre du Comité d'Administration . ibid.

II. Présens faits à l'Académie :

1. Pour la Bibliothèque 8
2. Pour le Cabinet d'histoire naturelle . . . 17
3. Pour l'Observatoire . . . . ibid.
4. Pour le Cabinet de Minéralogie . . 18

III. Mémoires et autres ouvrages manuscrits présentés à l'Académie 19

Digitized by Google

Page
IV. Observations, expériences, et notices intéressantes communiquées à l'Académie . . . 23
V. Rapports présentés par des Académiciens chargés de commissions particulières . . . 29
VI. Voyages scientifiques faits par ordre de l'Académie 38
VII. Prix proposés par l'Académie . . . 40
VIII. Ouvrages publiés par l'Académie . . . 44

Digitized by Google

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

I. Section des sciences mathématiques.

Page

L. Euleri. Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite resolvendi 3

Ejusdem. De lineis curvis non in eodem plano sitis, quae Maximi vel Minimi proprietate sunt praeditae . . 18

Ejusdem. Integratio generalis aequationum differentialium linearium cujuscunque gradus et quotcunque variabiles involventium . 43

Ejusdem. Observationes circa fractiones continuas . . 52

Ejusdem. De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest 75

Ejusdem. Dilucidationes in Capita postrema Calculi mei differentialis: de functionibus inexplicabilibus 88

Trembley. Recherches sur les Intégrales premières des équations aux différences partielles du second degré à quatre et à cinq variables 120

N. Fufs. Demonstratio theorematum quorundam calculum integralem spectantium 205

Ejusdem. Speculationes analytico-geometricae . . . 221

Ejusdem. Solutio problematis de inveniendis triangulis, quorum latera, rectae bisecantes, perpendicula, ideoque et areae rationaliter exprimantur 240

Kausler. Integratio formulae: $\partial y = \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{2x^2-1}}$. 253

Ejusdem. Démonstration élémentaire et générale des séries qui expriment les sinus et cosinus des angles multiples par les sinus et cosinus des angles simples 256

L'Huilier. Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'*Euler* sur les Polyhèdres, et exceptions dont ce théorème est susceptible 271

Bugge. Observations d'une Comète, faites à l'Observatoire Royal de Copenhague 302

		Page
Sniadecki.	Observations faites à l'Observatoire Impérial de Vilna	310
Schubert.	Position géographique de quelques lieux de l'Empire Russe	317
Ejusdem.	Observations méridiennes de la Comète de 1811, faites à l'Observatoire de St. Pétersbourg . . .	323

II. Section des sciences physiques.

J. H. Rudolph.	Dissertatio exhibens novissimas plantas Sibiriae orientalis (Tab. II. III.)	339
Severguine.	Examen ultérieur des cristaux de sélénite de Poltava	350
Sevastianoff.	Déscription d'une nouvelle espèce de quadrupède du genre Marte (Tab IV.)	356
Thunberg.	Campanulae Capenses descriptae et depictae (Tab. V. VI. VII.)	364
Ejusdem.	Coleoptera rostrata Capensia	376
Ledebour.	Ipomoea *Krusensternii*, nova species descripta (Tab. VIII.)	401
Smelovski.	Descriptiones plantarum rariorum horti Imperialis Academiae scientiarum Petropolitanae, iconibus illustratae (Tab. IX. X.)	403
Tilesii.	Iconum et descriptionum piscium Camtschaticorum continuatio tertia, tentamen monographiae generis Agoni *Blochiani* sistens (Tab. XI. — XVI.) . . .	406
Petroff.	Extraits des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg par feu Mr. *Inokhodzoff*, année 1805 . .	479

III. Section des sciences politiques.

Storch.	Des différentes méthodes de prélever les fraix de monnayage, et de leurs effets sur les prix des marchandises. Section première et seconde	493
Herrmann.	Déscription statistique des Pêcheries en Russie . .	524
Ejusdem.	Sur la répartition du nombre total des habitans de la Russie, 2de partie. Repartition selon les religions, selon les états et selon les droits particulières	552

Digitized by Google

Corrigenda:

Pag.	244	lin.	22	loco	b =	lege	b =
—	—	—	23	—	c =	—	c =
—	368	—	20	—	Tab. VI.	—	Tab. VII.
—	406	—	14	—	Drachinus	—	Trachinus.
—	411	—	7	—	Nova Spec.	—	adde Tab. XII.
—	456	—	21	—	Tab. V.	—	Tab. XV.

Digitized by Google

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

ANNÉE 1811.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année 1811.

I.

CHANGEMENS ARRIVÉS DANS L'ACADÉMIE.

1. Membres décédés.

a) *Académiciens ordinaires.*

S. E. Mr. *Pierre Simon Pallas*, Conseiller d'État actuel, Docteur en Médecine, Membre de l'Institut Impérial de Paris, de l'Académie des Curieux de la nature, de la Société Royale des Sciences de Londres et de Montpellier, des Académies Royales des Sciences de Stockholm, de Naples, de Göttingue, de Copenhague, de la Société de Médecine à Paris, des Sociétés physiques de Berlin, de Lund et d'Utrecht, de la Société économique de St. Pétersbourg, et de celle des Naturalistes de Moscou, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4^{me} degré et de Ste. Anne de la 2de classe; décéda à Berlin le 8 Septembre n. st. dans la 71^{me} année de son âge.

b) *Membres honoraires de l'Intérieur.*

S. E. Mr. le Comte de *Stroganoff*, Conseiller privé actuel de la 1re classe, Grand-Chambellan et Sénateur, Président de l'Académie IMPÉRIALE des beaux arts, Chevalier des ordres de St. André, de St. Alexandre Nevski, de Ste. Anne, de l'aigle blanc et de Stanislas. Reçu membre honoraire de l'Académie le 27 Décembre 1776, mort le 27 Septembre 1811.

Mr. *Guillaume Théophile Fréderic Beitler*, Conseiller de Cour, Professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Gymnase académique à Mitau. Reçu membre honoraire le 26 Octobre 1795, mort à Mitau le 12 Sept. 1811.

c) *Membres honoraires externes.*

Mr. *Jean Chrétien Daniel Schreber*, Professeur d'histoire naturelle à l'Université d'Erlang, Comte palatin, Président de la Société Impériale des Curieux de la nature. Le défunt fut reçu le 12 Avril 1792 et mourût à Erlang le 10 Décembre n. st. 1810.

Mr. *Nevil Maskelyne*, Astronome Royal et Directeur de l'observatoire de Greenwich, membre de la Société Royale de Londres, honoraire de l'Académie depuis 1776, décédé au mois Avril 1811, dans la 80me année de son âge.

Digitized by Google

d) *Correspondans externes.*

Mr. *Christoph Fréderic Nicolay*, Docteur en Philosophie, membre des Académies Royales des Sciences de Berlin et de Munic. Le Défunt fut reçu Correspondant le 21 Mai 1804, et mourût à Berlin le 10 Janvier n. st. 1811 dans la 78^{me} année de son âge.

2. Nouvelles réceptions.

a) *Au nombre des membres honoraires de l'Intérieur.*

Le 9 Janv. S. E. Mr. *Paul* de *Golenischtcheff-Koutouzoff*, Conseiller privé, Sénateur, Curateur de l'Université IMPÉRIALE de Moscou et Chevalier de l'ordre de Ste. Anne de la 1re classe.

Le 16 Janv. S. E. Mr. *Serge* d'*Ouvaroff*, Conseiller d'État actuel, Curateur des écoles de l'arrondissement de St. Pétersbourg.

b) *Au nombre des membres honoraires externes.*

Le 18 Sept. Mr. *Sigismond Fréderic Hermbstädt*, Conseiller privé de S. M. le Roi de Prusse, membre de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, Professeur de l'Université de cette ville.

c) *Au nombre des Correspondans de l'Intérieur.*

Le 22 Mai. Mr. *Jean Sniadecki*, Recteur de l'Uni-

Digitized by Google

versité IMPÉRIALE de Vilna, Directeur de son Observatoire, Chevalier de l'ordre de Ste. Anne de la 2[de] classe.

Le 22 Mai. Mr. *Jean Gadolin*, Professeur de Chimie à l'Université IMPÉRIALE d'Abo, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4[me] degré.

Le 4 Déc. Mr. *George Fréderic Parrot*, Conseiller de Collèges, Professeur de Physique à l'Université IMPÉRIALE de Dorpat, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4[me] degré.

d) *Au nombre des Correspondans externes.*

Le 10 Avril. Mr. *Charles César Leonhard*, Directeur général des domaines du Grand-Duc de Francfort et Secrétaire perpétuel de la Société de la Vétéravie pour la Physique générale, établie à Hanau.

Le 17 Avril. Mr. *Placide Heinrich*, Professeur de Physique et de Mathématiques et Chanoine de l'Abbaye princière de St. Eméran à Ratisbonne.

3. Nouveaux Employés au service de l'Académie.

Au nombre des Elèves.

Le 23 Janvier. L'étudiant *Paul Tarkhanoff*, pour l'Astronomie.

Le 24 Avril. L'étudiant *André Vladislavleff*, pour l'Économie politique et la Statistique.

Le 1 Mai. L'étudiant *Jean Moukhine*, pour la Chimie.

4. Gratifications, Décorations et avancemens civils.

Le 5 Juin. Les Elèves *Turkhanoff, Moukhine* et *Vladislavleff*, furent avancés au rang de la 9^{me} classe.

Le 6 Nov. Mr. l'Adjoint *Langsdorff*, fut décoré de l'ordre de Ste. Anne de la 2de classe.

5. Distinctions litéraires.

Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski* et *Sevastianoff* furent reçus au nombre des membres honoraires de la Société des Physiciens de la Vétéravie, établie à Hanau.

Mr. l'Académicien *Storch* fut reçu au nombre des membres de l'Académie Royale des Sciences de Munic le 10 Août 1808.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Nassé* reçut, de la part de l'Université Royale de Marbourg, le diplome de Docteur en Philosophie.

6. Election d'un membre du Comité d'Administration.

Le 14 Août. Mr. l'Académicien *Serastianoff*, pour deux ans, à la place de Mr. l'Académicien *Schubert*.

II.

PRÉSENS FAITS À L'ACADÉMIE.

1. *Pour la Bibliothèque.*

De la part de l'Académie des Sciences de Boston:

Memoirs of the American Academy of arts and sciences at Boston. Vol. III. p. 1. Cambridge 1809. 4°.

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm:

1°) Kongl. Vetenskaps Academiens Nya Handlingar; 1806 April-December; 1807, 1808, 1809, 1810, 1811 Jan. — Junius.

2°) Svensk Botanik, utgifven af Palmstruch, Olof Swartz, Quensel. Stokholm 1802 — 1811. 8vo. 1 — 6. Bandet.

De la part de l'Académie Impériale de Turin:

1°) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences, Litérature et beaux-arts de Turin, pour les années 1805 — 1808. Sciences physiques et mathématiques.

2°) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences, Litérature et beaux-arts de Turin, pour les années 1805 — 1808. Litérature et beaux-arts. Turin 1809. 4to.

3°) Annales de l'Observatoire de l'Académie de Turin, avec des notices statistiques, concernant l'Agriculture et la Médecine; par le Professeur Vasalli-Eandi, 1 et 2 Semestre 1810. Turin. 4to.

De la part de l'Académie IMPÉRIALE Russe:

1°) Путешествие младшаго Анахарсиса по Греціи. Томъ 5. и 6й. С. П. Б. 1808 и 1809. 8vo.

2°) Сочиненія и переводы издаваемые Россійскою Академіею. Часть 2, 3. 4. 5. С. П. Б. 1806, 1808, 1810, 1811, 8vo.

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Munich:

1) Denkschriften der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu München für das Jahr 1809. 1810. München. 4to.

2°) Zweiter Bericht über die Arbeiten der mathematisch-physischen Klasse der königlich - Bayrischen Academie der Wissenschaften. 1809. 4to.

3°) Dritter Jahresbericht der königl. Akademie der Wissenschaften, in einer Versammlung der Akademie erstattet von dem General-Sekretair derselben. 1810. 4to.

4°) Ueber den Reichthum der Griechen an plastischen Kunstwerken. Eine akademische Rede von Fr. Jacobs. München 1810. 4to.

5°) Ueber den Astrios - Edelstein des Cajus Plinius Secundus; eine Abhandlung von I. M. Güthe. München 1810. 4to.

6°) Akademisches Taschenbuch für das Jahr 1811. 8vo.

7°) Versuch einer meteorologischen Beschreibung des hohen Peifsenberges, als eine nöthige Beilage zu dessen Prospects-Karte, von Albin Schwaiger. München. 4to.

De la part de la Société libre économique:

Труды Вольнаго Экономическаго Общества, къ поощренію въ Россіи земледѣлія и домостроительства. Часть 62. С. П. Б. 1810. 8vo.

De la part de la Société économique d'Abo:

Kongl. Finska Hushållnings Sållskapets Handlingar. Tom 1. 2. Åbo 1803 et 1807. 8vo.

De la part de la Société des Amis Scrutateurs de la nature à Berlin:

Der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde. IV^{ten} Jahrgangs 3ter und 4ter Quartal. V^{ten} Jahrgangs 1ter Quartal. Berlin 1811. 4to.

De la part de l'Université IMPÉRIALE de Vilna:

Praelectiones in Universitate Litterarum Caesarea Vilnensi, a Calendis Septembris 1811 ad Cal. Julii 1812.

De la part de l' Université IMPÉRIALE de Kharkoff:

1°) Опытъ повѣствованія о древностяхъ Россійскихъ. Часть I. О обычаяхъ Россіянъ въ частной жизни. Харьковъ 1811. 8vo.

2°) Извѣстіе о Филотехническомъ Обществѣ. Продолженіе первое. Харьковъ 1811. 8vo.

De la part du Lycée IMPÉRIAL de Sarskoe-Selo:

Рѣчи произнесенныя при открытіи Императорскаго Сарско-Сельскаго Лицея и пр: С П. Б. 1811. 4to.

De la part du Conseil Impérial des Mines à Paris:

1°) Journal des Mines, ou Recueil de Mémoires sur l'exploitation des mines et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent etc. No. 169 — 176. 1811. Paris 8vo.

2°) De la richesse minérale; par Heron de Villefosse. Extrait par Patrin. Paris 1811. 8vo.

De la part de l'Auteur:

Illustrazione d'un zodiaco orientale del Cabinetto delle me-

Digitized by Google

daglie di S. M. à Parigi etc. Monumento che serve ad illustrare la storia dell' Astronomia ed altri punti interessanti di antichità, da Guiseppe Hager. Milano 1811. Imp. fol.

De la part de S. E. Mr. le Capitaine en Chef des Mines Hermann:

Die Wichtigkeit des Russischen Bergbaues, dargestellt von B. F. I. Herrmann. St. Petersburg 1810. 4to.

De la part de Mr. le Capitaine de la Flotte du 1er rang de Krusenstern:

Путешествіе вокругъ свѣта въ 1 03, 1804, 1805 и 1806 годахъ, по повелѣнію ЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА АЛЕКСАНДРА Перваго, на кораблях Надеждѣ и Невѣ, подъ начальствомъ флота Капитана 1 ранга Крузенштерна и пр. Часть 2. С. П. Б. 1810. 4to.

De la part de Mr. de Zimmermann à Brunsvic:

Karte des grofsen Ozeans, gewöhnlich das Süd-Meer genannt, nebst allen neuen Entdeckungen in Australien, auf das genaueste entworfen von D. F. Sotzmann etc. 1809.

De la part de S. E. Mr. le Conseiller d'État actuel d'Ouvaroff:

Ideen zu einer Asiatischen Akademie. St. Petersburg 1811. 8vo.

De la part de Mr. le Docteur Trinius:

1°) Flore des Environs de St. Pétersbourg et de Moscou, pour servir aux Amateurs de la Botanique et des Jardins, aux Médecins, Pharmaciens, Manufacturiers, Teinturiers, Economes etc. ornée de figures enluminées, par Joseph Liboschitz et Charles Trinius, Médecins. 2. et 3. Cahier. St. Pétersbourg 1810. med. 4to.

2°) Déscription des mousses qui croissent aux Environs de St. Pétersbourg et Moscou; par C. Trinius et J. Liboschitz, Médecins. 1. Livraison. St. Pétersbourg 1811. 16me.

De la part de S. E. Mr. le Conseiller d'Etat actuel et Chevalier Richter à Moscou:

Synopsis praxis medico-obstetriciae, quam per hos viginti annos Mosquae exercuit G. Michael Richter etc. Mosquae 1810. 4to.

De la part de Mr. Langlès à Paris:

1°) Dictionnaire Tartare - Mantchou-François, composé d'après un Dictionnaire Mantchou-Chinois par Mr. Amyot, Missionnaire à Pekin; rédigé et publié par L. Langlès. Paris 1789, 1790. 3 Tomes in 4to.

2°) Alphabet Mantchou, rédigé d'après le Syllabaire et le Dictionnaire universel de cette langue; par L. Langles, Membre de l'Institut etc. Paris 1807. 8vo.

De la part de Mr. le Professeur Schmid à Munich:

1°) Von den bisherigen Versuchen eine allgemeine Schriftsprache einzuführen. Eine Rede vom Professor Schmid. Dillingen 1807. 8vo.

2°) Grundsätze für eine allgemeine Sprachlehre, vom Professor Schmid. Dillingen 1807. 8vo.

3°) Cogitationumclator completus scientificus, Pasigraphiae inserviens; per Professorem Schmid. Dillingae 1807. 8vo.

4°) Wissenschaftliches Gedankenverzeichnifs, in einem vollständigen Auszuge. Dillingen 1807.

5°) Synopsis cogitationumclatoris scientifici. Dillingae 1807.

6°) Anhang zum Gedankenverzeichnifs mit Ergäntzungen und Beyspielen. 8vo.

Digitized by Google

De la part de Mr. le Professeur Thunberg à Upsala:

1°) Caroli Thunberg Flora Capensis, sistens plantas Promontorii bonae spei Africes, secundum systema sexuale emendatum, redactas ad classes, ordines, genera et species. Vol. 1. Upsaliae 1811. 8vo.

2°) De plantis Sueciae venenosis potioribus, nec non antidotis, dissertatio Nicolai Akermann. Upsaliae 1811. 4to.

De la part de Mr. le Professeur Giese à Kharkoff:

1°) О выгоднѣйшемъ способѣ добывать и очищать селитру, основанномъ на химическихъ началахъ Фердинанда Гизе и пр. Харьковъ 1811. 8vo.

2°) Lehrbuch der Pharmacie, zum Gebrauch öffentlicher Vorlesungen und zur Selbstbelehrung, entworfen von Ferd. Giese. III. Theil. Leipzig 1811. 8vo.

De la part de Mr. le Conseiller de Collèges Adelung:

Rapports entre la langue Sanscrit et la langue Russe. St. Pétersbourg 1811. 4to.

De la part de Mr. le Docteur de Lamberti à Dorpat:

Der Dampf-Destilli-Apparat, oder die Hauptfehler die man bei der Erbauung einer Dampfbrennerei vermeiden mufs. Eine Skizze von A. v. Lamberti. Dorpat 1811. 8vo.

De la part de Mr. le Professeur Gadolin à Abo:

1°) Dissertatio chemica de cupro albo Sinensi. Pars I. II. III. Aboae 1810. 4to.

2°) Index praelectionum Academiae Imperialis Aboënsis a die 1 Oct. 1811 ad idem tempus anni 1812.

3°) Magnos litterarum patronos etc. ad audiendam orationem inauguralem Professoris Gabrielis Polander invitat Rector I. Gadolin. Aboae 1811.

De la part de Mr. le Directeur Fischer à Moscou:

1°) Onomasticon du Système d'Oryctognosie, servant de base à l'arrangement des minéraux du Muséum de l'Université Impériale de Moscou; par le Prof. Fischer, Directeur du Musée. Moscou 1811. 4to.

2°) Muséum d'histoire naturelle de l'Université Impériale de Moscou. 1. Livraison. Moscou 1810. fol. maj.

3°) Observata quaedam de osse epactali, sive Goethiano, Palmigradorum. Mosquae 1811. fol. maj.

4°) Notice des monumens typographiques qui se trouvent dans la Bibliothèque de S. E. Mr. le Comte Alexis Razoumovski. Moscou 1810. 8vo.

5°) Notice des fossiles du Gouvernement de Moscou. Recherches sur les Encrinites, les Polycères et les Ombellulaires etc. par le Directeur Fischer. Moscou 1811. 4°.

De la part du marchand de Toula Mr. Krasnoglasoff à Kiachta:

Huit livres Chinois.

De la part de Mr. Jules de Klaproth:

1°) Leichenstein auf dem Grabe der Chinesischen Gelehrsamkeit der Herrn Joseph Hager, Doctors auf der hohen Schule zu Pavia. Gedruckt in diesem Jahr.

2°) Inschrift des Yu, übersetzt und erklärt von Julius v. Klaproth. Berlin 1811. 4°.

3°) Specimen characterum Sinicorum, jussu Alexandri primi ligno excisorum.

4°) Une feuille imprimée, contenant des remarques sur l'ouvrage de Mr. Remusat: Essai sur la langue et Littérature Chinoise.

Digitized by Google

De la part de Mr. l'Acad. Gourieff:

1°) Основанія Геометріи. Сочиненіе Семена Гурьева, Академіи Наукъ Академика. С. П. Б. 1811. 8vo.

2°) Основанія дифференціальнаго исчисленія съ приложеніемъ онаго къ Аналитикѣ. Сочиненіе Семена Гурьева. С. П. Б. 1811. 4to.

De la part de Mr. Kamenski, Translateur du Collège des affaires étrangères:

Vingt livres Chinois, sur l'histoire naturelle, la Botanique, la Médécine et la Chirurgie.

De la part de Mr. le Docteur John à Berlin:

Chemische Untersuchungen mineralischer, vegetabilischer und animalischer Substanzen, von Dr. John etc. 2r Theil. Berlin 1811. 8vo.

De la part de Mr. le Prof. Morgenstern à Dorpat:

1°) De Platonis republica Commentationes tres. Halae Sax. 1794. 8vo.

2°) Quid Plato spectaverit in dialogo, qui Meno inscribitur, componendo. 1794. 4to.

3°) De fide historica Velleii Paterculi. 1798. 8vo.

4°) Auszüge aus den Papieren und Tagebüchern eines Reisenden. Italien 1sten Bandes 1stes Stück. Neapel. Dorpat 1811. 8vo.

5°) Catalogues des leçons de l'Université pour les Semestres des années 1803 — 1810.

De la part des Auteurs et Editeurs:

Mineralogische Beyträge, vorzüglich in Hinsicht auf Würtemberg und den Schwarzwald; von S. Gotha 1807. 8vo.

Muthmaſsungen über den Ursprung des Finnischen Volks; von F. W. Radloff. Abo 1809. 8vo.

Slownik Jezika Polskiego; przez M. Sam. Bog. Linde. Tom II. Czesc II. 4^to^.

Recherches physico-chymiques; par Mrs. Gay-Lussac et Thenard. Tom. 1. 2. Paris 1811. 8^vo^.

Grundrifs der theoretischen Physik, zum Gebrauch für Vorlesungen; von Georg Fried. Parrot. 2r Theil. Dorpat 1811. 8^vo^.

Handbuch einer allgemeinen topographischen Mineralogie; von Carl Caes. Leonhard. 3r Band. Frankf. a. M. 1809. 4^to^.

Allgemeines Repertorium der Mineralogie, von C. C. Leonhard. Erstes Quinquennium 1806 — 1811. Frankfurt a. M. 1811. 8^vo^.

Ueber die Electrizität der Mineralkörper; von Hrn. Haüy etc. übersetzt von D. C. C. Leonhard. Frankf. a. M. 1811. 12^mo^.

Essai sur l'état civil et politique des peuples d'Italie, sous le gouvernement des Goths; par G. Sartorius. Paris 1811. 8^vo^.

Die Phosphorescenz der Körper, oder die im Dunkeln bemerkbaren Lichtphänomene der anorganischen Natur, durch eine Reihe eigener Beobachtungen und Versuche geprüft von Placidus Heinrich. Erste Abhandlung. Nürnberg 1811. 4^to^.

De la part de Mr. Prof. Butte à Landshut:

1°) Grundlinien der Arithmetik des menschlichen Lebens, nebst Winken für deren Anwendung auf Geographie, Staats- und Naturwissenschaft; von Dr. Wilhelm Butte. Landshut 1811. 8^vo^.

2°) Bemerkungen und Vorschläge, betreffend die öffentliche Aufzeichnung der Momente des menschlichen Lebens, mit besonderer Rücksicht auf die Napoleonischen Register des Civilstandes; von Dr. W. Butte 1810. 8^vo^.

3°) Generaltabelle der Staatswissenschaft und der Landeswissenschaft; ein Versuch von Butte.

De la part de diverses Imprimeries de l'Empire:

Quatre vingt-huit ouvrages imprimés.

Digitized by Google

2. *Pour le Cabinet d'Histoire naturelle:*

De la part de S. E. Mgr. le Ministre:

Un agneau empaillé monstrueux à six pieds.

De la part de Mr. le Directeur Müller à Irkoutzk:

L'herbier de feu Mr. l'Adjoint Rédovski.

De la part de Mr. le Gouverneur Perfilieff à Archangel:

Une peau de requin.

À la suite d'un ordre SUPRÈME:

1°) Une défense de Mamouth, de grosseur extraordinaire, trouvée au bord de la rivière Kama, dans le cercle de Yelaboug du Gouvernement de Wiatka.

2°) Une dent molaire de Mamouth, trouvée dans le cercle d'Orloff.

De la part de Mr. Gotowtsoff, Lieutenant-Colonel du premier Corps des Cadets:

La peau d'une variété du renard blanc.

De la part du Gouverneur civil de Viatka:

Un foetus monstrueux.

De la part de l'Empailleur Philipoff à Astrakhan:

Seize oiseaux empaillés.

3. *Pour l'Observatoire.*

De la part de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR:

Un Telescope de Herschel de 10 pieds.

De la part de Mr. le Professeur Bessel à Königsberg:

1°) Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahr 1807 erschienenen grofsen Kometen, von F. W. Bessel etc. Königsberg 1810. 4to.

2°) Sternbedeckungen durch den Mond für das Jahr 1811, berechnet von den Florenzer Astronomen Canovai, Del Ricco und Inghirami. Gotha 1810.

De la part de Mr. l'Académicien Bode à Berlin:

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1814, berechnet und herausgegeben von J. E. Bode. Berlin 1811. 8vo.

4. *Pour le Cabinet de Minéralogie.*

De la part de Mr. Etter:

Cinq pièces de minéraux des environs de Poudova et Krasnoye Sélo.

De la part de Mr. l'Adjoint Schlegelmilch:

Soixante cinq espèces de minéraux: basaltes, spaths, schistes, porphyres etc. ramassés pendant son dernier voyage au Caucase.

De la part de Mr. d'Engelhardt:

Cinq pièces de minéraux divers.

Envoyé par S. E. Mgr. le Ministre:

Un Aërolithe pesant au delà de 15 livres, tombé de l'Atmosphère le 28. Février 1811, à 11 heures du matin, dans le Jardin d'un païsan du village Koulechovka, dans le district de Romen du Gouvernement de Poltava.

De la part de la Société IMPÉRIALE libre économique:

Trois morceaux de minéraux, de la nouvelle Finlande, savoir:

1°) Du quartz rouge à cristaux de quartz.

2°) Du pyrite de fer ou sulphure de fer natif.

3°) Du talc schisteux ferrugineux.

De la part de Mr. Yazenkoff:

Quatre fragmens d'une pétrification, qui doivent faire partie d'un animal marin pétrifié, trouvé aux environs du Cap de Passaro en Sicile.

III.

MÉMOIRES ET AUTRES OUVRAGES MANUSCRITS, PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

Прибавленіе къ сочиненію о поступательномъ движеніи, а именно: о правилѣ наименьшаго дѣйствія; par Mr. l'Académicien Gourieff.

Химическое испытаніе 1°) желтой смолы получаемой отъ желтосмолистаго дерева, 2°) смолистаго состава, котораго дикіе народы новой Голландіи употребляютъ для прикрѣпленія къ рукояткамъ каменныхъ топоровъ своихъ; par Mr. Zagorski.

О сахарѣ изъ яблокъ и грушъ; par Mr. Sevastianoff.

О сахарѣ изъ винограда; par le même.

Examen ultérieur des cristaux de sélénite de Poltava; par Mr. Severguine.

Словарь химическій, обработанный въ отношеніи къ Технологіи, по Химическому Словарю Луи Кадета. Часть 2я; par Mr. Severguine.

О разположеніи воды въ весьма огромномъ снарядѣ, посредствомъ раскаленнаго желѣза; par Mr. Zakharoff.

Déscription d'une nouvelle espèce de quadrupède du genre Marte; par Mr. Sevastianoff.

Problemata ex Geometria sublimiori, soluta ab Academiae Scientiarum Alumno, Eduardo Collins.

О рыбномъ промыслѣ въ Астрахани въ 1793 и 1794 годахъ; par Mr. Sevastianoff.

Выписка учиненнымъ въ Астрахани наблюденіямъ о погодахъ и воздушныхъ приключеніяхъ въ 1810 году; par Mr. Lokhtine.

Задачи изъ вышшей Геометріи, рѣшенныя Императорской Академіи Наукъ воспитанникомъ Эдуардомъ Коллинсомъ.

De la nature des capitaux; par Mr. Storch.

Описаніе новаго рода Бразильской рыбы; par Mr. Sevastianoff.

О пользѣ плодовъ Ерника ягоднаго; par Mr. Ozeretskovski.

Methodus naturalis generum plantarum, ex structura, forma, situ et consistentia fructus desumtorum, in ordines XXIII. dispositorum; par Mr. Smélovski.

Auszug der Witterungs-Beobachtungen, welche angestellt sind in Kiew-Podol, im Jahr 1810, von Joh. Fried. Bunge.

Gedrängter Auszug aus den mathematischen, physikalisch-mathematischen, physikalischen und astronomischen Abhandlungen der Denkschriften der Russisch-Kayserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Auf Veranstaltung dieser Akademie, von einem ihrer Mitglieder verfertigt. Reine Mathematik. 1r Band. Analysis des Endlichen; par Mr. Kausler.

О фигурѣ, каковую имѣть долженъ корабельный канатъ, дабы во всѣхъ частяхъ своихъ имѣлъ надлежащую крѣпость въ разрывѣ; par Mr. Viscovatoff.

Выписка метеорологическихъ наблюденій, дѣланныхъ въ С. Петербургѣ при Императорской Академіи Наукъ въ 1815 году par Mr. Petroff.

Campanulae Capenses descriptae et depictae; par Mr. Thunberg.

Mammalia Capensia recensita et illustrata; par le même.

Théorèmes de Trigonométrie sphérique; par Mr. Jean Sniadecki.

Извѣстіе о древнихъ сѣверныхъ памятникахъ; par Mr. Krug.

Digitized by Google

Chemische Untersuchungen der St. Petersburgischen Grünerde; par Mr. Scherer.

Ueber die Aertzte im frühern Rufsland; par Mr. Krug.

Выписка изъ анатомической и физiологической части естественной исторiи черепокожныхъ свойственныхъ Сицилiи. Сочиненie Полiя (Testacea utriusque Siciliae); par Mr. Sevastianoff.

De piscibus novis sinicis et pelagicis, quos ad vivum pinxit et descripsit Tilesius.

Tableau de la Chronologie comparée des Auteurs Byzantins. En réponse à la question proposée par l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Premier mémoire de concours pour la question historique de 1811.

О негорѣнiи твердыхъ простыхъ горючихъ тѣлъ, и о невозможности произхожденiя изъ нихъ какъ кислотъ, такъ и металлическихъ оксидовъ или извести въ безвоздушномъ мѣстѣ; par. Mr. Petroff.

Observations faites à l'Observatoire Impérial de Vilna en 1811; par Mr. Sniadecki.

Déscription statistique des pècheries en Russie; par Mr. Herrmann.

Наставленie къ разпознаванiю разныхъ видовъ олова въ торговлѣ встрѣчающихся; par Mr. Zagorski.

Открытие новаго Пирофора Г-мъ Профессоромъ Вурцеромъ въ Марбургѣ; par le même.

Ueber die Wohnsitze der Jemen. Ein Beytrag zur Geschichte von Neu-Finnland. Erste Abtheilung; par Mr. Lehrberg.

Ueber die Bereitung des Phosphors aus Knochen; par Mr. Nassé.

Observations de Vesta, faites à l'Observatoire astronomique de Vilna en 1811; par Mr. Sniadecki.

Observations de Mars, faites à l'Observatoire astronomique de Vilna 1811; par le même.

Déscription et déssin d'un météore remarquable qui été observé le 9. Mars passé, depuis 5 heures du soir jusqu'au con-

cher du soleil, dans la ville de Bougousouslan, Gouvernement d'Orenbourg.

Beytrag zur nähern Kenntniſs der Kamtschadalischen Hunde, als Zugthiere betrachtet; par Mr. Langsdorff.

Beytrag zur Mineralogie des Caucasus. Ueber das Beschtaugebirge; par Mr. Schlegelmilch.

Ueber die Kristallisirbarkeit des salpetersauren Eisens; par Mr. Kirchhoff.

Essai d'une chronologie de l'histoire Byzantine, depuis la fondation de la ville de Constantinople jusqu'à sa conquète par les Turcs. Second mémoire de concours pour la question historique de 1811.

Записка о бывшей въ Астраханской Губерніи въ Мартѣ мѣсяцѣ 1811 года бурѣ; par Mr. Lokhtine.

Описаніе дѣланія латуни въ Ижевскомъ заводѣ, сочинено Маркшейдеромъ Мамышевымъ.

La continuation du Journal astronomique, fol. 505 — 530, jusqu'au 28 Juin; par Mr. Wisnievski.

Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'Euler, sur les Polyhèdres, et exceptions dont ce théorème est susceptible; par Mr. l'Huilier.

Разсужденіе о драгоцѣнныхъ камняхъ, называемыхъ у Плинія карбункулами; par Mr. Severguine.

Извѣстіе о грибѣ (Boletus Bovinus Linn. Löcherschwamm) отмѣнной величины, найденномъ близъ Гатчины и описанномъ Г. экстраординарнымъ Академикомъ Тилезіусомъ.

La continuation du Journal des observations astronomiques, depuis le 28 Juin jusqu'au 25 Août; par Mr. Wisnievski.

Обозрѣніе разнаго рода человѣческихъ уродовъ; par Mr. Zagorski.

Разсужденіе о родѣ рыбъ, подъ именемъ Полинема (Polynemus) извѣстномъ; par Mr. Sevastianoff.

Ichneumonidea, Insecta hymenoptera, illustrata a C. P. Thunberg.

Digitized by Google

Position géographique de quelques lieux de l'Empire de Russie; par Mr. Schubert.

Observations méridiennes de la Comète de 1811, faites à l'Observatoire de St. Pétersbourg; par le même.

Ueber die Umwandlung der Stärke in Zucker in theoretischer Hinsicht; par Mr. Scherer.

Ueber eine von mir entdeckte noch unbekannte Essigsäurebildung, die, sobald man Kohlensäure, atmosphärische Luft und etwas Wasser in Berührung bringt, statt findet; par Mr. Nassé.

Iconum et descriptionum piscium Kamtschaticorum continuatio. Tentamen Monographiae generis Agoni Blochiani; par Mr. Tilesius.

Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg par feu Mr. Inokhodzoff. Année 1805 d'après le vieux style; rédigé par Mr. Basile Petroff.

Sur la répartition du nombre total des habitans de la Russie. Seconde partie. Repartition selon les états et selon les droits particuliers; par Mr. Herrmann.

Outre cela l'Académie a reçu régulièrement, dans le courant de cette année, les observations météorologiques faites à Astrakhan, à Catherinebourg, à Nicolayeff et à Kieff.

IV.

OBSERVATIONS, EXPÉRIENCES, ET NOTICES INTÉRESSANTES, FAITES ET COMMUNIQUÉES À L'ACADÉMIE.

1. Mr. l'Académicien extraordinaire *Scherer* et Mr. l'Adjoint *Kirchhoff* présentèrent le résultat de leurs re-

cherches sur le Miaszite de Mr. le Professeur *Wuttig*, dans un mémoire ayant pour titre: *Chemische Analyse des stänglichten Bitter-Spaths oder sogenannten Miaszits.* Le résultat de cette analyse est: que ce fossile de Mr. *Wuttig* ne contient pas de la Strontiane, comme il prétend, mais que c'est du véritable Bitterspath, ou chaux carbonatée magnésienne spathique, dont les parties constituantes, sur cent parties, sont:

Acide carbonique		47,0,
Chaux	-	30,5,
Talc	-	19,0,
Oxyde de fer		0,5,
Asbeste	-	0,5,
Perte	-	2,5,
	total	100,0.

2. Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievski* remit la position géographique de quelques points de l'Empire, calculée d'après ses observations, savoir les longitudes et latitudes de Pskoff, Sebesch, Polotsk, Dunabourg, Schawli, Keidani, Wileika, Mohileff sur le Dnepr et Radomysl.

3. Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievski* rapporta à la Conférence d'avoir observé le $\frac{14}{26}$ Mars passé la déclinaison de l'aiguille aimantée, et de l'avoir trouvée

Digitized by Google

de 7°, 36′,6 à l'Ouest. Elle va donc toujours en diminuant depuis 1797, où l'Abbé *Henry* la trouva de 9°, 12′. En 1806 au mois de Juillet Mr. *Wisnievski* l'avait trouvé encore de 7°, 52′.

4. Mr. de *Lindenau*, Directeur de l'Observatoire de Seeberg, près de Gotha, mande que Mr. d'*Antigues*, Possesseur d'une verrerie à Vonêche, Département de Sambre et Meuse, a réussi à faire du Flintglas, dont l'Opticien Cauchoix a fait usage, avec le plus heureux succès, pour faire des achromates qui surpassent ceux de Dollond.

5. Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* et Mr. l'Adjoint *Kirchhoff*, présentèrent l'analyse d'un fossile de Mursinsk, envoyé de Cathérinbourg par S. E. Mr. de *Hermann*. Cette analyse a montré que ce fossile, que Mr. l'Académicien *Severguine* avoit supposé être du Schörl-Titan, ne contient point de Titan, ses parties constituantes étant :

Terre silicieuse	—	45,50,
— argilleuse	—	41,50,
Oxide de fer et Mangan.		9,25,
Perte —	—	3,75,
		100,00.

6. Mr. le Docteur d'*Engelhardt* fit part à l'Académie, dans une lettre datée de Sympheropol le 22 Mai, des principaux résultats de ses recherches préliminaires sur la chaine des montagnes de la Crimée, laquelle s'étend depuis Baluklawa jusqu'à Uskiut, et en largeur depuis la mer jusqu'à Baktschisaraï. Mr. d'*Engelhardt* trouve que cette chaine mérite non seulement l'attention du Minéralogiste, mais même celle du Gouvernement, parcequ'elle contient de l'alun et vraisemblablement aussi du charbon de terre.

7. S. E. Mgr. le Ministre transmit à la Conférence un aërolithe pesant au - de - là de 15 livres, tombé de l'atmosphère le 28 Février passé, à 11 heures du matin, dans le jardin d'un païsan du village Koulechovka, dans le district de Romen du Gouvernement de Poltawa. D'après un rapport du Gouverneur civil au Ministre de Police, la chûte a été précédée de trois coups de tonnerre, et accompagnée d'un bruit étrange, d'étincelles et d'une espèce de siflement. La pierre s'est enfoncée dans la terre gelée, à travers la neige et la glace, à la profondeur d'un archine et elle avoit encore conservé un degré très sensible de chaleur au moment du déterrement.

8. Le Secrétaire lut une lettre de Mr. l'Académicien *Bode*, datée de Berlin le 9 Août, contenant une notice astronomique très - intéressante, savoir celle de la réapparition

Digitized by Google

de la comète, découverte le 25 Mars passé par Mr. *Flaugergues* à Viviers, après avoir été observée pendant quelque tems, et plongée ensuite, durant près de deux mois, dans les rayons du soleil. Les premiers élémens de cette comète, calculés au préalable par Mr. *Burkhardt*, sont: Noeud ascendant 139°, 10′; inclinaison 71°, 50′; tems du périhélie 1811 Sept. 15, 10^h.; longit. périh. 78°, $12\frac{1}{2}'$; log. dist. périh. 0,05450; mouvement rétrograde.

9. Mr. l'Adjoint *Kirchhoff* présenta à la Conférence trois flacons, contenans: 1°) du Sirop produit par l'art dans quelques végétaux (la pomme de terre, le froment et le blé noir ou Sarazin), 2°) du sucre obtenu de ce syrop par dessiccation; 3°) du sucre dégagé du syrop au moyen de l'eau. Dans le rapport, accompagné de ces échantillons, Mr. *Kirchhoff* assure que cent livres des végétaux ci-dessus mentionnés donnent, par un procédé facile et peu coûteux, 50 livres de syrop, qui a la même douceur que le syrop des raisins et autant que 20 livres de sucre de la canne, et qui peut être préparé dans chaque ménage, parceque le procédé en est simple et sans art.

10. Mr. *Huth*, Professeur d'Astronomie à Dorpat, communiqua les premières observations de la comète faites à l'Observatoire de l'Université, avec le dessin et la

déscription de sa photosphère ou chevelure, ayant la forme d'une coupe conoïde, ouverte vers le Nord-Est, et dont le côté oriental avoit alors 2 degrés et le côté occidental $1\frac{1}{2}$ degrés d'étendue. La partie arrondie, tournée vers le soleil, bien terminée et très-claire, avoit une épaisseur de cinq diamètres du noyau, dont le disque étoit circulaire semblable à celui d'une planète et de la grandeur de celle de Mars dans sa distance moyenne.

11. Mr. l'Académicien *Schubert* remit une notice contenant ses observations méridiennes de la comète faites au Quart-de-cercle et à l'instrument de passage le 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15 Septembre, avec quelques conclusions tirées de ses observations, sur la marche de la comète, sa vitesse, son diamètre apparent, la longueur de sa queue, son noyau etc.

12. Le même Académicien présenta et lut une seconde notice sur la comète, contenant ses observations au méridien depuis le 16 jusqu'au 30 Sept., avec quelques remarques sur la nature de ce corps céleste, et les premiers élémens de son orbite, calculés par Mr. *Schubert* d'après ses propres observations.

13. Le même envoya la continuation de ses observations de la comète, savoir les ascensions droites et les déclinaisons du 4, 6, 14 et 15 Octobre. Mr. *Schubert*

Digitized by Google

témoigna ses regrets de ce que le tems défavorable ne lui a pas permis de faire un plus grand nombre d'observations méridiennes, surtout dans un tems où, pour le midi de l'Europe, la comète se trouve déjà au dessous de l'horison et parceque à l'avenir il sera impossible, même à St. Pétersbourg, d'observer la comète dans le méridien. Mr. *Schubert* communiqua encore quelques notices intéressantes sur la longueur de l'arc décrit à différentes époques, sur la distance de la comète au soleil et à la terre, sur sa route au ciel, la longueur de sa queue et son tems périodique, qui ne sauroit être moindre que de plusieurs milliers d'années, vu l'accord des observations avec les élémens paraboliques et la grande distance de la comète au soleil lors du périhélie.

V.

RAPPORTS PRÉSENTÉS PAR DES ACADÉMICIENS CHARGÉS DE COMMISSIONS PARTICULIÈRES.

1. Mr. le Docteur *Liboschitz* ayant présenté à l'Académie un mémoire: *Introductio in physiologiam fungorum,* Mrs. les Académiciens extraordinaires *Smélovski* et *Tilesius* et Mr. l'Adjoint *Langsdorff*, chargés d'examiner ce mé-

moire, en firent chacun son rapport. La substance de ces rapports est: 1°) que la question sur la manière de croître et de se nourrir, qui est propre aux champignons, n'est pas résolue d'une manière plus satisfaisante par Mr. *Liboschitz* que par ses antécesseurs; 2°) que l'opinion de *Gärtner*, analogue à celle d'*O. F. Müller* et de *Schäfer*: que les champignons se propagent par des boutons, n'a pas gagné par les changemens que Mr. *Liboschitz* y a faits pour l'assimiler à la sienne; 3°) qu'il a traité le point principal de la question, savoir les vésicules qu'il prétend se trouver aux lamelles des champignons, comme une vérité déjà démontrée, quoiqu'il ne les ait ni vues, ni décrites, ni dessinées. Au reste les rapporteurs rendent justice au savoir de l'auteur, dont ce mémoire leur a paru donner des preuves incontestables, quoiqu'il n'ait pas été plus heureux que d'autres à établir une nouvelle théorie de la physiologie des plantes cryptogames.

2. Mr. l'Académicien *Storch* présenta un rapport, contenant les changemens qu'il avoit été chargé de faire au schème du Calendrier d'adresse, conformément aux organisations nouvelles dans les Ministères et leurs attributions.

3. Mr. le Professeur *Schmid* à Dillingen ayant envoyé à l'Académie une brochure intitulée: *Anhang zum*

Digitized by Google

Gedankenverzeichnifs, mit Ergänzungen und Beispielen, als ein Mittel sich selbst ohne alle weitere Hülfe im Pasigraphiren zu üben, Mr. l'Académicien *Fufs*, chargé de l'examiner en fit un rapport contenant en substance: 1°) qu'il n'est pas facile de se faire une idée précise des principes, sur lesquels se fonde la Pasigraphie de Mr. *Schmid*, sans avoir lû l'ouvrage même, auquel la brochure mentionnée doit servir de supplément; 2°) qu'à en juger d'après ce qu'on y peut entrevoir, l'auteur, après avoir classé les verbes, établit des signes de classe et des figures de changement qui représentent tous les verbes à l'infinitif, que d'autres signes marquent ensuite le mode, le tems, la personne; que de même il y a des signes de classe pour les substantifs qui, en y ajoutant d'autres signes, deviennent adjectifs, adverbes, interjections etc.; 3°) que cependant dans tout ceci il y a tant arbitraire, de purement conventionnel, et même d'indéterminé, qu'on ne conçoit pas trop bien comment ce symbolisme puisse mener à une écriture générale.

4. Mr. *Kovalski*, Inventeur d'une machine hydraulique, dont le modèle avoit été examiné par l'Académie il y a deux ans, croyant avoir trouvé moyen de rendre son mécanisme plus parfait, en profitant des observations des examinateurs de son premier modèle, en fit voir un nouveau, sur lequel

Mrs. les Académiciens *Fuſs, Gourieff, Viscovatoff* et *Petroff* firent un rapport. La substance en est: 1°) la partie *visible* du nouveau mécanisme est effectivement plus simple que celui du premier modèle; 2°) la partie principale qui contient le corps de la pompe, ou le tuyau dans lequel l'eau monte, avec tout son mécanisme, est caché à dessein, l'auteur désirant le tenir en secrèt; 3°) les expériences faites avec le premier modèle avoient donné pour résultat que la machine élève jusqu'à dix pieds cubiques d'eau par heure, le nouveau modèle au contraire en élève et verse jusqu'à vingt pieds cubiques dans le même tems, mais avec plus d'efforts, car les examinateurs, en tournant la manivelle, ont cru sentir bien plus de résistance que dans le premier modèle; 4°) au premier modèle il y avoit neuf ressorts, ce qui rendoit l'exécution en grand difficile et la durée de l'activité de la machine incertaine; dans le nouveau modèle il y a, au dire de Mr. *Kovalski*, un seul ressort, ce qui n'a pu être vérifié, les rapporteurs n'ayant pu voir toutes les parties du mécanisme; 5°) la machine ayant été dérangée à la quatrième expérience, on n'a pu les continuer, cependant les trois essais institués ont prouvé constamment que le modèle verse un tiers pied cubique d'eau par minute. Il paroît donc que Mr. *Kovalski* a réussi à produire un effet double de celui du premier

Digitized by Google

modèle, par un mécanisme plus simple selon l'apparence, et qu'il a documenté de nouveau par là, son talent mécanique. Il en résulte encore qu'ayant su éviter les ressorts, il évitera un des inconvéniens dans l'exécution de son modèle en grand, mais que rien, dans ce modèle, n'affoiblit la principale objection faite au premier: savoir qu'exécutée en grand la machine aura à vaincre des résistances qui augmenteront dans une proportion très nuisible à son effet, lequel sera toujours au dessous de ce que le modèle ingénieux semble devoir promettre.

5. Mr. l'Académicien *Fuſs*, chargé d'examiner une quadrature du cercle, envoyée à l'Académie par un nommé *Losy* de *Losenau*, Ingénieur du Tribunal de Tarnow en Galicie, en fit son rapport, contenant en substance ce qui suit: Le rapport 1 : 3,0454748, trouvé par l'auteur entre le diamètre du cercle et sa circonférence, est ouvertement faux, parceque le périmètre de l'Octogone régulier inscrit au cercle est déjà plus grand que cette circonférence 3,0454748. La source de l'erreur est dans la supposition que le triangle plan curviligne de la figure annexée couvre exactement le triangle sphérique formé par trois quarts de grand cercle de la sphère, et qu'il a par conséquent sa surface égale à $\frac{1}{8}^{me}$ de la surface de la sphère.

6. Mrs. les Académiciens extraordinaires *Krug* et *Lehrberg*, chargés d'examiner le premier mémoire de concours pour la question historique, avec la dévise: *Eheu! fugaces Postume Postume, labuntur anni*, en firent leur rapport contenant en substance: que l'auteur de ce mémoire, quoiqu'il connoisse à fond les principaux matériaux pour l'histoire de l'Empire d'Orient, quoiqu'il soit très-versé dans les langues orientales, et juste appréciateur de l'importance des recherches chronologiques, n'a ni complettement comparé, ni corrigé, ni vérifié la chronologie des auteurs Byzantins.

7. Mr. l'Académicien extraordinaire *Pétroff* présenta et lut son rapport concernant les paratonnères d'Okhta, qu'il avait été chargé d'examiner, à la suite d'une communication de l'Expédition d'Artillerie du Collége IMPÉRIAL de Guerre. La substance en est qu'il a trouvé tous ces paratonnères en très-bon état, mais que les puits de trois d'entr'eux, où vont aboutir les extrémités inférieures des barres, ayant trop peu d'eau et étant trop étroits, il a proposé au Directeur des fabriques de poudre les mesures qui lui ont paru nécessaires à cet égard, et il pria la Conférence de communiquer ses observations à l'Expédition.

8. Mrs. les Académiciens extraordinaires *Krug* et *Lehrberg* ayant été chargés d'examiner le second mémoire

Digitized by Google

de concours pour la question historique, avec la dévise: *Et tentasse juvat*, ils en firent leur rapport, dont la substance est: 1°) qu'il s'en faut de beaucoup que l'auteur ait complettement comparé tous les auteurs Byzantins; 2°) que ne les ayant lus qu'à la legère, il leur fait souvent dire des choses qu'ils n'ont pas dites; 3°) qu'il a négligé beaucoup de données qu'on trouve chez eux, tels que les éclipses du soleil et de la lune, les fètes mobiles et les jours de la semaine comme jours du mois; 4°) que lors même qu'il place les faits historiques dans les années qui leur conviennent, on ne voit pas si c'est au hazard ou au résultat de ses recherches qu'il en est redevable; 5°) que l'auteur de cet essai, n'ayant fait que peu d'usage des historiens occidentaux, et nul usage de ceux de l'orient, et n'ayant comparé entr'eux que les seuls Byzantins, les travaux de *Pagi*, *Ritter* et *Bayer* lui sont restés inaccessibles, ce qui a rendu sa comparaison peu fructueuse et a été la cause qu'il présente beaucoup de données comme des vérités incontestables, contre lesquelles, avec un peu de critique et de scepticisme salutaire il auroit trouvé beaucoup de doutes légitimes; 6°) que l'auteur au reste fait preuve d'une vaste lecture et d'une application louable, mais sans que les sciences en eussent retiré aucun fruit, et sans que son mémoire satisfasse

Digitized by Google

aux principales conditions du problême proposé par l'Académie.

9. Mr. l'Académicien *Severguine* ayant été chargé d'examiner un mémoire présenté à l'Académie par un Officier des mines, Mr. de *Fuhrmann*, et contenant ses observations minéralogiques, faites dans l'ancienne et la nouvelle Finlande, où il avoit été envoyé pour prendre des informations sur les fouilles de ce païs, il en fit son rapport. Mr. *Severguine* trouva ses observations justes, ses déscriptions exactes, ses réflexions bien fondées. Le mémoire selon lui, est un accroissement utile pour la géographie minéralogique de l'Empire, et mérite d'être imprimé dans le Journal que l'Académie publie.

10. Mr. l'Académicien *Schubert* présenta et lut un un rapport contenant ce qui suit: „J'ai l'honneur de rapporter à la Conférence: que SA MAJESTÉ L'EMPEREUR „a daigné faire présent à l'Académie d'un télescope de „*Herschel* qui se trouvoit à l'Hermitage. SA MAJESTÉ „ayant bien voulu me laisser le choix entre deux télescopes dont l'un est de sept pieds, l'autre de dix, j'avois „eu l'intention de choisir le premier, qui m'avoit toujours „paru meilleur que l'autre. Mais m'étant rendu à l'Hermitage, pour les examiner, et ayant trouvé que le grand „miroir de celui de 7 pieds a une tâche considérable,

Digitized by Google

„ j'ai préféré celui de 10 pieds, et je l'ai fait transporter „ à l'Observatoire, où il se trouve depuis le 31 Octobre. „ Je suis actuellement occupé à le monter et à réparer „ plusieurs dérangemens qu'il a soufferts." Comme, de l'aveu de Mr. *Schubert*, c'est principalement à Mgr. le Ministre, que l'Observatoire est redevable de ce don IMPÉRIAL, la Conférence résolut d'en exprimer à Son Excellence la reconnoissance de l'Académie.

11. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*, chargé d'examiner une Technologie du Précepteur du Gymnase de Kharhoff, Constantin Pavlôvitch, en fit son rapport contenant en substance: que cet ouvrage est rempli de fautes d'orthographe et de grammaire, et que les déscriptions des arts et métiers n'y sont ni claires ni exactes, ce que Mr. *Ozeretskovski* prouve par la citation d'un grand nombre de passages.

12. Mr. l'Académicien *Zakharoff*, en sa qualité de membre d'un Comité, nommé par Mgr. le Ministre, pour examiner la méthode découverte par Mr. l'Adjoint *Kirchhoff* pour faire du sucre de la farine du froment, et des pommes de terre, communiqua à la Conférence la copie du protocole du Comité, et celle du rapport fait à Son Excellence sur les résultats de cet examen. La substance en est: 1°) que la douceur de ce sucre est à celle du

sucre de canne comme 4 à 9; 2°) que la dépense de la fabrication excède de fort peu le prix de la farine qu'on y employe; 3°) que la fabrication en est si simple que non seulement on peut l'exécuter partout en grand, mais que chaque ménage peut même en faire pour son propre usage; 4°) que le même procédé peut être employé avec avantage pour les productions qui demandent la fermentation vineuse ou acide; 5°) que ce sucre ne contient absolument rien de nuisible à la santé.

VI.

VOYAGES SCIENTIFIQUES FAITS PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE.

1. Mr. l'Adjoint *Schlegelmilch*, envoyé par l'Académie dans le Caucase, pour des observations minéralogiques, manda, dans un rapport daté de Georgiefsk du 14 Décembre 1810, d'être arrivé à Poti vers la fin d'Août, d'avoir visité après la Mingrélie, le Letchgoum et une partie de la Svanie, d'où il est allé en Imérétie par la Province de Radjine. Les troubles dans ces provinces et la marche de nos troupes vers Akalzik l'ont forcé de quitter le Kutaïs, et de se porter par la Kartilinie supérieure vers la partie septentrionale du Caucase, d'où, après avoir examiné les

Digitized by Google

monts Beshtau, il retournera à St. Pétersbourg, si les conjonctures ne lui permettront pas de pousser jusqu'à l'Elbrus.

2. Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievski*, continua aussi cette année son voyage astronomique et envoya la continuation de son Journal fol. 505—530, contenant les observations faites à Ekaterinebourg, Sisert, Kaschlinsk, Tcheliabinsk, Satkinskaya, Simskaya, Sarmanieva, Novgorod, Waldaï, Twer, Klin, Moskwa, Wladimir, Mourom, Arsamas, Nishegorod, Kazan, Bougulma, Novosergeevskaya-Krepost, Bousoulouk, Oufa, Ouralskaya, Orenbourg, Iletskaya Sachtchita, Iletskoi-gorodok, Ouralsk, Sakharnaya, Kalmykova, Koulagina, Bakrayeva, Gourieff, et Astrakhan, d'où il continuera ses courses le long de la ligne par Kislar, Naur, Mosdok, Yegorievsk, Konstantinogorsk, Stavropol, Grigoriopol, Ust-Labinskaya, Ekaterinodar et Novoï-Tcherkask.

3. S. E. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski* envoya par écrit une représentation contenant en substance: que l'Empailleur *Pierre Philipoff*, attaché au Musée trouve peu d'occupation içi, mais qu'étant bon tireur et ayant exercé ces deux talens pendant le voyage qu'il a fait en Amérique avec feu Mr. de *Rézanoff*, l'Académie pourroit tirer meilleur parti de lui, si elle l'envoyoit, pour recruter le Mu-

sée, dans quelque province méridionale de l'Empire, par exemple à Astrakhan. — La Conférence approuva ce moyen d'utiliser pour le Musée le service de l'Empailleur *Philipoff*, presque nul jusqu'ici, et chargea Mr. l'Académicien *Sevastianoff* de dresser une instruction détaillée, pour diriger l'Empailleur dans la chasse et l'empaillage des objets de Zoologie, dont le Musée a principalement besoin.

VII.

PRIX PROPOSÉS

PAR

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Programme de 1811.

L'Académie Impériale des Sciences avoit choisi en 1809 pour sujet de son prix de l'an 1811: *la Chronologie complettement comparée, et autant que possible corrigée et vérifiée, des auteurs Byzantins, depuis la fondation de la ville de Constantinople jusqu'à sa conquête par les Turcs.* En publiant cette question historique par un programme l'Académie témoigna le desir que les Savans qui seraient disposés à concourir eussent égard dans leur travail à ce qui a déjà été fait en faveur de ces recherches par Pagi, Ritter et en partie aussi par Bayer.

A' la suite de cette publication l'Académie a reçu, dans le terme préscrit par le programme, deux mémoires, chacun avec son billet cacheté et sa dévise, savoir:

N°. 1. en langue française, avec la dévise: „Eheu! fugaces Postume Postume, labuntur anni.“

Digitized by Google

N°. 2. pareillement en français, avec la dévise: „Et tentasse juvat.“ Les rapports très circonstanciés des Commissaires, nommés par l'Académie pour examiner ces mémoires, contiennent en substance ce qui suit:

Le mémoire N°. 1. se distingue par des notices géographiques estimables, de même que par l'usage fréquent que l'auteur a fait des historiens orientaux. En consultant ceux-ci, outre les Byzantins, il a fait plus que l'Académie n'avait demandé, ce qui augmenterait le mérite de l'ouvrage, si, à d'autres égards, il était doué du degré requis de perfection; mais on voit déjà par la manière de l'auteur de reduire les années grecques en années après la naissance de Jésus Christ, qu'il est peu habitué aux travaux chronologiques. En suivant la règle de reduction qu'il donne, la plûpart des évènemens se trouverait datée trop tard de 12 mois complets. L'auteur croit, à la vérité, que l'erreur d'une année ne soit pas de conséquence; mais dans des recherches critiques ce serait une triste consolation, si l'on considère qu'il y a des cas, où il s'agit de la plus grande précision, et que c'est pour des différences beaucoup plus petites que le célèbre Schlözer a déclaré suspectes les dates du plus ancien Annaliste Russe.

Outre cela les Commissaires ont trouvé que les défauts suivans sont communs à tous les deux mémoires:

a) Ni dans l'un ni dans l'autre les faits rapportés par les auteurs Byzantins sont comparés complettement. N°. 1. ne cite communément, pour chaque fait isolé, que telle ou telle autre source, sans qu'on puisse voir la raison de la préférence que l'auteur lui donne. N°. 2. se contente, à quelques courtes remarques près, d'indiquer en marge les auteurs Byzantins par ordre chronologique. Tous les deux auteurs ont évité les citations spécielles, qui auraient été ici à leur place, parceque des ouvrages de cette nature, devant servir d'apparat pour la critique de l'histoire, celui qui en fait usage doit être mis en état d'examiner sur le champ les assertions de l'auteur.

b) Tous les deux auteurs racontent d'année en année une multitude d'évènemens stériles pour la chronologie, et par conséquent superflus ici; par contre ils ne disent rien des éres historiques des Byzantins et négligent les dates qui conduisent à une chronologie plus exacte et qu'on

rencontre si fréquemment dans les Byzantins, surtout les plus anciens. Ni l'un ni l'autre mémoire tient compte, ni des éclipses du soleil et de la lune, ni des jours du mois comme jours de la semaine ou comme fêtes des Saints etc.

c) De là il suit que ni l'un ni l'autre de ces deux mémoires n'a réussi à donner une vérification mathématique des déterminations chronologiques.

d) On peut reprocher un défaut de précision à tous les deux auteurs dans les passages qu'ils citent des auteurs Byzantins. N°. 1. fait souvent dire à Théophane, vanté à juste titre, toute autre chose qu'il n'a dite en effet. N°. 2. se tient souvent avec trop de confiance aux traductions latines si peu fidèles.

e) Tous les deux auteurs n'ont fait aucun usage des ouvrages de Pagi et Ritter, qui ont été recommandés dans le programme, non comme des autorités, ni pour leurs résultats, mais à cause de l'utilité que présentent toujours des Commentaires détaillés, en ce qu'ils servent à distinguer ce qui est avéré de ce qui est encore contesté, en ce qu'ils excitent l'attention et la dirigent vers les points qui demandent un examen plus soigneux.

D'après ce qui vient d'être rapporté les deux mémoires de concours ont besoin de grands changemens et de corrections essentielles, et ne peuvent être regardés tout au plus que comme les premières esquisses d'un ouvrage tel que l'Académie le desire. Quelque disposée qu'elle soit de rendre justice au savoir et aux efforts estimables des deux auteurs, et à leur passer avec indulgence quelques imperfections, eu égard aux difficultés et à l'étendue du travail, les défauts indiqués ne lui permettent pas de décerner le prix ni à l'un ni à l'autre. Cependant ces mémoires mêmes prouvent qu'en proposant sa question historique, l'Académie a eu en vue un but qu'il n'est pas impossible d'atteindre; c'est pourquoi elle propose la même question une seconde fois, persuadée que sa solution complette sera d'une utilité éminente pour le perfectionnement des sciences historiques.

L'Académie réitère à cette occasion sa question astronomique proposée par son dernier programme et conçue en ces termes:

1) Déterminer, par un grand nombre d'observations, déjà faites ou encore à faire, tant par le moyen du tems, que des micromètres dont la

valeur a été vérifiée par la mesure d'une base, la quantité précise des diamètres du soleil et de la lune, telle qu'elle se présente dans les meilleures lunettes; la différence qui s'y trouve par rapport à la différente qualité des instrumens; enfin celle qui, d'après les observations de nos jours, parait avoir lieu entre le diamétre vertical et horisontal du soleil, ou plutôt, entre son diamètre polaire et équatorial.

2) Développer la théorie de l'irradiation et de l'inflexion, entant qu'elle influe sur la diminution des diamètres de ces deux astres dans les éclipses.

3) Trouver par le calcul d'un nombre suffisant d'éclipses solaires, surtout au moyen des observations des distances des cornes, la quantité précise de ces deux corrections; et par le calcul d'occultations d'étoiles, la quantité de l'inflexion séparément.

4) Tirer de toutes ces recherches un résultat sûr qui donne la quantité précise:

a) du diamètre du soleil, affecté de l'irradiation, ou tel qu'on le voit par des téléscopes plus ou moins grands, qui puisse servir de base pour évaluer les parties des micromètres.

b) du vrai diamètre du soleil, depouillé de l'effet de l'irradiation, pour servir de base dans l'Astronomie physique.

c) des diamètres du soleil et de la lune, qui satisfont aux phénomènes des éclipses, ou bien des corrections connues sous le nom de l'irradiation et de l'inflexion, qu'il faut appliquer aux diamètres, tirés des meilleures tables astronomiques, ou déterminés immédiatement par l'observation, avant que de les employer dans le calcul des éclipses.

Le prix est de cent Ducats d'Hollande pour chaque question, et le terme de rigueur, après l'expiration duquel aucun mémoire ne sera plus admis au concours, est: pour la question astronomique le 1. Janvier 1814, et pour la question historique le 1. Janvier 1815.

L'Académie invite les Savans de toutes les nations, sans en exclure ses Membres honoraires et Correspondans, à travailler sur ces matiéres. Il n'y a que les Académiciens mêmes, appellés à faire la fonction de juges, quelle croit devoir exclure du concours.

Les Savans, qui voudront concourir pour ces prix, ne mettront point leurs noms à leurs ouvrages, mais seulement une sentence ou dévise, et

ils ajouteront à leurs mémoires un billet cacheté qui portera au dehors la même dévise et au dedans le nom, la qualité et la demeure de l'auteur. On n'ouvrira que le billet de la pièce qui aura remporté le prix; les autres seront brûlés, sans avoir été décachetés.

Les mémoires doivent être écrits d'un caractère lisible, soit en Russe, en Français, en Allemand, ou en latin, et ils seront adressés au Secrétaire perpétuel de l'Académie, qui délivrera à la personne, qui lui aura été indiquée par l'Auteur, un récipissé marqué de la dévise et du numéro dont il aura côté la pièce.

Le mémoire couronné est une propriété de l'Académie, et l'Auteur ne saurait le faire imprimer sans sa permission formelle Les autres pièces de concours peuvent être redemandées au Secrétaire, qui les délivrera, ici à St. Pétersbourg, aux personnes qui se présenteront chez lui avec une procuration de l'Auteur.

VIII.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE.

1°) Kritischer Versuch, zur Aufklärung der Byzantinischen Chronologie, mit besonderer Rücksicht auf die frühere Geschichte Rufslands; von Philipp Krug. St. Petersburg 1810. 8vo.

2°) Словарь химическій, содержащій въ себѣ ѳеорію и практику химіи, съ приложеніемъ ея къ естественной исторіи и искуствамъ, сочиненія Шарль-Луи-Кадета; обработанный на Россійскомъ языкѣ трудами Василья Севергина. Часть I. II. съ фигурами. С. П. Б. 1810 8vo.

3°) Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, Tome III., avec l'Histoire de l'Académie pour les années 1809 et 1810. St. Pétersbourg 1811. 4to.

4°) Технологическій Журналъ. Тома VIII. Часть I. II. III. IV. съ фигурами. С. П. Б. 1811. 8vo.

Digitized by Google

I.
SECTION
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Digitized by Google

REGULA FACILIS
PROBLEMATA DIOPHANTEA PER NUMEROS INTEGROS EXPEDITE RESOLVENDI.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 30 Aprilis 1778.

§. 1.

Quaestiones, quae in hoc genere proponi solent, ita communiter se habent, ut, proposita hujusmodi formula secundi gradus: $\alpha xx + \beta x + \gamma$, omnes valores integri pro x inveniri debeant, unde numeri quadrati resultent; quod quo fieri possit, primo necesse est ut casus quispiam, veluti $x = a$, jam sit cognitus; deinde insuper requiritur, ut numerus α, quo quadratum xx in hac formula afficitur, sit positivus, ac praeterea non-quadratus.

§. 2 Cognito autem tali casu $x = a$, analysis, quae adhiberi solet, ita procedit, ut primo ex casu cognito alius novus eliciatur quaestioni satisfaciens, tum vero regula tradatur ex hoc casu denuo alium derivandi, atque

1 *

ita porro in infinitum. Deinde vero demonstratum est cunctos istos valores ordine inventos progressionem recurrentem constituere, cujus ergo terminus generalis omnes plane continet numeros integros, qui pro x assumti formulam propositam reddant quadratum.

§. 3. Quoniam autem haec passim abunde sunt exposita, hic ipsis principiis, unde haec solutio est deducta, non immoror, sed regulam facilem sum traditurus, cujus ope statim terminus generalis, omnes plane solutiones in se complectens, expedite assignari queant, ita ut non sit opus omnia momenta, quibus solutio completa innititur, aliunde conquirere; ipsam autem quaestionem aliquanto generalius sequenti modo proponam.

Problema.

Proposita formula $\alpha xx + \beta x + \gamma$ investigare omnes valores integros pro x statuendos, ut numeri hinc resultantes simul in alia simili formula secundi ordinis $\zeta yy + \eta y + \theta$ contineantur, ita ut si illi numeri debeant esse quadrati, haec altera formula simpliciter abitura sit in quadratum yy.

Solutio.

§. 4. Hic igitur, uti jam ante notavimus, necesse est, ut unus saltem casus satisfaciens jam aliunde sit

Digitized by Google

cognitus, pro quo ponamus esse $x = a$ et $y = b$, ita ut sit $\alpha aa + \beta a + \gamma = \zeta bb + \eta b + \theta$. Praeterea vero mox patebit etiam requiri ut productum $\alpha\zeta$ sit numerus positivus non-quadratus. Utraque haec conditio maxime est necessaria; nisi enim casus satisfaciens esset cognitus, evenire posset, ut quaestio plane foret impossibilis; tum enim, si productum $\alpha\zeta$ esset numerus quadratus, plerumque praeter casum cognitum nullus alius locum habere posset.

§. 5. Cum igitur requirantur idonei valores integri pro litteris x et y, qui satisfaciant huic aequationi:

$$\alpha xx + \beta x + \gamma = \zeta yy + \eta y + \theta,$$

quoniam novimus tam valores ipsius x quam ipsius y secundum seriem recurrentem progredi, in subsidium vocemus aequationem quadraticam $zz = 2sz - 1$, cujus radices brevitatis gratia sint: altera $p = s + \sqrt{ss - 1}$, altera vero $q = s - \sqrt{ss - 1}$, quarum ergo summa est $p + q = 2s$ et productum $pq = 1$. Notum enim est terminos generales serierum recurrentium in genere potestates quascunque talium formularum p et q continere, unde formulae pro nostris litteris x et y generaliter ita exprimi sunt concipiendae:

$$x = Ap^n + Bq^n + C \text{ et } y = Fp^n + Gq^n + H,$$

unde si exponenti indefinito n tribuatur valor $n = 0$, oriatur casus cognitus $x = a$ et $y = b$; sin autem loco n suc-

cessive capiantur numeri ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. ut omnes valores satisfacientes tam pro x quam pro y oriantur.

§. 6. Tota ergo quaestio huc redit: cujusmodi valores tam quantitati s, qua ambae litterae p et q definiuntur, quam litteris A, B, C, F, G, H tribui conveniat, ut singuli numeri pro n assumti praebeant tam pro x quam pro y valores integros problemati satisfacientes?

§. 7. Quoniam autem isti valores aequationi propositae $\alpha xx + \beta x + \gamma = \zeta yy + \eta y + \theta$ satisfacere debent, facile intelligitur, has formas propius ad hunc finem ita accommodari posse, statuendo:

$$x = \frac{f}{\sqrt{\alpha}} p^n + \frac{g}{\sqrt{\alpha}} q^n - \frac{\beta}{2\alpha} \text{ et } y = \frac{f}{\sqrt{\zeta}} p^n - \frac{g}{\sqrt{\zeta}} q^n - \frac{\eta}{2\zeta}.$$

Hinc enim, facta substitutione, prius aequationis nostrae membrum $\alpha xx + \beta x + \gamma$ hanc induet formam:

$$ffp^{2n} + ggq^{2n} + 2fgp^n q^n - \frac{\beta\beta}{4\alpha} + \gamma,$$

quae, ob $pq = 1$, reducitur ad hanc:

$$ffp^{2n} + ggq^{2n} + 2fg + \gamma - \frac{\beta\beta}{4\alpha}.$$

Alterum vero membrum $\zeta yy + \eta y + \theta$ ad hanc formam redit: $ffp^{2n} + ggq^{2n} - 2fg - \frac{\eta\eta}{4\zeta} + \theta$, et cum istae duae formae inter se debeant esse aequales, hinc orietur ista aequatio: $4fg + \gamma - \frac{\beta\beta}{4\alpha} = \frac{\eta\eta}{4\zeta} + \theta$, ideoque

$$4fg = \frac{\beta\beta}{4\alpha} - \frac{\eta\eta}{4\zeta} + \theta - \gamma.$$

§. 8. Quoniam in hac postrema aequatione exponens variabilis n non amplius inest, sufficit ut pro unico casu

Digitized by Google

cognito $x = a$ et $y = b$ satisfaciat. Assumimus autem casum hunc cognitum oriri statuendo $n = 0$; hinc igitur, ob $x = a$, prodibit $a = \frac{f+g}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{2\alpha}$; tum vero ob $y = b$ erit $b = \frac{f-g}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\eta}{2\zeta}$, ex quibus duabus conditionibus ambae litterae etiamnunc incognitae f et g definiri poterunt, cum sit

$$f + g = a\sqrt{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha a + \varepsilon}{2\sqrt{\alpha}}, \text{ similique modo}$$

$$f - g = b\sqrt{\zeta} + \frac{\eta}{2\sqrt{\zeta}} = \frac{2\zeta b + \eta}{2\sqrt{\zeta}},$$

hincque aequalitas postremo loco inventa sponte adimpletur; si quidem hinc fit:

$$(f+g)^2 - (f-g)^2 = 4fg = \alpha a a + \varepsilon b + \frac{\varepsilon\varepsilon}{4\alpha} - \zeta b b - \varepsilon\eta - \frac{\eta\eta}{4\zeta}.$$

Quia igitur per hypothesin est $\alpha a a + \varepsilon a + \gamma = \zeta b b + \eta b + \theta$, hinc evadit $4fg = \frac{\varepsilon\varepsilon}{4\alpha} - \frac{\eta\eta}{4\zeta} + \theta - \gamma$, prorsus uti conditio superior postulat.

§. 9. Inventis igitur valoribus litterarum f et g solutio quaesita nostri problematis sequentibus binis formulis continebitur: $x = \frac{f}{\sqrt{\alpha}} p^n + \frac{g}{\sqrt{\alpha}} q^n - \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ et

$$y = \frac{f}{\sqrt{\zeta}} p^n - \frac{g}{\sqrt{\zeta}} q^n - \frac{\eta}{2\zeta},$$

ubi ergo nihil aliud superest, nisi ut binae quantitates $p = s + \sqrt{ss - 1}$ et $q = s - \sqrt{ss - 1}$ rite determinentur; ubi manifestum est litteram s ita comparatam esse debere, ut pro x et y resultent valores rationales. Hunc in finem contemplemur casum quo $n = 1$, qui praebebit:

$$x = \frac{(f+g)s}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(f-g)\sqrt{ss-1}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\epsilon}{2\alpha} \text{ et}$$
$$y = \frac{(f-g)s}{\sqrt{\zeta}} + \frac{(f+g)\sqrt{ss-1}}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\eta}{2\zeta}.$$

Cum igitur supra invenerimus $f+g = a\sqrt{\alpha} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{\alpha}}$ et $f-g = \mathfrak{b}\sqrt{\zeta} + \frac{\eta}{2\sqrt{\zeta}}$, his valoribus substitutis habebimus:

$$x = as + \frac{\epsilon s}{2\alpha} + \frac{b\sqrt{\zeta}(ss-1)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\eta\sqrt{ss-1}}{2\sqrt{\alpha\zeta}} - \frac{\epsilon}{2\alpha}, \text{ sive}$$
$$x = as + \frac{\epsilon(s-1)}{2\alpha} + \frac{b\sqrt{\zeta}(ss-1)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\eta\sqrt{ss-1}}{2\sqrt{\alpha\zeta}}.$$

Similique modo erit:

$$y = bs + \frac{\eta(s-1)}{2\zeta} + \frac{a\sqrt{\alpha}(ss-1)}{\sqrt{\zeta}} + \frac{\epsilon\sqrt{(ss-1)}}{2\sqrt{\alpha\zeta}}.$$

§. 10. Ut igitur hae ambae expressiones ab omni irrationalitate liberentur, evidens est hoc obtineri, si modo fuerit formula $\frac{\sqrt{ss-1}}{\sqrt{\alpha\zeta}}$ quantitas rationalis. Ponatur igitur $\frac{\sqrt{ss-1}}{\sqrt{\alpha\zeta}} = r$, eritque $ss-1 = \alpha\zeta rr$, hincque porro $s = \sqrt{1+\alpha\zeta rr}$, quam ergo formulam denuo rationalem esse oportet, id quod semper praestari potest ope problematis *Pelliani*, si modo fuerit $\alpha\zeta$ numerus positivus non-quadratus, uti jam supra innuimus.

§. 11. Ante omnia igitur pro resolutione nostri problematis ex binis coëfficientibus α et ζ quaeratur numerus integer r, ut formula $\alpha\zeta rr+1$ evadat quadratum, tum vero sumatur $s = \sqrt{\alpha\zeta rr+1}$; et quoniam hinc fit $\sqrt{(ss-1)} = r\sqrt{\alpha\zeta}$, casus $n = 1$ pro x et y sequentes suppeditabit valores rationales:

Digitized by Google

$$x = as + \frac{\epsilon(s-1)}{2\alpha} + \zeta br + \tfrac{1}{2}\eta r \text{ et}$$
$$y = bs + \frac{\eta(s-1)}{2\zeta} + \alpha ar + \tfrac{1}{2}\epsilon r,$$

qui valores utique sunt rationales, atque adeo integri, nisi forte formulae $\frac{\epsilon(s-1)}{2\alpha}$ et $\frac{\eta(s-1)}{2\zeta}$ adhuc fractiones involvant, quas autem quemadmodum tollere liceat, deinceps ostendemus.

§. 12. Colligamus ergo omnia, quibus solutio nostri problematis innititur, ac primo quidem investigatis binis numeris integris r et s, ita ut sit $s = \sqrt{\alpha\zeta rr + 1}$, statuatur brevitatis gratia $p = s + r\sqrt{\alpha\zeta}$ et $q = s - r\sqrt{\alpha\zeta}$; tum vero binae litterae f et g ita determinentur, ut sit

$$f + g = a\sqrt{\alpha} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{\alpha}} \text{ et } f - g = b\sqrt{\zeta} + \frac{\eta}{2\sqrt{\zeta}},$$

quo facto formulae generales pro valoribus integris ambarum quantitatum x et y ita se habebunt:

$$x = \frac{f}{\sqrt{\alpha}}(s + r\sqrt{\alpha\zeta})^n + \frac{g}{\sqrt{\alpha}}(s - r\sqrt{\alpha\zeta})^n - \frac{\epsilon}{2\alpha} \text{ et}$$
$$y = \frac{f}{\sqrt{\zeta}}(s + r\sqrt{\alpha\zeta})^n + \frac{g}{\sqrt{\zeta}}(s - r\sqrt{\alpha\zeta})^n - \frac{\eta}{2\zeta},$$

ubi omnes numeri integri, pro n assumti, praebebunt valores satisfacientes pro binis litteris incognitis x et y, qui nisi sint ipsi integri, facile ad integros revocari poterunt, uti mox ostendemus.

§. 13. Hic ante omnia observasse juvabit, statim atque bini valores se insequentes fuerint inventi, per scalam relationis ex iis facillime sequentes omnes formari

posse. Ad quod ostendendum sint pro exponente quocunque n valores satisfacientes:

$$x = \frac{f}{\sqrt{\alpha}} p^n + \frac{g}{\sqrt{\alpha}} q^n - \frac{\varepsilon}{2\alpha} \text{ et } y = \frac{f}{\sqrt{\zeta}} p^n - \frac{g}{\sqrt{\zeta}} q^n - \frac{\eta}{2\zeta},$$

hos autem proxime sequentes ab exponente $n+1$ oriundi sint:

$$x' = \frac{f}{\sqrt{\alpha}} p^{n+1} + \frac{g}{\sqrt{\alpha}} q^{n+1} - \frac{\varepsilon}{2\alpha} \text{ et } y' = \frac{f}{\sqrt{\zeta}} p^{n+1} - \frac{g}{\sqrt{\zeta}} q^{n+1} - \frac{\eta}{2\zeta},$$

porro vero sequentes sint:

$$x'' = \frac{f}{\sqrt{\alpha}} p^{n+2} + \frac{g}{\sqrt{\alpha}} q^{n+2} - \frac{\varepsilon}{2\alpha} \text{ et } y'' = \frac{f}{\sqrt{\zeta}} p^{n+2} - \frac{g}{\sqrt{\zeta}} q^{n+2} - \frac{\eta}{2\zeta},$$

unde colligitur fore:

$$x'' - \lambda x' + x = \frac{f}{\sqrt{\alpha}} p^n (pp - \lambda p + 1) + \frac{g}{\sqrt{\alpha}} q^n (qq - \lambda q + 1) - \frac{\varepsilon}{2\alpha} (2 - \lambda).$$

Similique modo erit:

$$y'' - \lambda y' + y = \frac{f}{\sqrt{\zeta}} p^n (pp - \lambda p + 1) - \frac{g}{\sqrt{\zeta}} q^n (qq - \lambda q + 1) - \frac{\eta}{2\zeta} (2 - \lambda).$$

§. 14. Initio autem vidimus litteras p et q esse binas radices hujus aequationis quadraticae: $zz - 2sz + 1 = 0$, ita ut sit tam $pp - 2sp + 1 = 0$ quam $qq - 2sq + 1 = 0$; quocirca, si loco λ accipiamus $2s$, habebimus:

$$x'' - 2sx' + x = \frac{\varepsilon}{\alpha}(s - 1),$$

eodemque modo erit quoque

$$y'' - 2sy' + y = \frac{\eta}{\zeta}(s - 1).$$

Consequenter simul atque invenerimus binos valores se immediate sequentes x et x', item y et y', ex iis protinus sequentes reperientur per has formulas:

$$x'' = 2sx' - x + \frac{\varepsilon}{\alpha}(s - 1) \text{ et}$$
$$y'' = 2sy' - y + \frac{\eta}{\zeta}(s - 1);$$

Digitized by Google

unde evidens est, dummodo bini valores priores fuerint rationales, sequentes omnes in infinitum pariter rationales esse futuros.

§. 15. Cum igitur primi valores ipsarum x et y, ex $n = 0$ oriundi, sint per hypothesin a et b, si immediate sequentes, ex $n = 1$ orti, designentur per a' et b', tum sequentes, ob:

$$a' = as + \frac{\varepsilon(s-1)}{2\alpha} + \zeta br + \tfrac{1}{2}\eta r \text{ et}$$
$$b' = bs + \frac{\eta(s-1)}{2\zeta} + \alpha ar + \tfrac{1}{2}\varepsilon r, \text{ erunt}$$
$$a'' = a(2ss-1) + 2\zeta brs + \frac{\varepsilon(ss-1)}{\alpha} + \eta rs \text{ et}$$
$$b'' = b(2ss-1) + 2\alpha ars + \frac{\eta(ss-1)}{\zeta} + \varepsilon rs.$$

Hos autem postremos terminos semper esse numeros integros inde patet, quod sit $ss - 1 = \alpha\zeta rr$; unde pro priore valore a'' fit fractio $\frac{\varepsilon(ss-1)}{\alpha} = \varepsilon\zeta rr$; pro altera autem $\frac{\eta(ss-1)}{\zeta} = \alpha\eta rr$. Hinc sequitur in genere etiamsi valores a' et b' adhuc fractiones involvant, sequentes tamen a'' et b'' semper esse integros; quod idem intelligendum est de omnibus sequentibus alternatim sumtis; unde termini fractionibus inquinati statim evitari poterunt, si exponenti n non omnes numeros, sed pares tantum tribuamus, quod fiet ponendo:

$$x = \frac{f}{\sqrt{\alpha}}(pp)^n + \frac{g}{\sqrt{\alpha}}(qq)^n - \frac{\varepsilon}{2\alpha} \text{ et}$$
$$y = \frac{f}{\sqrt{\zeta}}(pp)^n - \frac{g}{\sqrt{\zeta}}(qq)^n - \frac{\eta}{2\zeta}.$$

Cum igitur fuerit $p = s + \sqrt{ss-1}$ et $q = s - \sqrt{ss-1}$, erit $pp = 2ss - 1 + 2s\sqrt{ss-1}$ et $qq = 2ss - 1 - 2s\sqrt{ss-1}$, ita ut in praecedentibus formulis tantum opus sit loco s scribere $2ss-1$, et loco $\sqrt{ss-1} = r\sqrt{\alpha\zeta}$ scribi debebit $2r\sqrt{\alpha\zeta}(\alpha\zeta rr + 1)$; quamobrem, omissis terminis fractis, si x', y', x'', y'' etc. tantum integros se immediate sequentes denotent, lex progressionis ita se habebit:

$$x'' = 2(2ss-1)x' - x + 2\beta\zeta rr \quad \text{et}$$
$$y'' = 2(2ss-1)y' - y + 2\alpha\eta rr.$$

Praeterea vero hoc casu erit:

$$a' = a(2ss-1) + \beta\zeta rr + 2\zeta brs + \eta rs \quad \text{et}$$
$$b' = b(2ss-1) + \alpha\eta rr + 2\alpha ars + \beta rs.$$

Exemplum I.

§. 16. *Invenire omnes numeros trigonales, qui simul sint quadrati.* Requiritur ergo ut sit $\frac{xx+x}{2} = yy$, ideoque in integris $xx + x = 2yy$; ubi casus cognitus manifesto est $x = a = 1$ et $y = b = 1$, vel etiam $x = a = 0$ et $y = b = 0$, ubi perinde est utrovis utamur. Hic igitur primo est $\alpha = 1$; $\beta = 1$ et $\gamma = 0$, tum vero $\zeta = 2$; $\eta = 0$ et $\theta = 0$. Quare cum esse debeat $s = \sqrt{\alpha\zeta rr + 1}$, erit hoc casu $s = \sqrt{2rr+1}$, unde sumto $r = 2$ fit $s = 3$. Deinde ex casu cognito $a = 0$ et $b = 0$ habebimus

$f+g=\frac{1}{2}$ et $f-g=0$, consequenter $f=g=\frac{1}{4}$; unde formulae generales pro x et y reperiuntur:

$$x=\frac{1}{4}(3+2\sqrt{2})^n+\frac{1}{4}(3-2\sqrt{2})^n-\frac{1}{2} \text{ et}$$
$$y=\frac{1}{4\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n-\frac{1}{4\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n.$$

Hinc sumto $n=0$ prodit ipse casus cognitus $x=0$ et $y=0$.

§. 17. Sumatur nunc $n=1$, ut prodeat secunda solutio, quae erit $x'=1$ et $y'=1$, qui est alter casus cognitus. Sumto autem $n=2$, ob $(3\pm2\sqrt{2})^2=17\pm12\sqrt{2}$, oritur tertia solutio $x''=8$ et $y''=6$. Neque vero opus est hos postremos valores ex ipsis formulis generalibus deducere, quoniam novimus tam valores ipsius x quam ipsius y secundum certam legem serierum recurrentium procedere. Cum igitur per §. 14. sit $x''=6x'-x+2$ et $y''=6y'-y$, hinc ex duobus casibus prioribus ambae series pro x et y ita procedent:

Pro x . . . 0, 1, 8, 49, 288, 1681 etc.

Pro y . . . 0, 1, 6, 35, 204, 1189 etc.

Hinc enim utique erit $\frac{8\cdot9}{2}=6^2=36$; similique modo $\frac{49\cdot50}{2}=35^2=1225$; porro $\frac{288\cdot289}{2}=204^2=41616$.

Exemplum II.

§. 18. *Invenire omnes numeros quadratos, qui unitate minuti sint numeri trigonales, cujusmodi quadrata sunt* 1,

4, 16, etc. Requiritur ergo ut sit $xx - 1 = \frac{yy+y}{2}$, sive $2xx - 2 = yy + y$, ita ut sit $\alpha = 2$; $\beta = 0$ et $\gamma = -2$; tum vero $\zeta = 1$; $\eta = 1$ et $\theta = 0$; casus autem cognitus sponte se offerens est $x = a = 1$ et $y = b = 0$. Deinde ob $\alpha\zeta = 2$ erit ut ante $s = \sqrt{2rr + 1}$, ideoque $r = 2$ et $s = 3$. Praeterea vero habebimus $f + g = \sqrt{2}$ et $f - g = \frac{1}{2}$, unde fit $f = \frac{2\sqrt{2}+1}{4}$ et $g = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$. Hinc formulae generales pro x et y colliguntur:

$$x = \frac{(2\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2})^n + \frac{(2\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}}(3 - 2\sqrt{2})^n \text{ et}$$
$$y = \frac{(2\sqrt{2}+1)}{4}(3 + 2\sqrt{2})^n - \frac{(2\sqrt{2}-1)}{4}(3 - 2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}.$$

§. 19. Sumto igitur $n = 0$ sequitur fore $x = 1$ et $y = 0$, qui est ipse casus cognitus. Posito autem $n = 1$ erit $x = 4$ et $y = 5$. Ex his duobus casibus sequentes eruuntur ope formularum $x'' = 6x' - x$ et $y'' = 6y' - y + 2$, unde ergo binae sequentes series derivantur:

Pro x . . . 1, 4, 23, 134, 781 etc. et
Pro y . . . 0, 5, 32, 189, 1104 etc.

qui quomodo satisfaciant manifestum est, cum sit:

$4^2 - 1 = 3 . 5 = \frac{5 \cdot 6}{2}$; $23^2 - 1 = 22 . 24 = \frac{32 \cdot 33}{2}$;
Deinde $134^2 - 1 = 133 . 135 = \frac{189 \cdot 190}{2}$.

§. 20. Verum hoc modo non omnes obtinentur solutiones, quandoquidem initio jam observavimus satisfacere quoque valorem $x = 2$ et $y = 2$. Verum hic probe te-

Digitized by Google

nendum est ambas has series etiam retro continuari posse, ope formularum $x = 6x' - x''$ et $y = 6y' - y'' + 2$, unde insuper oriuntur sequentes valores:

Pro x . . etc. 2174, 373, 64, 11, 2, 1, 4 etc.

Pro y . . etc. −3075, −528, −91, −16, −3, 0, 5 etc.

ubi valores negativi ipsius y facile in positivos transmutantur. Quia enim numerus trigonalis, cujus latus est negativum $-m$, est $\frac{m(m-1)}{2}$, qui est quoque trigonalis oriundus a latere $m - 1$, loco $-m$ scribere licet $m - 1$, unde novi valores hinc oriundi erunt more solito expressi:

pro x . . . 1, 2, 11, 64, 373, 2174 etc. et

pro y . . — 1, 2, 15, 90: 527, 3074,

qui aeque satisfaciunt, ac priores, cum sit:

$$2^2 - 1 = \frac{2 \cdot 3}{2};\quad 11^2 - 1 = 10 \cdot 12 = \frac{15 \cdot 16}{2};\ \text{etc.}$$

§. 21. Pro hoc igitur exemplo completa solutio ex binis seriebus recurrentibus est composita, ita ut numeri quadrati, qui unitate minuti evadunt trigonales, ordine ita procedant:

$1, 2^2, 4^2, 11^2, 23^2, 64^2, 134^2, 373^2, 781^2$ etc.

Haec autem duplicitas in primo exemplo non occurrit, quandoquidem series ibi inventae, etiamsi retro continuentur, novas solutiones non producunt.

Exemplum III.

§. 22. *Invenire eos numeros trigonales, qui triplicati etiamnunc sint trigonales, cujusmodi est 1, cujus triplum pariter est trigonalis.* Hic ergo requiritur ut sit: $3\frac{(xx+x)}{2} = \frac{yy+y}{2}$, sive $3xx + 3x = yy + y$, ita ut hic sit $\alpha = 3$; $\beta = 3$; $\gamma = 0$ et $\zeta = 1$; $\eta = 1$ et $\theta = 0$, pro casu autem cognito $x = a = 1$ et $y = b = 2$. Deinde ob $\alpha\zeta = 3$ sumi debet $s = \sqrt{(3rr + 1)}$, sicque sumere licet $r = 1$ et $s = 2$; tum vero ex casu cognito deducimus $f + g = \sqrt{3} + \frac{3}{2\sqrt{3}}$ et $f - g = 2 + \frac{1}{2}$, ideoque $f = \frac{3\sqrt{3}+5}{4}$ et $g = \frac{3\sqrt{3}-5}{4}$, unde formulae generales pro x et y sunt:

$$x = \left(\frac{3\sqrt{3}+5}{4\sqrt{3}}\right)(2+\sqrt{3})^n + \left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4\sqrt{3}}\right)(2-\sqrt{3})^n - \tfrac{1}{2} \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{3\sqrt{3}+5}{4}\right)(2+\sqrt{3})^n - \left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)(2-\sqrt{3})^n - \tfrac{1}{2}.$$

§. 23. Haec autem binae formulae justas praebent solutiones non solum quando pro n numeri integri positivi accipiuntur, sed etiam negativi, quare cum sit:

$$(2+\sqrt{3})^{-n} = (2-\sqrt{3})^n, \text{ similique modo}$$

$$(2-\sqrt{3})^{-n} = (2+\sqrt{3})^n,$$

his notatis formulae pro altera solutione erunt:

$$x = \left(\frac{3\sqrt{3}+5}{4\sqrt{3}}\right)(2-\sqrt{3})^n + \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{4\sqrt{3}}\right)(2+\sqrt{3})^n - \tfrac{1}{2} \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{3\sqrt{3}+5}{4}\right)(2-\sqrt{3})^n - \left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)(2+\sqrt{3})^n - \tfrac{1}{2},$$

unde sumto $n = 0$ utraque solutio praebet ipsum casum cognitum $x = 1$ et $y = 2$.

Digitized by Google

§. 24. Sumamus nunc $n = 1$, ac priores formulae nobis dabunt, $x = 5$ et $y = 9$, posteriores vero formulae praebent $x = 0$ et $y = 0$. Ex cognitis autem his duabus solutionibus sequentes erui possunt, ope formularum:

$$x'' = 4x' - x + 1 \text{ et } y'' = 4y' - y + 1,$$

unde ex priore casu deducuntur sequentes solutiones:

Pro x . . . 1, 5, 20, 76, 285 etc.

Pro y . . . 2, 9, 35, 132, 494 etc.

Posterior vero casus praebet solutiones sequentes:

Pro x . . . 1, 0, 0, 1, 5, 20, 76, 285 etc.

Pro y . . . 2, 0, −1, −3, −10, −36, −133, −495 etc.

Modo ante autem vidimus numeros trigonales, quorum radices sunt negativae, puta $-m$, convenire cum radicibus $m - 1$; unde intelligitur posteriorem casum nullas novas solutiones producere. Sicque omnes numeri trigonales, quorum tripla sunt etiam trigonales, hanc seriem constituunt:

0, 1, 15, 210, 2926, 40755 etc.

DE LINEIS CURVIS NON IN EODEM PLANO SITIS, QUAE MAXIMI VEL MINIMI PROPRIETATE SUNT PRAEDITAE.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 8 Martii 1779.

1. Quae hactenus de lineis curvis Maximi Minimive proprietate quapiam gaudentibus sunt tradita tantum ad ejusmodi lineas curvas spectant, quae in eodem plano describi possunt, cujus ratio in eo est posita, quod formula integralis Maximum Minimumve involvens duas tantum complectitur quantitates variabiles, quas inter eam relationem investigari oportet, qua valor istius formulae maximus vel minimus evadat, quae si ad lineas curvas transferantur, eae ita comparatae esse debent, ut earum natura per aequationem inter duas coordinatas exprimatur; unde evidens est, hanc conditionem non nisi in lineas super eodem plano descriptas competere posse.

2. Sin autem formula integralis tres variabiles, veluti x, y et z involvat, quoniam ea determinatum valorem recipere nequit, nisi binae per tertiam determinentur,

Digitized by Google

ita ut tam y quam z tanquam functiones ipsius x sint spectandae, ad Maximum Minimumve definiendum necesse est ut tam inter x et y, quam inter x et z, conveniens relatio exploretur; unde si illae tres variabiles x, y et z tanquam coordinatae spectentur, curva inde oritur non in eodem plano sita, cujus determinatio utique binas aequationes postulat, quarum altera relationem inter x et y altera vero inter x et z exprimat.

3. Quae quo clarius ob oculos ponantur, concipiamus ternos axos inter se normales OA, OB et OC, quorum bini priores in planum tabulae incidant, tertius vero OC ei normaliter insistat. Quodsi jam z fuerit punctum quodcunque curvae quaesitae, ejus locum per ternas coordinatas illis axibus parallelas assignare solemus, quae sint $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quare ad hunc locum cognoscendum pro qualibet abscissa $OX = x$, necesse est ut tam applicata $XY = y$ quam altera $YZ = z$ exhiberi queant, ad quod ergo duplici relatione opus est, sive duae aequationes ad hoc requiruntur, ex quibus tam y quam z per tertiam x definiri queat; ubi per se perspicuum est, aequatione inter x et y naturam projectionis curvae quaesitae in plano AOB factam exprimi, altera vero aequatione, inter x et z, ducta recta XV, parallela et aequali ipsi YZ, projectionem ejusdem curvae in plano Tab. I. Fig. 1.

A O C factam exhiberi. Simili modo, si inde aequatio inter y et z eliciatur, ea natura projectionis in planum BOC facta determinabitur. Sufficit autem ad curvam determinandam duas tantum projectiones priores nosse, quandoquidem his tertia projectio jam determinatur.

4. Quodsi jam ejusmodi curva desideretur, in qua formula integralis $\int V \partial x$ maximum minimumve obtineat valorem, ubi V sit functio quaecunque non solum ipsarum trium variabilium x, y et z, sed etiam earum differentialia cujuscunque ordinis involvat, ac fortasse etiam novas formulas integrales complectatur: ad hoc expediendum duae aequationes sunt necessariae, ex quibus tam valorem ipsius y, quam ipsius z, per x definire liceat; quod si praestari poterit, simul ambae projectiones curvae quaesitae modo memoratae innotescent.

5. Quo igitur in hoc negotio simili modo versemur, quo olim sum usus circa formulas duas tantum variabiles complectentes, statuamus primo pro variabili y, ejusque differentialibus, $\partial y = p \partial x$, $\partial p = q \partial x$, $\partial q = r \partial x$ etc. Similique modo pro differentialibus ipsius z ponamus $\partial z = p' \partial x$, $\partial p' = q' \partial x$; $\partial q' = r' \partial x$ etc., at vero a formulis integralibus, quae forte insuper in quantitate V inesse possent, mentem abstrahamus, ita ut jam quantitas V spectari possit, tanquam functio omnium harum quantitatum: x, y, z,

Digitized by Google

p, p', q, q', r, r' etc. unde, differentiatione more solito instituta, habebitur talis forma:

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r \text{ etc.}$$
$$N\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' \text{ etc.}$$

6. Hac forma in genere constituta totum negotium huc redit, ut inde binae aequationes eliciantur, ex literis M, N, N′, P, P′, Q, Q′ etc. formandae, ex quibus deinceps natura curvae quaesitae per binas projectiones memoratas definiri queat. Hic autem ante omnia meminisse oportet, casibus, quibus tertia variabilis z prorsus deest, quos olim uberrime sum prosecutus, naturam curvarum satisfacientium semper hac aequatione exprimi:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} \text{ etc.} = 0.$$

Unde manifestum est, si variabilis y abesset, et formula integralis $\int V\partial x$ tantum variabiles x et z involveret, aequationem pro curva quaesita futuram esse:

$$N - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} = 0.$$

7. Quoniam autem praesenti casu duplex relatio est investiganda, quarum altera inter x et y, altera vero inter x et z subsistat, tota quaestio ad casum praecedentem revocari poterit. Primo enim alteram curvae quaesitae projectionem inter x et z tanquam datam spectare licebit, quasi jam revera ejus natura esset cognita, ita ut tantum altera relatio inter x et y sit investiganda, id quod jam

per methodum ordinariam facile expediri poterit. Cum enim nunc z tanquam certa functio ipsius x spectari possit, etiam quantitates inde derivatae tanquam tales functiones spectari poterunt, unde in valore differentiali pro ∂V assumto omnes hi termini:

$$N'\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' \text{ etc.}$$

jam in membro Mdx contineri erunt censendi; quare cum littera M in aequationem finalem non ingrediatur, aequatio inter x et y hac exprimetur aequatione:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} = 0.$$

8. Quodsi jam simili modo valorem ipsius y, quasi jam esset cognitus, contemplemur, ita ut tam y quam p, q, r tanquam functiones cognitae ipsius x spectari queant, hi termini: $N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r$, ad formam $M\partial x$ accedere erunt censendi, sicque aequatio inter z et x per hanc aequationem definietur:

$$N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} = 0.$$

9. Ex his conjunctis manifesto sequitur, si neutra harum aequationum tanquam cognita spectari queat, sed utraque definiri debeat, quaesito satisfieri his binis aequationibus conjungendis:

$$\text{I. } N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} = 0,$$

$$\text{II. } N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} = 0,$$

Digitized by Google

haecque solutio adeo patet, ad quotcunque gradus differentialia, in formula V contenta, ascendant.

10. Cum autem solutiones talium problematum altiora differentialia implicantium, plerumque nimis evadant difficiles atque adeo plerumque plane intractabiles, hic tantum casus simpliciores, quibus differentialia in formula V non ultra primum gradum ascendant, attentius sumus contemplaturi, quae ergo ex his duabus aequationibus erunt petendae:

$$\text{I. } N\partial x = \partial P \quad \text{et} \quad \text{II. } N'\partial x = \partial P'.$$

11. Quamquam autem hae duae aequationes totum negotium conficere sunt censendae; tamen plerumque plurimum expediet iis adhuc tertiam quandam aequationem, quae quidem in iis jam contineatur, adjungere, quippe quae calculo sublevando plurimum inserviet. Quoniam enim posuimus $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = p'\partial x$, ex illis duabus aequationibus elicimus:

$$1^{o}.\ N\partial y = p\partial P \quad \text{et} \quad 2^{o}.\ N'\partial z = p'\partial P',$$

qui valores, in formula differentiali generali:

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + N'\partial z + P\partial p + P'\partial p',$$

substituti, producent hanc formam:

$$\partial V = M\partial x + p\partial P + P\partial p + p'\partial P' + P'\partial p', \text{ sive}$$

$$\partial V = M\partial x + \partial(pP + p'P').$$

Hinc ergo, si brevitatis gratia ponamus $V - Pp - P'p' = S$,

orietur ista aequatio: $M\partial x = \partial S$, quae ergo cum binis praecedentibus $N\partial x = \partial P$ et $N'\partial x = \partial P'$ commode conjungi poterit. Interim tamen probe est observandum, quamlibet harum trium aequationum jam in binis reliquis esse contentam, ideoque omitti posse, nisi insignem usum in calculo evolvendo saepissime praestaret. His notatis istud argumentum prorsus novum aliquot exemplis illustremus.

Problema I.

Investigare lineam curvam ternis coordinatis x, y *et* z *contentam, in qua haec formula integralis:* $\int \frac{x\partial y\partial z}{\partial x}$ *maximum minimumve obtineat valorem.*

Solutio.

12. Cum igitur sit $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = p'\partial x$, cujus loco commoditatis gratia scribamus $\partial z = q\partial x$, quandoquidem haec littera q in primo significatu hic non amplius occurrit, formula nostra integralis erit $\int pqx\partial x$, ita ut sit $V = pqx$, hincque differentiando $\partial V = pq\partial x + px\partial p + px\partial q$, unde facta collatione habebimus $M = pq$; $N = 0$; $N' = 0$; $P = qx$; et $P' = px$, hincque fiet $S = -pqx$, quamobrem tres nostrae aequationes erunt:

1°. $pq\partial x = -\partial . pqx$; 2°. $0 = \partial . qx$ et 3°. $0 = \partial . px$.

13. Ex binis posterioribus aequationibus fit $qx = a$ et $px = b$, unde tota quaestio jam sponte resolvitur. Cum

Digitized by Google

enim inde sit $\frac{q}{p} = \frac{a}{b} = n$, erit $q = np$, et jam reliqua omnia per variabilem p facile definiri poterunt, existente $n = \frac{a}{b}$. Cum enim sit $x = \frac{b}{p}$, erit $\partial x = -\frac{b\partial p}{pp}$, hincque $p\partial x = \partial y = -\frac{b\partial p}{p}$ et $q\partial x = \partial z = -\frac{nb\partial p}{p}$, unde fit integrando $y = f - blp$ et $z = g - nblp$. Quocirca cum sit $p = \frac{b}{x}$, nunc variabilis y sequenti modo exprimetur: $y = f - blb + blx$, sive mutatis constantibus: $y = f + blx$; tum vero $z = g + nblx$.

14. Hinc igitur patet utramque curvae quaesitae projectionem esse curvam logarithmicam; ubi observasse juvabit, in his determinationibus inesse quatuor constantes arbitrarias f, g, n et b, quemadmodum solutio completa postulat, siquidem utraque aequatio principalis manifesto differentialia secunda complectitur, ideoque necesse est, ut utrumque integrale completum duas constantes arbitrarias contineat.

15. Cum deinde relatio inter y et z ita exprimatur: $z = ny + c$, projectio curvae inventae super plano BOC erit linea recta; unde patet totam curvam nostram in idem planum incidere, neque adeo proprie ad praesentem casum referri posse. Interim tamen etiam hinc nostra methodus haud mediocriter illustratur, cum declaret, quando curva inventa in eodem plano describi possit.

Problema II.

Invenire lineam curvam ternis coordinatis x, y et z contentam, in qua haec formula integralis: $\int \frac{(y+z)\partial y \partial z}{\partial x}$ maximum minimumve obtineat valorem.

Solutio.

16. Posito hic $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = p'\partial x = q\partial x$, erit $V = pq(y+z)$, hincque differentiando:

$$\partial V = pq\partial y + pq\partial z + (y+z)q\partial p + (y+z)p\partial q.$$

Unde, facta comparatione cum formula generali:

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + N'\partial z + P\partial p + P'\partial p',$$

habebimus $M = 0$; $N = pq$; $N' = pq$; $P = (y+z)q$ et $P' = (y+z)p$; hinc ergo fiet $S = V - Pp - P'q = -pq(y+z)$. Ex his jam tres nostrae aequationes erunt:

1°. $0 = -\partial . pq . (y+z)$;

2°. $pq\partial x = \partial . (y+z)q$;

3°. $pq\partial x = \partial . (y+z)p$.

Prima statim praebet $pq(y+z) = a$, ita ut sit $y+z = \frac{a}{pq}$, qui valor, in reliquis substitutus, dat:

1°. $pq\partial x = \partial . \frac{a}{p} = -\frac{a\partial p}{pp}$; 2°. $pq\partial x = \partial . \frac{a}{q} = -\frac{a\partial q}{qq}$.

Hinc sequitur fore $\frac{\partial p}{pp} = \frac{\partial q}{qq}$; consequenter $-\frac{1}{p} = -\frac{1}{q} + b$, sive $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + b$, unde elicimus $q = \frac{cp}{c+p}$. Sicque prima aequatio fit $y+z = \frac{a(c+p)}{cpp}$; reliquae vero dant $pq\partial x = -\frac{a\partial p}{pp}$, ideoque $\partial x = -\frac{a(c+p)\partial p}{cp^4}$, cujus integrale praebet $x = \frac{a}{3p^3} + \frac{a}{2cpp} + f$.

Digitized by Google

17. Deinde ob $\partial y = p\partial x$ erit nunc $\partial y = -\frac{a(c+p)\partial p}{cp^3}$, cujus integrale praebet $y = \frac{a}{2pp} + \frac{a}{cp} + g$. Pro tertia coordinata z quoniam jam vidimus esse $y + z = \frac{a(c+p)}{cpp}$, erit nunc $z = \frac{a - 2gpp}{2pp} = \frac{a}{2pp} - g$. Hic igitur iterum introductae sunt quatuor constantes arbitrariae; unde intelligitur hanc solutionem esse completam.

18. Hic quidem omnes tres coordinatas x, y et z per eandem variabilem p expressas dedimus, id quod pro constructione curvae eundem praestat usum, quoniam pro singulis valoribus loco p assumtis totidem curvae puncta designantur; unde haud difficultur intelligitur totam hanc curvam non in eodem plano esse sitam, propterea quod ex his tribus formulis, elidendo p, nulla talis aequatio: $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ formari potest. Litteram autem p sequenti modo eliminare licebit. Cum sit $y - z = \frac{a}{cp} + 2g$, erit $p = \frac{a}{c(y - z - 2g)}$, qui valor in prima aequatione substitutus producet aequationem inter x, y et z, cui adjungi poterit ea, quae oritur ex tertia $z + g = \frac{a}{2pp}$, unde fit:

$$2a(z+g) = cc(y - z - 2g)^2.$$

Verum hae formulae nihil plane conferunt ad curvam describendam. Caeterum evidens est hanc curvam esse algebraicam, secus atque ea quae problemate praecedente erat inventa.

Problema III.

Invenire lineam curvam ternis coordinatis x, y *et* z *contentam, in qua haec formula integralis:* $\int X\sqrt{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}$ *maximum minimumve adipiscatur valorem, existente* X *functione quacunque ipsius* x.

Solutio.

19. Hic ergo, ob $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = q\partial x$, erit $V = X\sqrt{1+pp+qq}$, ubi brevitatis gratia ponamus $\sqrt{1+pp+qq}=s$, ita ut sit $V=Xs$. Quia igitur ipsae litterae y et z non insunt, erit tam $N=0$ quam $N'=0$; deinde ob $\partial s=\frac{p\partial p+q\partial q}{s}$, erit $P=\frac{Xp}{s}$ et $P'=\frac{Xq}{s}$, unde binae aequationes solutionem continentes erunt $\partial P=0$ et $\partial P'=0$, sicque habebimus $\frac{Xp}{s}=a$ et $\frac{Xq}{s}=b=na$.

20. Hinc igitur statim patet fore $\frac{q}{p}=n$, sive $q=np$, hincque porro $\partial z=n\partial y$, et integrando $z=ny+c$, ita ut projectio in planum BOC facta sit linea recta, ideoque tota curva quaesita in certo plano existat. Deinde vero cum sit $s=\sqrt{1+(nn+1)pp}$, erit $Xp=a\sqrt{1+(nn+1)pp}$; unde, posito brevitatis gratia $nn+1=m$, colligimus $p=\frac{a}{\sqrt{(X^2-aamm)}}$. Sicque pro utraque projectione quaesita habebimus has aequationes differentiales:

$$\partial y=\frac{a\partial x}{\sqrt{(X^2-mmaa)}} \text{ et } \partial z=\frac{na\partial x}{\sqrt{(X^2-mmaa)}}.$$

Digitized by Google

21. Hic observasse juvabit, cum $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ exprimat elementum curvae, casu $X = x$ curvam inventam fore *Catenariam*, si quidem ejus centrum gravitatis infimum occupat locum inter omnes alias curvas isoperimetricas; at vero si fuerit $X = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita ut $\partial y = \frac{a \partial x \sqrt{x}}{\sqrt{1 - mmaax}}$ et $\partial z = \frac{na \partial x \sqrt{x}}{\sqrt{(1 - mmaax)}}$, manifestum est curvam inventam esse *Brachystochronam*.

Problema IV.

Invenire lineam curvam per ternas coordinatas x, y *et* z *determinandam, in qua haec formula integralis:*

$$\int \sqrt{(xx + yy + zz)(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$$

maximum minimumve adipiscatur valorem.

Solutio.

22. Ponamus brevitatis gratia $\sqrt{xx + yy + zz} = v$ et $\sqrt{1 + pp + qq} = s$, ita ut nostra formula integralis evadat $\int V \partial x$, existente $V = vs$, ideoque $\partial V = s \partial v + v \partial s$; at vero erit $\partial v = \frac{x \partial x + y \partial y + z \partial z}{v}$ et $\partial s = \frac{p \partial p + q \partial q}{s}$, unde sequitur fore $M = \frac{sx}{p}$; $N = \frac{sy}{v}$; $N' = \frac{sz}{v}$; $P = \frac{vp}{s}$; $P' = \frac{vq}{s}$.

23. Hinc igitur, cum fiat:

$$S = V - Pp - P'q = \frac{v(ss - pp - qq)}{s} = \frac{v}{s},$$

ternae aequationes nostrae erunt:

I. $\frac{sx \partial x}{v} = \partial . \frac{v}{s}$, II. $\frac{sy \partial x}{v} = \partial . \frac{vp}{s}$ et III. $\frac{sz \partial x}{v} = \partial . \frac{vq}{s}$.

Ex quibus solutionem nostri problematis elici oportet, id quod plurimam solertiam atque insignia calculi artificia postulat.

24. Cum sit $\partial . \frac{pv}{s} = \frac{v \partial p}{s} + p . \partial . \frac{v}{s}$ et $\partial . \frac{qv}{s} = \frac{v \partial q}{s} + q . \partial . \frac{v}{s}$, ob $\partial . \frac{v}{s} = \frac{s x \partial x}{v}$, facta hac substitutione solutio perducetur ad has duas aequationes:

$$\text{I.} \quad (y \partial x - x \partial y) = \frac{v^2 \partial p}{ss},$$
$$\text{II.} \quad (z \partial x - x \partial z) = \frac{v v \partial q}{ss},$$

quamobrem videamus, quibusnam artificiis hinc formulas integrabiles elicere queamus, quandoquidem hae aequationes manifesto sunt differentiales secundi gradus, ob $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial x}$.

25. Harum aequationum altera per alteram divisa praebet $\frac{y \partial x - x \partial y}{z \partial x - x \partial z} = \frac{\partial p}{\partial q}$, unde nascitur haec aequatio:

$$\frac{\partial p}{y \partial x - x \partial y} = \frac{\partial q}{z \partial x - x \partial z}, \text{ sive } \frac{\partial p}{y - px} = \frac{\partial q}{z - qx}.$$

Quodsi jam haec aequatio ita referatur: $-\frac{x \partial p}{y - px} = \frac{x \partial q}{z - qx}$, facile patet in utraque fractione numeratorem esse ipsum differentiale denominatoris, ideoque fore:

$$l\,\overline{y - px} = l\,\overline{z - qx} - l n,$$

unde habebimus $z - qx = n(y - px)$, ita ut hinc jam determinetur z per reliquas litteras.

26. Substituatur nunc iste valor loco $z - qx$ in nostra aequatione differentiali, prodibitque $\partial y = n \partial p$, con-

Digitized by Google

sequenter $q = np + a$, hincque porro integrando fit $z = ny + ax + b$, quae aequatio cum unicam habeat dimensionem, indicat totam curvam, quam quaerimus, in certo quodam plano existere.

27. Hic autem probe notandum est in postrema aequatione inventa constantem additam b per praecedentia jam determinari. Cum enim invenerimus $z - qx = ny - npx$, ob $q = np + a$ erit $z = ny + ax$. Nunc igitur habemus $v = \sqrt{(xx + yy + (ny + ax)^2)}$ et $s = \sqrt{(1 + pp + (np + a)^2)}$, ita ut jam quaestio perducta sit ad binas tantum variabiles x et y, propter $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, quarum relatio petenda est ex altera aequationum principalium: $y \partial x - x \partial y = \frac{vv \partial p}{ss}$, quae, substitutis pro v et s valoribus, transformatur in hanc:

$$\frac{y \partial x - x \partial y}{xx + yy + (ny + ax)^2} = \frac{\partial p}{1 + pp + (np + a)^2},$$

cujus prius membrum, posito $y = ux$, induit hanc formam:

$$\frac{-\partial u}{1 + uu + (nu + a)^2} = \frac{\partial p}{1 + pp + (np + a)^2},$$

ita ut adepti simus aequationem differentialem separatam, cujus adeo bina membra perfecte sunt similia, ita ut alterutrum tantum integrasse sufficiat.

28. Incipiamus igitur a membro posteriori, quod evolutum fit $\frac{\partial p}{1 + aa + 2anp (nn + 1) pp}$ et quod ita referamus: $\frac{1}{1 + nn} \cdot \frac{\partial p}{pp + 2\alpha p + \beta}$, ut sit $\alpha = \frac{an}{1 + nn}$ et $\beta = \frac{1 + aa}{1 + nn}$, pro quo ponamus $p + \alpha = t$, sive $p = t - \alpha$, hincque istud membrum

evadet $\frac{1}{1+nn} \cdot \frac{\partial t}{tt-\alpha\alpha+\beta}$, cujus integrale erit:
$\frac{1}{(1+nn)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$. Arc. tg. $\frac{t}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$, sive $\frac{1}{(1+nn)\sqrt{(\beta-\alpha\alpha)}}$ Arc. tg. $\frac{p+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$.
Eodemque modo, loco p scribendo u, prioris membri integrale est $\frac{-1}{(1+nn)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$ Arc. tg. $\frac{u+\alpha}{\sqrt{(\beta-\alpha\alpha)}}$.

29. Hinc igitur integrale postremae nostrae aequationis, ob coëfficientes communes, erit:

$$C - \text{Arc. tg.} \frac{u+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}} = \text{Arc. tg.} \frac{p+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}},$$

sive summa horum duorum arcuum aequatur quantitati constanti, consequenter etiam tangens summae horum duorum arcuum debet esse constans, quae est: $\frac{(p+u+2\alpha)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}{\beta-2\alpha\alpha-\alpha(p+u)-pu} = C$, unde aequatio ita poterit repraesentari:

$$pu + \alpha(p+u) + 2\alpha\alpha - \beta = C(p+u+2\alpha), \quad \text{sive}$$
$$pu - \beta = f\,(p+u+2\alpha).$$

Quod si hic loco α et β valores assumtos restituamus, qui erant $\alpha = \frac{an}{1+nn}$ et $\beta = \frac{1+aa}{1+nn}$, aequatio nostra erit:

$$(1+nn)pu - aa - 1 = f((1+nn)(p+u) + 2an).$$

Ubi notandum est esse $u = \frac{y}{x}$ et $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, ita ut haec aequatio adhuc sit differentialis. Ad eam integrandam, cum posuerimus $y = ux$ et $\partial y = p\partial x$, erit $p\partial x = u\partial x + x\partial u$, unde colligitur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$. Nunc vero ex postrema aequatione inventa valorem ipsius p per u definire licet, quo invento aequatio differentialis $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$ est separata, cujus ergo integratio nulla laborat difficultate. Inde igitur

x exprimetur per certam functionem ipsius $u = \frac{y}{x}$, quae ergo erit aequatio inter x et y; at vero pro coordinata z jam vidimus esse $z = ny + \alpha x$, sicque solutio hactenus tradita est perfecta.

30. Commode autem hic evenit, ut hoc algebraice expediri queat. Cum enim sit $p = \frac{\mathfrak{G} + f(u + 2\alpha)}{u - f}$, facta substitutione repetitur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u (u - f)}{\mathfrak{G} + 2\alpha f + 2fu - uu}$, cujus integrale manifesto est: $lx = C - \frac{1}{2} l(\mathfrak{G} + 2\alpha f + 2fu - uu)$, unde sumtis numeris erit $x\sqrt{\mathfrak{G} + 2\alpha f + 2fu - uu} = g$. Denique si hic loco u scribamus $\frac{y}{x}$, prodit ista aequatio:

$$\mathfrak{G}xx + 2\alpha fxx - 2fxy - yy = gg;$$

unde adeo patet hanc projectionem esse sectionem conicam. Ac si hic loco y scribamus $\frac{z - \alpha x}{n}$, obtinetur aequatio inter x et z, pro altera projectione, quae ergo etiam erit pro sectione conica. Hinc intelligitur hoc problema, quod difficillimum videbatur, ad solutionem simplicissimam esse perductum.

Problema V.

Posito $\sqrt{(xx + yy + zz)} = v$, *si fuerit* w *functio quaecunque ipsius* v, *invenire curvam per ternas coordinatas* x, y *et* z *definiendam, in qua haec formula integralis:* $\int w\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ *maximum minimumve valorem obtineat.*

Solutio.

31. Facto igitur $\partial y = p \partial x$ et $\partial z = q \partial x$, positoque $\sqrt{(1 + pp + qq)} = s$, erit formula nostra Maximi $\int ws \partial x$, ideoque $V = ws$; tum vero, posito $\partial w = w' \partial v$, ob $\partial v = \frac{x \partial x + y \partial y + z \partial z}{v}$ et $\partial s = \frac{p \partial p + q \partial q}{s}$, erit $\partial V = s w' \frac{(x \partial x + y \partial y + z \partial z)}{v} + \frac{w (p \partial p + q \partial q)}{s}$. Hinc ergo habebimus: $M = \frac{w' s x}{v}$; $N = \frac{w' s y}{v}$; $N' = \frac{w' s z}{v}$; $P = \frac{wp}{s}$; $P' = \frac{wq}{s}$. Ex his porro colligitur:

$$S = \frac{w (ss - pp - qq)}{s} = \frac{w}{s}.$$

32. Ternae ergo aequationes, ex quibus solutionem peti oportet, erunt:

$$\text{I. } \frac{w' s x \partial x}{v} = \partial . \frac{w}{s},$$
$$\text{II. } \frac{w' s y \partial x}{v} = \partial . \frac{wp}{s},$$
$$\text{III. } \frac{w' s z \partial x}{v} = \partial . \frac{wq}{s}.$$

Hinc igitur cum sit: $\partial . \frac{wp}{s} = \frac{w \partial p}{s} + p . \partial . \frac{w}{s}$ et

$$\partial . \frac{wq}{s} = \frac{w \partial q}{s} + q . \partial . \frac{w}{s},$$

si hic loco $\partial . \frac{w}{s}$ scribatur ejus valor ex I. aequatione $\frac{w' s x \partial x}{v}$, nanciscemur binas sequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{w' s}{v} (y \partial x - x \partial y) = \frac{w \partial p}{s},$$
$$\text{II. } \frac{w' s}{v} (z \partial x - x \partial z) = \frac{w \partial q}{s},$$

quae sub forma sequente repraesententur:

$$\text{I. } \frac{y \partial x - x \partial y}{vv} = \frac{w \partial p}{w' v s s} \text{ et}$$
$$\text{II. } \frac{z \partial x - x \partial z}{vv} = \frac{w \partial q}{w' v s s},$$

haeque sunt binae aequationes, ex quibus solutionem desideratam derivare debemus.

33. Primo igitur harum aequationum alteram per alteram dividamus, et habebimus $\frac{z\partial x - x\partial z}{y\partial x - x\partial y} = \frac{\partial y}{\partial p}$, unde, ob $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = q\partial x$, deducimus hanc aequationem: $\frac{\partial q}{z - qx} = \frac{\partial p}{y - px}$, ita ut sit $\frac{-x\partial q}{z - qx} = \frac{-x\partial p}{y - px}$; ubi, cum numeratores sint differentialia denominatorum, integratio statim praebet $z - qx = m(y - px)$. Hoc valore substituto aequatio illa differentialis praebet $\partial q = m\partial p$, hincque integrando erit $q = mp + n$, qui valor in illa integrata substitutus praebet $z = my + nx$, quae, cum coordinatae unicam tantum obtineant dimensionem, indicat totam curvam satisfacientem in eodem plano esse sitam. Hinc igitur jam ex nostris aequationibus principalibus binas quantitates z et q elidere poterimus, unde fiet:

$$vv = xx + yy + (my + nx)^2 \text{ et}$$
$$ss = 1 + pp + (mp + n)^2,$$

sicque unica tantum restabit aequatio resolvenda, scilicet: $\frac{y\partial x - x\partial y}{vv} = \frac{w\partial p}{w'vss}$, in qua ante omnia statuamus $y = ux$, ut ea transfundatur in hanc formam:

$$\frac{-\partial u}{1 + uu + (mu + n)^2} = \frac{w\partial p}{w'v[1 + pp + (mp + n)^2]},$$

quae, posito brevitatis gratia $\frac{w}{w'v} = r$, ita repraesentetur:

$$\frac{\partial u}{1 + uu + (mu + n)^2} + \frac{r\partial p}{1 + pp + (mp + n)^2} = 0,$$

in qua ergo binae formulae differentiales inter se prorsus similes continentur.

34. Evidens autem est integrationem utriusque partis, omissa scilicet littera r, ad certum arcum circularem reduci. Hanc ob rem hos ipsos angulos in calculum introducamus, ponendo: $\frac{\gamma \partial u}{1 + uu + (mu + n)^2} = \partial \Phi$ et
$$\frac{\gamma \partial p}{1 + pp + (mp + n)^2} = \partial \psi.$$
Sicque aequatio nostra ad hanc formam simplicissimam reducetur: $\partial \Phi + r \partial \psi = 0$. Totum igitur negotium huc redit, quemadmodum hanc aequationem tractari atque ad integrabilitatem reduci oporteat. Evidens autem est hanc aequationem differentialia secundi gradus involvere.

35. Facile quidem patet angulum Φ ita esse comparatum, ut ejus tangens tali forma: $\alpha u + \beta$ exprimatur; quare si statuamus tg. $\Phi = \alpha u + \beta$, erit $\partial \Phi = \frac{\alpha \partial u}{1 + (\alpha u + \beta)^2}$. Haec jam forma cum proposita comparetur, ut inde valores litterarum α et β, una cum γ, per litteras m et n determinentur, id quod fiet hanc aequationem:
$$\alpha (1 + uu + (mu + n)^2) = \gamma (1 + (\alpha u + \beta)^2),$$
identicam reddendo. Hunc in finem cum facta evolutione sequens oriatur aequatio:
$$\alpha (mm + 1) uu + 2 \alpha mnu + \alpha (nn + 1) = \alpha \alpha \gamma uu + 2 \gamma \alpha \beta u + \gamma (\beta \beta + 1),$$
inde tres sequentes elicimus determinationes:
1°. $\alpha \gamma = mm + 1$; 2°. $\beta \gamma = mn$; 3°. $\gamma (\beta \beta + 1) = \alpha (nn + 1)$;
ex quarum prima colligitur $\alpha = \frac{mm + 1}{\gamma}$; ex secunda $\beta = \frac{mn}{\gamma}$, qui valores in tertia substituti dant $\gamma \gamma = mm + nn + 1$,

Digitized by Google

ideoque $\gamma = \sqrt{mm + nn + 1}$, hincque $\alpha = \frac{mm+1}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$ et $\beta = \frac{mn}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$.

36. Postquam igitur litteras α, β, γ per m et n determinaverimus, erit tg. $\Phi = \alpha u + \beta$. Deinde cum supra invenerimus:

$$1 + uu + (mu + n)^2 = \tfrac{\gamma}{\alpha}(1 + (\alpha u + \beta)^2),$$

si loco u valorem $\frac{y}{x}$ restituamus, prodibit:

$$xx + yy + (my + nx)^2 = \tfrac{\gamma}{\alpha}(xx + (\alpha y + \beta x)^2),$$

ubi prius membrum est ipse valor ipsius vv, unde ergo sequitur fore: $xx + (\alpha y + \beta x)^2 = \frac{\alpha}{\gamma} vv = \frac{(mm+1)\,vv}{mm+nn+1}$. Praeterea vero habebimus tg. $\Phi = \frac{\alpha y + \beta x}{x}$; unde si loco $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mm+1}{mm+nn+1}$ scribamus $\delta\delta$, ut sit $xx + (\alpha y + \beta x)^2 = \delta\delta vv$, erit sin. $\Phi = \frac{\alpha y + \beta x}{\delta v}$ et cos. $\Phi = \frac{x}{\delta v}$, hincque porro:

$$\alpha y + \beta x = \delta v \sin. \Phi \quad \text{et} \quad x = \delta v \cos. \Phi,$$

existente $\delta = \sqrt{\frac{mm+1}{mm+nn+1}}$. Hinc patet, si modo angulus Φ daretur per v, tam x quam y per eandem quantitatem v expressum iri, sicque totum problema perfecte solutum fore.

37. Simili vero modo, cum posuerimus $\partial\psi = \frac{\gamma\partial p}{1+pp+(mp+n)^2}$, statui poterit tg. $\psi = \alpha p + \beta$, ubi litterae α, β, γ pristinos retinebunt valores, eritque etiam ut ante:

$$1 + (\alpha p + \beta)^2 = \tfrac{\alpha}{\gamma}(1 + pp + (mp + n)^2 = \tfrac{\alpha}{\gamma} ss;$$

tum vero aequatio principalis resolvenda est: $\partial\Phi + r\partial\psi = 0$, existente $r = \frac{w}{w'v}$, ita ut sit $\partial\psi + \frac{w'v\partial\Phi}{w} = 0$.

38. Quoniam autem in formulis praecedentibus adhuc litterae x et y insunt, pro determinanda relatione inter v et Φ eas ex calculo excludi conveniet, quod commodissime praestabitur ope aequationum $\alpha y + \beta x = \delta v \sin.\Phi$ et $x = \delta v \cos.\Phi$, quae differentiatae praebent:

$$\alpha \partial y + \beta \partial x = \delta (\partial v \sin.\Phi + v \partial \Phi \cos.\Phi) \quad \text{et}$$

$$\partial x = \delta (\partial v \cos.\Phi - v \partial \Phi \sin.\Phi),$$

quarum illa per hanc divisa, ob $\partial y = p \partial x$, praebet:

$$\alpha p + \beta = \frac{\partial v \sin.\Phi + v \partial \Phi \cos.\Phi}{\partial v \cos.\Phi - v \partial \Phi \sin.\Phi}.$$

Vidimus autem esse $\alpha p + \beta = \text{tg.}\psi$, ideoque erit nunc:

$$\text{tg.}\psi = \frac{\partial v \sin.\Phi + v \partial \Phi \cos.\Phi}{\partial v \cos.\Phi - v \partial \Phi \sin.\Phi}.$$

39. In hujus aequationis resolutione praecipuum artificium consistit. Si scilicet statuamus $v \partial \Phi = t \partial v$, ut oriatur haec aequatio:

$$\text{tg.}\psi = \frac{\sin.\Phi + t \cos.\Phi}{\cos.\Phi - t \sin.\Phi} = \frac{\text{tg.}\Phi + t}{1 - t\,\text{tg.}\Phi},$$

haec postrema formula manifesto exprimit tangentem summae duorum angulorum, quorum alter est Φ, alterius vero tangens $= t$, sicque horum angulorum summa aequabitur ipsi angulo ψ, ita ut jam sit $\psi = \Phi + \text{Arc. tg.}\, t$, quae aequatio differentiata dat $\partial \psi = \partial \Phi + \frac{\partial t}{1 + tt}$, qui valor in nostra aequatione principali substitutus praebet $\frac{w' v \partial \Phi}{w} + \partial \Phi + \frac{\partial t}{1+tt} = 0$, quo quidem parum lucrati videmur, quandoquidem haec aequatio, ob $t = \frac{v \partial \Phi}{\partial v}$, adhuc differentialia secundi gradus involvit, atque adeo tres veriabilis v, Φ et t implicat, quas

Digitized by Google

quidem ad duas revocare liceret, si loco t valorem assumtum $\frac{v\partial\Phi}{\partial v}$ scribere vellemus, quo autem facto in aequationem maxime perplexam incideremus.

40. At vero quoniam posuimus $\frac{v\partial\Phi}{\partial v}=t$, sumamus potius valorem $\partial\Phi=\frac{t\partial v}{v}$, qui in nostram aequationem introductus praebet $\frac{w't\partial v}{w}+\frac{t\partial v}{v}+\frac{\partial t}{1+tt}=0$, haecque aequatio per t divisa, ob $w'\partial v=\partial w$, induit hanc formam pulcherrimam: $\frac{\partial w}{w}+\frac{\partial v}{v}+\frac{\partial t}{t(1+tt)}=0$, cujus integratio nulla prorsus laborat difficultate. Cum enim sit $\int\frac{\partial t}{t(1+tt)}=l\frac{t}{\sqrt{1+tt}}$, aequatio nostra integralis erit: $\frac{wvt}{\sqrt{1+tt}}=C$, hocque modo jam unam integrationem absolvimus, ita ut unica tantum nobis adhuc peragenda relinquatur.

41. Ex hac jam aequatione eliciamus valorem ipsius t, qui reperitur $=\frac{C}{\sqrt{wwvv-CC}}$, unde cum sit $t=\frac{v\partial\Phi}{\partial v}$, hinc colligimus fore $\partial\Phi=\frac{C\partial v}{v\sqrt{(wwvv-CC)}}$, quae est aequatio finalis totum negotium absolvens. Cum enim w sit functio ipsius v, hinc angulus Φ per quantitatem v expressus reperitur, qui novam constantem recipiet, ita ut jam in calculo habeamus quatuor constantes arbitrarias, scilicet, praeter hanc novam, istas tres C, m et n, siquidem erat, ut vidimus, $\alpha=\frac{mm+1}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$; $\beta=\frac{mn}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$; $\gamma=\sqrt{mm+nn+1}$; $\delta=\sqrt{\frac{mm+1}{mm+nn+1}}$. Unde patet nostram solutionem penitus esse completam, propterea quod initio deducti fui-

mus ad duas aequationes differentiales secundi gradus, quarum ergo integralia completa necessario quatuor constantes arbitrarias postulant.

42. Postquam autem determinatus fuerit angulus Φ, pro quovis valore litterae v ternae coordinatae x, y et z per sequentes formulas facillime definiuntur:

I. $x = \delta v \cos. \Phi$,

II. $\alpha y + \beta x = \delta v \sin. \Phi$,

III. $z = my + nx$.

Caeterum statim atque invenerimus totam curvam in eodem plano esse sitam, potuissemus solutionem multo faciliorem adornare. Tantum enim planum principale AOB, cujus positio ab arbitrio nostro pendet, in ipso plano curvae satisfacientis accipere licuisset, unde statim habuissemus $z = 0$, ideoque etiam $q = 0$, quo pacto tota quaestio ad binas tantum variabiles fuisset reducta, et methodo communi resolvi potuisset. Verum praeterquam quod nostra solutio nobis hanc ipsam proprietatem declaravit, maxime operae pretium fuit insignia illa artificia, quae solutio postulat, accurate evolvere.

43. Interim tamen etiam ex ipsa formula integrali, quae Maximum Minimumve esse debet, statim concludere licuisset, curvam satisfacientem in eodem plano sitam esse debere, propterea quod ipsa haec formula integralis ad

Digitized by Google

duas tantum variabiles se reduci patitur. Cum enim quantitas $v = \sqrt{xx + yy + zz}$ in figura exprimat rectam OZ, cujus ergo littera w denotat functionem quamcunque, tum vero formula $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ referat ipsum elementum curvae, formula integralis proposita duas tantum variabiles, scilicet distantiam $OZ = v$ et arcum curvae involvit, hincque adeo istud problema sequenti modo proponi et resolvi potuisset, ut quaereretur in plano curva EZz, circa centrum C describenda, in qua, posita distantia $CZ = v$, Tab. I. Fig. 2.
cujus functio quaecunque sit w, haec formula integralis $\int w \partial s$ sit Maximum vel Minimum, denotante ∂s elementum curvae Zz.

44. Quo jam solutionem facillimam reddamus, atque ex vulgaribus principiis isoperimetricis commodissime repetere valeamus, designemus distantiam CZ littera x, tum vero, constituta recta fixa CD, ponatur angulus $DCZ = y$, fietque elementum curvae $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + xx \partial y^2}$; et cum jam w sit functio quaecunque ipsius x, formula integralis, quae Maximum Minimumve esse debeat, erit: $\int w \sqrt{(\partial x^2 + yy \partial y^2)}$, quae posito $\partial y = p \partial x$ induit hanc formam: $\int w \partial x \sqrt{1 + ppxx}$, ita ut hic sit $V = w \sqrt{1 + ppxx}$. Posito ergo in genere $\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p$, quia ipsa quantitas y hic non adest, erit $N = 0$ et $P = \frac{w x^2 p}{\sqrt{(1 + ppxx)}}$, littera autem

M plane in computum non ingreditur, cum aequatio pro curva quaesita sit $N\partial x = \partial P$, sive $\partial P = 0$, unde statim sequitur $P = \frac{wpxx}{\sqrt{(1+ppxx)}} = C$, quae ipsa aequatio naturam curvae jam declarat.

45. Ex hac autem aequatione elicimus $p = \frac{C}{x\sqrt{(wwxx-CC)}}$, sicque ob $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ erit $\partial y = \int \frac{C\partial x}{x\sqrt{wwx^2-CC}}$, quae aequatio perfecte cum ea congruit, quam ante per tantas ambages sumus consecuti, si modo loco x hic restituamus v, tum vero noster angulus, hic y vocatus, idem erit, quem ante designavimus littera Φ. Ex hoc exemplo intelligitur, quomodo saepenumero problemata in se difficillima per levem transformationem solutu facillima reddi queant.

Digitized by Google

INTEGRATIO GENERALIS AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM LINEARIUM CUJUSCUNQUE GRADUS

ET QUOTCUNQUE VARIABILES INVOLVENTIUM.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 28 Octobris 1779.

§. 1. Si fuerit functio quotcunque variabilium z, y, x, u, etc. determinanda ex aequatione differentiali cujuscunque gradus, in cujus singulis terminis quantitas V, cum suis differentialibus, unicam obtineat dimensionem, atque insupér coëfficientes singulorum terminorum fuerint constantes, tales aequationes hic voco lineares, et quemadmodum eas integrari oporteat, investigabo.

§. 2. Forma completa talium aequationum primo continebit ipsam quantitatem quaesitam V. Deinde occurrent differentialia primi gradus, quae sunt $(\frac{\partial V}{\partial z})$, $(\frac{\partial V}{\partial y})$, $(\frac{\partial V}{\partial x})$, etc. quorum ergo numerus est $= n$, siquidem n fuerit numerus variabilium z, y, x, u, etc. Sequuntur termini differentiales secundi gradus: $(\frac{\partial \partial V}{\partial z^2})$, $(\frac{\partial \partial V}{\partial z \partial y})$, $(\frac{\partial \partial V}{\partial y^2})$, $(\frac{\partial \partial V}{\partial z \partial x})$, etc. quorum numerus est $\frac{n(n+1)}{1.2}$. Terminorum

porro differentialium tertii gradus: $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right)$; $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^2 \partial y}\right)$; $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial z \partial y^2}\right)$; $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right)$; $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial x}\right)$; etc. numerus est $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; sicque porro. Atque hi singuli termini, per quantitates constantes multiplicati, exhibebunt generatim aequationem differentialem linearem cujuscunque gradus, cujus integrationem hic accuratius sum perscrutaturus.

§. 3. Tales ergo aequationes omnes in hac forma generali continebuntur:

$$\begin{aligned} o = A V &+ B \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) + C \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + D \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \text{etc.} \\ &+ E \left(\frac{\partial\partial V}{\partial z^2}\right) + F \left(\frac{\partial\partial V}{\partial y^2}\right) + G \left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) + H \left(\frac{\partial\partial V}{\partial z \partial y}\right) + I \left(\frac{\partial\partial V}{\partial z \partial x}\right) \\ &\qquad + K \left(\frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y}\right) + \text{etc.} \\ &+ L \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right) + M \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right) + \text{etc.} \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Huic autem formae satis constat satisfacere talem formam integralem: $V = e^{\alpha z + \beta y + \gamma x + \text{etc.}}$. Hinc enim erit:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) &= \alpha e \cdots; & \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) &= \beta e \cdots; \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) &= \gamma e \cdots; & \left(\frac{\partial\partial V}{\partial z^2}\right) &= \alpha\alpha e \cdots; \\ \left(\frac{\partial\partial V}{\partial y^2}\right) &= \beta\beta e \cdots; & \left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) &= \gamma\gamma e \cdots; \\ \left(\frac{\partial\partial V}{\partial z \partial y}\right) &= \alpha\beta e \cdots; & \left(\frac{\partial\partial V}{\partial z \partial x}\right) &= \alpha\gamma e \cdots; \\ \left(\frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y}\right) &= \beta\gamma e \cdots; & \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right) &= \alpha^3 e \cdots; \\ \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right) &= \beta^3 e \cdots; & \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right) &= \gamma^3 e \cdots; \end{aligned}$$

et ita porro; quibus substitutis, quia totam aequationem per $e^{\alpha z + \beta y + \gamma x \text{ etc.}}$ dividere licet, patet, litteras assumtas α, β, γ, etc. hac aequatione determinari debere:

$$\sigma = A + B\alpha + C\beta + D\gamma + \text{etc.}$$
$$+ E\alpha^2 + F\beta^2 + G\gamma^2 + H\alpha\beta + I\alpha\gamma + K\beta\gamma + \text{etc.}$$
$$+ L\alpha^3 + M\beta^3 + N\gamma^3 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

§. 4. Ex hac igitur aequatione, quam aequationis differentialis propositae *vicariam* appellare liceat, litterarum assumtarum α, β, γ, etc. quaelibet per reliquas, scilicet α per β, γ, etc. definiri poterit, idque tot modis, quoti gradus differentialis fuerit aequatio, ita ut hic reliquae litterae β, γ, etc. prorsus ab arbitrio nostro pendeant. Sic igitur singuli valores his litteris tributi praebebunt formulam determinatam $e^{\alpha z + \beta y + \gamma x + etc.}$, cujusmodi ergo formularum numerus prorsus erit infinitus, atque adeo eo altioris gradus, quo major fuerit numerus litterarum β, γ, etc. per quas primam α determinaverimus. Quod si ergo singulae istae formulae per coëfficientes constantes arbitrarios multiplicentur et in unam summam aggregentur, habebitur expressio maxime generalis, valorem quaesitum V exhibens, quam igitur tanquam integrale completum spectare licebit.

§. 5. Verum talis expressio, ob terminorum numerum infinities infinitum, hoc laborat incommodo, quod inde verus integralis valor perspici nequeat, quapropter porro erit investigandum, utrum talis expressio, in infinitum excurrens, non per certam formulam, seu functionem finitam, re-

praesentari possit, hocque commode succedet, quoties relationem inter litteras α, β, γ, etc. tali simplici formula $a\alpha + b\beta + c\gamma +$ etc. ... $+ k = 0$ exhibere licet, id quod evenit quando ista formula fuerit factor formae vicariae supra allatae (§. 3.); tum enim omnes illas formulas exponentiales, numero infinitas, per certas functiones repraesentare licebit, quemadmodum in sequentibus ostendemus.

§. 6. Cum forma vicaria ex ipsa aequatione proposita sit formata, evidens est quemadmodum vicissim ipsa aequatio ex forma vicaria derivari possit. Si enim formula: $k + a\alpha + b\beta + c\gamma +$ etc. fuerit factor formae vicariae, illi respondebit haec aequatio differentialis primi gradus: $kV + a\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) + b\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) +$ etc. $= 0$, cujus ergo integrale simul erit quoque integrale ipsius aequationis propositae. Ad hoc igitur investigandum statuamus in genere esse $\partial V = p\partial z + q\partial y + r\partial x +$ etc. ut ista aequatio in hanc abeat:

$$kV = ap + bq + cr + \text{etc.} = 0.$$

§. 7. Ex hac jam aequatione quaeramus valorem ipsius $p = -\frac{kV}{a} - \frac{bq}{a} - \frac{cr}{a} -$ etc., qui in illa formula assumta substitutus dabit:

$$\partial V = -\frac{kV\partial z}{a} + q\left(\partial y - \frac{b\partial z}{a}\right) + r\left(\partial x - \frac{c\partial z}{a}\right),$$

quae aequatio hoc modo repraesentetur:

Digitized by Google

$$\partial V + \frac{kV\partial z}{a} = q\left(\partial y - \frac{b\partial z}{a}\right) + r\left(\partial x - \frac{c\partial z}{a}\right),$$

cujus membrum sinistrum integrabile manifesto redditur, si ducatur in $e^{\frac{kz}{a}}$, siquidem ejus integrale erit $e^{\frac{kz}{a}}V$, sicque nostra aequatio ita se habebit:

$$\partial . e^{\frac{kz}{a}} V = e^{\frac{kz}{a}} \times q\left(\partial y - \frac{b\partial z}{a}\right) + e^{\frac{kz}{a}} \times r\left(\partial x - \frac{c\partial z}{a}\right).$$

Haud difficulter autem intelligitur, quantitates q et r semper ita accipi posse, ut membrum dextrum etiam integrationem admittat.

§. 8. Quod quo facilius appareat, statuamus $y - \frac{bz}{a} = s$ et $x - \frac{cz}{a} = t$, fietque nostra aequatio:

$$\partial . e^{\frac{kz}{a}} \times V = e^{\frac{kz}{a}} \times (q\partial s + r\partial t),$$

ubi membrum postremum in genere refert differentiale functionis cujuscunque binarum variabilium s et t, unde colligitur integrando formulam $e^{\frac{kz}{a}} V$ aequari functioni cuicunque binarum variabilium s et t, quam more jam recepto hoc modo repraesentemus: $\Gamma : (s, t)$; ergo loco s et t restitutis valoribus orietur iste valor:

$$V = e^{-\frac{kz}{a}} \Gamma : \overline{\left(y - \frac{bz}{a}\right), \left(x - \frac{cz}{a}\right)}.$$

Hic scilicet valor aequationi propositae convenit, quoties ejus forma vicaria factorem habuerit $k + a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}$

§. 9. Quodsi forma vicaria praeterea alium habeat factorem simplicem, qui sit $k' + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma +$ etc.

ex eo simili modo deducetur valor pro littera V, qui erit

$$V = e^{-\frac{k'z}{a'}} \Delta : \overline{(y - \tfrac{b'z}{a'}), (x - \tfrac{c'z}{a'})},$$

qui cum praecedente quomodocunque conjungi poterit. Atque si forma vicaria in meros factores simplices, numero n, resolvi se patiatur, qui sint $k + a\alpha + b\beta + c\gamma +$ etc.; $k' + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma +$ etc.; $k'' + a''\alpha + b''\beta + c''\gamma +$ etc.; etc., tum adeo integrale completum quantitatis V assignare poterimus, quod erit:

$$V = e^{-\frac{kz}{a}} \Gamma : \overline{(y - \tfrac{bz}{a}), (x - \tfrac{cz}{a})} + e^{-\frac{k'z}{a'}} \Delta : \overline{(y - \tfrac{b'z}{a'}), (x - \tfrac{c'z}{a'})}$$
$$+ e^{-\frac{k''z}{a''}} \Sigma : \overline{(y - \tfrac{b''z}{a''}), (x - \tfrac{c''z}{a''})} + \text{etc.}$$

ubi characteres Γ; Δ; Σ; etc. denotant functiones quascunque arbitrarias quantitatum subnexarum.

§. 10. Verum eadem integralia, per functiones expressa, ex formula initio assumta $V = e^{\alpha z + \beta y + \gamma x}$ derivari possunt. Cum enim factor formae nostrae vicariae: $k + a\alpha + b\beta + c\gamma +$ etc. $= 0$ praebeat $\alpha = -\frac{k}{a} - \frac{b\beta}{a} - \frac{c\gamma}{a} -$ etc., exponens ipsius e erit $-\frac{kz}{a} + \beta(y - \frac{bz}{a}) + \gamma(x - \frac{cz}{a})$, qui, posito ut ante brevitatis gratia $y - \frac{bz}{a} = s$ et $x - \frac{cz}{a} = t$, erit $-\frac{kz}{a} + \beta s + \gamma t$, sicque habebitur:

$$V = e^{-\frac{kz}{a} + \beta s + \gamma t} = e^{-\frac{kz}{a}} \cdot e^{\beta s} \cdot e^{\gamma t};$$

ubi probe notandum est litteras β et γ omnes possibiles valores recipere, ita ut $e^{\beta s}$ complectatur summam omnium

Digitized by Google

ejus valorum, qui ex littera β oriri possunt, atque adeo omnes isti valores per quantitates constantes quascunque multiplicati sunt intelligendi. Aggregatum igitur omnium horum infinitorum valorum per $\int e^{\beta s}$ designemus. Similique modo $\int e^{\gamma t}$ omnes valores possibiles, qui ex variatione litterae γ nasci possunt, complectatur.

§. 11. Jam haud difficulter intelligitur, istam formam $\int e^{\beta s}$ omnes plane functiones ipsius s exhibere posse. Quod quo clarius appareat ponamus $s = lp$, fietque $e^{\beta s} = p^{\beta}$ et $\int e^{\beta s} = \int p^{\beta}$. Notum autem est, omnes functiones ipsius p resolvi posse in series, quarum termini procedant secundum potestates ipsius p, sicque formula $\int p^{\beta}$ complectitur omnes valores possibiles ipsius p, ideoque etiam omnes functiones ipsius s, quas ergo hoc charactere $\Gamma : s$ repraesentare licet. Simili modo, posito $t = lq$, patet $\int e^{\gamma t}$ aequivalere huic functioni: $\Delta : t$.

§. 12. Praeterea, quia singulas partes utriusque functionis in se multiplicare licet, manifestum est formulam $e^{\beta s + \gamma t} + 1$ non solum productum functionis ipsius s et functionis ipsius t indicare, sed etiam omnes plane functiones utcunque ex binis quantitatibus s et t formatas involvere, quam ergo expressionem hoc charactere: $\Gamma : s, t$ repraesentamus. Hinc igitur, cum sit $s = y - \frac{bz}{a}$ et

$t = x - \frac{cz}{a}$, erit, uti ante per integrationem collegimus:

$$V = e^{-\frac{bz}{a}} \Gamma : \overline{(y - \frac{bz}{a}), (x - \frac{cz}{a})}.$$

§. 13. Hoc autem modo per functiones integralia hujusmodi aequationum differentialium exprimere non licet, nisi quatenus earum forma vicaria factores simplices comprehendit. Nisi enim hoc eveniat, integralia aliter exhiberi nequeunt, nisi omnia integralia particularia, quae ex formula $e^{\alpha z + \beta y + \gamma x + etc.}$ oriuntur, in unam summam colligendo. Quod quo clarius appareat, consideremus istum casum specialem: $(\frac{\partial \partial V}{\partial z^2}) = (\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y})$, cujus forma vicaria est $\alpha\alpha = \beta\gamma$, quae certe in factores simplices nullo modo resolvi potest. Hinc autem fit $\alpha = \sqrt{\beta\gamma}$, ideoque $V = e^{z\sqrt{\beta\gamma} + \beta y + \gamma x}$, ubi binis litteris β et γ omnes possibiles valores tribui sunt censendae, quas autem nullo modo sub quapiam functione definita complecti licet. Quo hoc clarius appareat ponamus $z = lp$, $y = lq$ et $x = lr$, ut fiat $V = p^{\sqrt{\beta\gamma}} q^{\beta} r^{\gamma}$. Quod si jam hic litteris α, β, γ, tantum valores integros tribuantur, prodibit talis aequatio:

$$V = \mathfrak{A} pqr + \mathfrak{B} p^{\sqrt{2}} q^2 r + \mathfrak{C} p^{\sqrt{3}} q^3 r + \text{etc.}$$

quos diversos terminos sub nulla certa functione complecti licet.

§. 14. Interim tamen, si aequatio vicaria resolutionem in duos factores, etsi non simplices, admittat, tum

integrale aequationis propositae ad integrationem duarum aequationum inferioris gradus reducitur. Quodsi enim aequatio differentialis proposita ascendat ad gradum differentialium $m = \mu + \nu$, ejusque forma vicaria habeat duos factores, alterum gradus μ, alterum vero gradus ν, si ex his vicissim formentur aequationes differentiales, altera ad gradum μ, altera ad gradum ν assurget. Ponamus ergo integrationem prioris praebere $V = P$, posterioris vero $V = Q$, atque manifestum est, ipsius aequationis propositae integrale fore $AP + BQ$; atque adeo, si illa integralia fuerint completa, etiam hoc erit completum.

§. 15. Quae hactenus sunt tradita, proprie quidem ad functiones trium variabilium z, y, x, sunt accomodata: facile autem intelligitur, eadem praecepta pariter locum obtinere tam pro paucioribus, quam pro pluribus variabilibus.

OBSERVATIONES CIRCA FRACTIONES CONTINUAS IN HAC FORMA CONTENTAS:

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 18. Novembris 1779.

I. Cum plures adhuc inventae sint methodi ad fractiones continuas deveniendi, earumque vicissim valores assignandi; nulla tamen earum ita est comparata, cujus ope valores earum fractionum continuarum, quae in hac forma sunt contentae, investigari queant, unico casu excepto, quo $n = 1$. Memini enim a me jam olim istius formae:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

valorem inventum esse $= \frac{1}{e - 1}$, denotante e numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est unitas, id quod mihi quidem eo magis mirum videtur, quod reliquis casibus omnibus, quibus n est numerus integer positivus, summa

Digitized by Google

adeo per numeros rationales exprimi queat; quamobrem mea investigatio super hoc argumento, qua istas summas inveni, plurimum lucis allatura videtur ad hanc doctrinam summi momenti uberius excolendam.

II. Quo indolem hujus formae accuratius perscrutari liceat, eam sequentibus formulis sum complexus:

$$S = \frac{n}{1 + A},$$
$$A = \frac{n + 1}{2 + B},$$
$$B = \frac{n + 2}{3 + C},$$
$$C = \frac{n + 3}{4 + D},$$
etc.

ex quibus vicissim sequentes derivantur:

$$A = \frac{n}{S - 1},$$
$$B = \frac{n + 1}{A} - 2,$$
$$C = \frac{n + 2}{B} - 3,$$
$$D = \frac{n + 3}{C} - 4,$$
etc.

III. Hinc jam facile patet semper esse:

$$S < \frac{n}{1}; \quad A < \frac{n+1}{2}; \quad B < \frac{n+2}{3}; \quad C < \frac{n+3}{4} \text{ etc.}$$

Quodsi jam in prima formula loco A scribatur valor $\frac{n+1}{2}$, qui est valde magnus, tum fractio $\frac{n}{1+A}$ erit nimis parva, ideoque erit $S > \frac{n}{1+\frac{n+1}{2}}$, sive erit $S > \frac{2n}{n+3}$. Simili modo circa sequentes formulas ratiocinando fiet:

$$A > \cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3}}, \text{ sive } A > \frac{3(n+1)}{n+8};$$

$$B > \cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4}}, \text{ sive } B > \frac{4(n+2)}{n+15};$$

$$C > \cfrac{n+3}{4+\cfrac{n+4}{5}}, \text{ sive } C > \frac{5(n+3)}{n+24};$$

$$D > \cfrac{n+4}{5+\cfrac{n+5}{6}}, \text{ sive } D > \frac{6(n+4)}{n+35}.$$

Conveniet autem has formulas conspectui clarius exponi.

Tabula I.		Tabula II.	
$S = \frac{n}{1+A}$	$A = \frac{n}{S} - 1$	$S < \frac{n}{1}$	$S > \frac{2n}{n+3}$
$A = \frac{n+1}{2+B}$	$B = \frac{n+1}{A} - 2$	$A < \frac{n+1}{2}$	$A > \frac{3(n+1)}{n+8}$
$B = \frac{n+2}{3+C}$	$C = \frac{n+2}{B} - 3$	$B < \frac{n+2}{3}$	$B > \frac{4(n+2)}{n+15}$
$C = \frac{n+3}{4+D}$	$D = \frac{n+3}{C} - 4$	$C < \frac{n+3}{4}$	$C > \frac{5(n+3)}{n+24}$
$D = \frac{n+4}{5+E}$	$E = \frac{n+4}{D} - 5$	$D < \frac{n+4}{5}$	$D > \frac{6(n+4)}{n+35}$
$E = \frac{n+5}{6+F}$	$F = \frac{n+5}{E} - 6$	$E < \frac{n+5}{6}$	$E > \frac{7(n+5)}{n+48}$
$F = \frac{n+6}{7+G}$		$F < \frac{n+6}{7}$	$F > \frac{8(n+6)}{n+63}$

IV. Ope harum tabularum facile erit, assumto pro S valore quocunque, dignoscere, utrum is sit veritati consentaneus, nec ne? Quodsi enim inde, ex primae tabulae secunda columna, quaerantur valores A, B, C etc. statim atque eorum aliquis extra limites in secunda tabula assignatos cadat, id certum erit signum valorem assumtum esse falsum, ideoque vel nimis magnum vel nimis parvum; hocque modo, plures pro S valores fingendo, continuo pro-

Digitized by Google

pius ad verum valorem accedere licebit. His igitur observationibus utamur ad quosdam casus simpliciores evolvendos.

Evolutio casus quo $n = 2$, ideoque

$$S = \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{5}{4 + \cfrac{6}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

V. Pro hoc igitur casu limites erunt $S < \frac{2}{1}$ et $S > \frac{4}{5}$; $A < \frac{3}{2}$ et $A > \frac{9}{10}$; $B < \frac{4}{3}$ et $B > \frac{16}{17}$; $C < \frac{5}{4}$ et $C > \frac{25}{26}$; $D < \frac{6}{5}$ et $D > \frac{36}{37}$ etc. Sumamus igitur $S = 1$, atque si inde sequentium litterarum valores deducantur, reperiemus $A = 1$; $B = 1$; $C = 1$; $D = 1$ etc. qui valores cum omnes intra assignatos limites cadant, id certum est signum valorem assumtum $S = 1$ veritati esse consentaneum, quod quidem facile ex ipsa forma perspicere licuisset.

Evolutio casus quo $n = 3$ et

$$S = \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{7}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

VI. Hoc ergo casu limites nostri erunt:

$S < \frac{3}{1}$; $S > 1$,
$A < 2$; $A > \frac{12}{11}$,
$B < \frac{5}{3}$; $B > \frac{20}{18}$,

$$C < \tfrac{6}{4};\quad C > \tfrac{30}{27},$$
$$D < \tfrac{7}{5};\quad D > \tfrac{42}{38},$$
etc.

Hinc jam statim patet non esse $S = 2$; foret enim $A = \frac{1}{2}$, quod excluditur. Sumto $S = \frac{3}{2}$, fit $A = 1$, qui valor etiam extra limites cadit. Sumatur igitur $S = \frac{4}{3}$ et prodibit $A = \frac{5}{4}$, qui valor jam intra limites cadit; hinc ergo fiet $B = \frac{6}{5}$; $C = \frac{7}{6}$; $D = \frac{8}{7}$; $E = \frac{9}{8}$; $F = \frac{10}{9}$ etc., qui valores cum omnes intra limites praescriptos cadant, hoc certum est signum hujus fractionis continuae propositae verum valorem esse $S = \frac{4}{3}$.

VII. Commode hic usu venit, ut omnes valores litterarum S, A, B, C, D etc. manifesto ordine se insequantur, scilicet $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{8}{7}$ etc., quandoquidem termini harum fractionum progressionem arithmeticam constituunt. At vero ipsa rei natura postulat, ut hae litterae S, A, B, C, D etc. secundum legem quandam uniformem progrediantur, quemadmodum hoc casu prodiit progressio arithmetica, cujus differentiae primae sunt constantes; unde concludere licet, etiam pro reliquis casibus ejusmodi valores pro litteris S, A, B, C, D, prodire debere, qui differentiis continuo sumendis tandem ad differentias evanescentes perducant. Hoc observato relinquamus ipsi S suum valorem indefinitum, indeque computemus valores sequentium

Digitized by Google

litterarum: $A = \frac{3 - S}{S}$; $B = \frac{6S - 6}{3 - S}$; $C = \frac{33 - 23S}{6S - 6}$; $D = \frac{128S - 168}{33 - 23S}$ etc. Jam termini harum fractionum, scilicet denominatores, in hac serie progrediuntur: 1; S; 3 − S; 6S − 6; 33 − 23S; 128 S − 168. Hinc erunt:

Different. primae S − 1; 3 − 2S; 7S − 9; 39 − 29S; 151S − 201.
Different. secundae: 4 − 3S; 9S − 12; 48 − 36S; 180S − 240.
Different. tertiae: 12S − 16; 60 − 45S; 216 S − 288.

Hic statim patet differentias primas non evanescere, quia ex iis, nihilo aequatis, prodirent diversi valores pro S sequentes: 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{39}{29}$ etc. At vero si differentiae secundae nihilo aequentur, omnes praebent $S = \frac{4}{3}$, quem eundem valorem differentiae tertiae, et sequentes, nihilo aequatae, producunt, sicque certi esse possumus revera fore $S = \frac{4}{3}$.

Evolutio casus quo $n = 4$ et

$$S = \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{6}{3 + \cfrac{7}{4 + \text{etc.}}}}}$$

VIII. Hic statim adhibeamus methodum modo ante expositam, et ex valore indefinito S colligimus valores litterarum A, B, C, D etc. qui erunt:

$$A = \frac{4 - S}{S};\; B = \frac{7S - 8}{4 - S};\; C = \frac{48 - 27S}{7S - 8};\; D = \frac{157S - 248}{48 - 27S};$$
$$E = \frac{1624 - 1001S}{157S - 248}.$$

Jam termini harum formularum in seriem disponantur, et continuo differentiae capiantur, ut sequitur:

	1;	S;	4 − S;	7S − 8;	48 − 27S;	157S − 248;
D. I.		S − 1;	4 − 2S;	8S − 12;	56 − 34S;	184S − 296;
D. II.			5 − 3S;	10S − 16;	68 − 42S;	218S − 352;
D. III.				13S − 21;	84 − 52S;	260S − 420;
D. IV.					105 − 65S;	312S − 504.

Hic statim perspicuum est neque differentias primas, neque secundas, scopo satisfacere; quia ex iis, nihilo aequatis, diversi valores pro S essent produturi; at vero differentiae tertiae omnes dant $S = \frac{21}{13}$, qui ergo pro vero valore fractionis continuae propositae est habendus.

IX. Quo autem de hoc certiores reddamur, exploremus istum valorem $\frac{21}{13}$ per methodum primo indicatam, ex eoque computemus sequentes valores ope secundae columnae primae tabulae, sumendo $n = 4$, ut sequitur: $A = \frac{31}{21}$; $B = \frac{43}{31}$; $C = \frac{57}{43}$; $D = \frac{73}{57}$; $E = \frac{91}{73}$; qui valores omnes intra limites in tabula secunda datos cadere deprehenduntur. Praeterea vero egregium ordinem progressionis inter se servant, cum eorum termini crescant secundum differentias; 8, 10, 12, 14, 16 etc. quae scilicet binario continuo crescunt; cum contra quilibet alii valores pro S assumti ad valores ab-

Digitized by Google

surdos deducerent, qui mox extra limites praescriptos extravagarentur.

Evolutio casus, quo $n=5$ et

$$S = \cfrac{5}{1+\cfrac{6}{2+\cfrac{7}{3+\cfrac{8}{4+\text{etc.}}}}}$$

X. Applicemus hic etiam methodum ante usitatam, ac reperientur sequentes valores:

$$A=\frac{5-S}{S};\ B=\frac{8S-10}{5-S};\ C=\frac{65-31S}{8S-10};\ D=\frac{188S-340}{65-31S};$$
$$E=\frac{2285-1219S}{188S-340}.$$

Jam termini harum fractionum in seriem disponantur, et differentiae continuae sumantur hoc modo:

	1; S; 5—S; 8S—10; 65—31S; 188S—340; 2285—1219S;
D. I.	S—1; 5—2S; 9S—15; 75—39S; 219S—405; 2625—1407S;
D. II.	6—3S; 11S—20; 90—48S; 258S—480; 3030—1626S;
D. III.	14S—26; 110—59S; 306S—570; 3510—1884S;
D. IV.	136—73S; 365S—680; 4080—2190S.

XI. Hinc differentiae tertiae nondum negotium conficiunt, quia inde orirentur diversi valores pro S; at ex differentiis quartis omnibus idem eruitur valor $S=\frac{136}{73}$, qui ergo est verus valor fractionis continuae, quem si secundum primam methodum explorare velimus, egregie cum

limitibus praescriptis convenire deprehendetur. Casus autem jam evoluti, in ordinem digesti, erunt:

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$S = 1$	$S = \frac{4}{3}$	$S = \frac{21}{13}$	$S = \frac{136}{73}$.

XII. Quia autem inter hos valores nullus ordo observatur, et methodus, qua sumus usi, pro casibus sequentibus nimis taediosas calculi operationes requireret, alias methodos sum traditurus, quae meliori successu ad scopum optatum, etiam pro majoribus numeris loco n assumtis, perducant.

Methodus secunda summas harum serierum continuarum investigandi.

XIII. Quoniam vidimus valores litterarum S, A, B, C, D etc. semper secundum certam quandam legem uniformem progredi, dum litterae A, B, C, D valores exprimunt similium fractionum continuarum, vel uno, vel duobus, vel tribus membris truncatas, cum sit:

$$A = \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}; \quad B = \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \cfrac{n+4}{5 + \text{etc.}}}}; \quad C = \cfrac{n+3}{4 + \cfrac{n+4}{5 + \cfrac{n+5}{6 + \cfrac{n+6}{7 + \text{etc.}}}}}$$

nullum est dubium, quin etiam nostra formula proposita, retro continuata, similem legem uniformem sit secutura. Sin autem nostra forma uno gradu retro continuetur, prodibit $\frac{n-1}{0+S}$, quam vocemus $= \alpha$, ita ut sit $\alpha = \frac{n-1}{S}$. At si

Digitized by Google

duobus gradibus retro continuemus, erit $\frac{n-2}{-1+\alpha}=\beta$. Si simili modo ultro retrogrediamur, nanciscemur has formulas:

$$\frac{n-3}{-2+\beta}=\gamma;\ \frac{n-4}{-3+\gamma}=\delta;\ \frac{n-5}{-4+\delta}=\varepsilon;\ \frac{n-6}{-5+\varepsilon}=\zeta,$$

atque hic certo affirmare licet, inter has novas litteras.... ζ, ε, δ, γ, β, α.S.A.B etc. similem legem uniformitatis continuam deprehendi debere. Retro igitur hae formulae continuentur, donec perveniatur ad numeratorem $=0$, quo casu habebitur talis forma:

$$\cfrac{0}{-\lambda+\cfrac{1}{-\lambda+1+\cfrac{2}{-\lambda+2+\cfrac{3}{-\lambda+3+\text{etc.}}}}}$$

quae autem expressio, etiamsi numerator est $=0$, ideo non ipsa evanescere est censenda, quia evenire potest, ut etiam denominator evanescat. Atque hoc revera usu venit in nostris formis, quas sumus perscrutaturi; pro iis igitur erit:

$$0=-\lambda+\cfrac{1}{-\lambda+1+\cfrac{2}{-\lambda+2+\text{etc.}}}$$

quae ergo fractio continua si continuetur usque ad ipsam formam propositam S, inde elici poterit valor ipsius S, id quod pro singulis casibus ostendemus.

XIV. Sit igitur $n=2$, et forma fractionis continuae, retro continuatae, erit $-1+\frac{1}{0+S}$, quae ergo nihilo aequata dabit $S=1$, ut ante invenimus. Pro casu $n=3$ orietur haec aequatio: $0=-2+\cfrac{1}{-1+\cfrac{2}{0+S}}$, unde fit $2=\cfrac{1}{-1+\frac{2}{S}}$ ideo-

Digitized by Google

que $S = \frac{4}{3}$, ut ante. Pro casu $n = 4$ habebimus:

$$0 = -3 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{2}{-1 + \cfrac{3}{0 + S,}}}$$

unde fit $S = \frac{21}{13}$. Hic autem calculus expeditius instituetur, si litteris ante introductis α, β, γ utamur; tum enim erit $0 = -3 + \gamma$. Erat autem $\alpha = \frac{3}{S}$; $\beta = \frac{2}{-1+\alpha}$; $\gamma = \frac{1}{-2+\beta}$. Hic ergo erit $\gamma = 3$, ideoque $\zeta = \frac{1}{-2+\beta}$, unde fit $\beta = \frac{7}{3} = \frac{2}{-1+\alpha}$ hincque colligitur $\alpha = \frac{13}{7} = \frac{3}{S}$, sicque tandem erit $S = \frac{21}{13}$. Hoc ergo artificio etiam in sequentibus utamur.

XV. Quo has operationes pro majoribus numeris n sublevemus, ex formulis pro litteris α, β, γ, δ etc. ante assumtis derivemus reciprocas, quibus quaelibet littera per praecedentem definiatur, quas utrasque formulas in sequenti tabella exhibeamus:

Cum sit	erit
$\alpha = \frac{n-1}{S}$	$S = 0 + \frac{n-1}{\alpha}$
$\beta = \frac{n-2}{-1+\alpha}$	$\alpha = 1 + \frac{n-2}{\beta}$
$\gamma = \frac{n-3}{-2+\beta}$	$\beta = 2 + \frac{n-3}{\gamma}$
$\delta = \frac{n-4}{-3+\gamma}$	$\gamma = 3 + \frac{n-4}{\delta}$
$\varepsilon = \frac{n-5}{-4+\delta}$	$\delta = 4 + \frac{n-5}{\varepsilon}$
$\zeta = \frac{n-6}{-5+\varepsilon}$	$\varepsilon = 5 + \frac{n-6}{\zeta}$
	$\zeta = 6 + \frac{n-7}{\eta}$

Digitized by Google

XVI. Jam beneficio hujus tabulae facile erit omnes casus evolvere. Ac primo quidem, sumto $n = 1$, quo casu fit:

$$S = \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + 4 + \text{etc.}}}}$$

videtur fieri $S = 0$, cum tamen supra innuimus esse $S = \frac{1}{e - 1}$. Verum probe notetur, istam conclusionem non valere, si etiam fuerit $\alpha = 0$, quia tum erit $S = 0 + \frac{0}{0}$. Nihil vero repugnat, quo minus sit $\frac{0}{0} = \frac{1}{e - 1}$, quae exceptio solo hoc casu locum habet. Progrediamur ergo ad reliquos casus; ac sumto $n = 2$, ubi est $S = \frac{2}{1 + \frac{3}{2 + 4 + \text{etc.}}}$

quia hic β non est $= 0$, manifesto erit $\alpha = 1$, hincque $S = 1$, uti jam ante invenimus. Sit jam $n = 3$, ideoque:

$$S = \frac{\quad}{1 + \frac{4}{2 + \frac{5}{3 + \text{etc.}}}}$$

erit $\beta = 2$, quia non est $\gamma = 0$; hinc ergo regrediendo erit $\alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $S = \frac{4}{3}$. Sumto porro $n = 4$, quo casu erit:

$$S = \frac{4}{1 + \frac{5}{2 + \frac{6}{3 + \text{etc.}}}}$$

erit $\gamma = 3$, unde oriuntur sequentes valores:

$$\beta = 2 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{3};$$
$$\alpha = 1 + \tfrac{2 \cdot 3}{7} = \tfrac{13}{7} \text{ et}$$
$$S = \tfrac{21}{13}.$$

Sit $n = 5$, quo casu fit: $S = \cfrac{5}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{7}{3 + \cfrac{8}{4 + etc.}}}}$

tum erit $\delta = 4$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\gamma = 3 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{13}{4},$$
$$\beta = 2 + \tfrac{2 \cdot 4}{13} = \tfrac{34}{13},$$
$$\alpha = 1 + \tfrac{3 \cdot 13}{34} = \tfrac{73}{34} \text{ et}$$
$$S = 0 + \tfrac{4 \cdot 34}{73} = \tfrac{136}{73}.$$

XVII. Nunc ulterius progrediamur, ac ponamus $n = 6$, quo casu erit:

$$S = \cfrac{6}{1 + \cfrac{7}{2 + \cfrac{8}{3 + etc.}}}$$

eritque $\varepsilon = 5$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\delta = 4 + \tfrac{1}{5} = \tfrac{21}{5},$$
$$\gamma = 3 + \tfrac{2 \cdot 5}{21} = \tfrac{73}{21},$$
$$\beta = 2 + \tfrac{3 \cdot 21}{73} = \tfrac{209}{73},$$
$$\alpha = 1 + \tfrac{4 \cdot 73}{209} = \tfrac{501}{209},$$
$$S = 0 + \tfrac{5 \cdot 209}{501} = \tfrac{1045}{501}.$$

XVIII. Sit nunc $n = 7$ et $S = \cfrac{7}{1 + \cfrac{8}{2 + \cfrac{9}{3 + \cfrac{10}{4 + etc.}}}}$

erit $\zeta = 6$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\varepsilon = 5 + \tfrac{1}{6} = \tfrac{31}{6},$$
$$\delta = 4 + \tfrac{2 \cdot 6}{31} = \tfrac{136}{31},$$

Digitized by Google

$$\gamma = 3 + \frac{3\cdot 31}{136} = \frac{501}{136},$$
$$\beta = 2 + \frac{4\cdot 136}{501} = \frac{1546}{501},$$
$$\alpha = 1 + \frac{5\cdot 501}{1546} = \frac{4051}{1546},$$
$$S = 0 + \frac{6\cdot 1546}{4051} = \frac{9276}{4051}.$$

XIX. Sit nunc $n = 8$ et $S = \cfrac{8}{1 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{10}{3 + \text{etc.}}}}$, tum erit

$\eta = 7$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\zeta = 6 + \frac{1}{7} = \frac{43}{7},$$
$$\varepsilon = 5 + \frac{2\cdot 7}{43} = \frac{229}{43},$$
$$\delta = 4 + \frac{3\cdot 43}{229} = \frac{1045}{229},$$
$$\gamma = 3 + \frac{4\cdot 229}{1045} = \frac{4051}{1045},$$
$$\beta = 2 + \frac{5\cdot 1045}{4051} = \frac{13327}{4051},$$
$$\alpha = 1 + \frac{6\cdot 4051}{13327} = \frac{37633}{13327},$$
$$S = 0 + \frac{7\cdot 13327}{37633} = \frac{93289}{37633}.$$

XX. Hos jam valores pro littera S inventos in ordinem disponamus, quo eorum progressio facilius considerari possit, quos ergo sequenti modo repraesentemus:

n	2	3	4	5	6	7	8
S	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{136}{73}$	$\frac{1045}{501}$	$\frac{9276}{4051}$	$\frac{93289}{37633}$.

Inter has autem fractiones primo intuitu nulla certa lex regnare videtur; verum re attentius perpensa haud difficulter quandam progressionis legem observare licet. Si enim quemlibet numeratorem cum summa numeratoris ac deno-

minatoris praecedentis fractionis comparemus, ordinem maxime memorabilem deprehendemus, cum sit:

$$4 = 2\ (1 + 1) = 2 \cdot 2\ ,$$
$$21 = 3\ (4 + 3) = 3 \cdot 7\ ,$$
$$136 = 4\ (21 + 13) = 4 \cdot 34\ ,$$
$$1045 = 5\ (136 + 73) = 5 \cdot 209\ ,$$
$$9276 = 6\ (1045 + 501) = 6 \cdot 1546\ ,$$
$$93289 = 7\ (9276 + 4051) = 7 \cdot 13327.$$

Pro denominatoribus autem haud absimilis relatio observatur, cum quilibet sit summa praecedentis numeratoris certo multiplo denominatoris aucti, qui ordo sequenti modo in oculos incurret:

$$3 = 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2\ ,$$
$$13 = 4 + 3 \cdot 3 = 4 + 9\ ,$$
$$73 = 21 + 4 \cdot 13 = 21 + 52\ ,$$
$$501 = 136 + 5 \cdot 73 = 136 + 365\ ,$$
$$4051 = 1045 + 6 \cdot 501 = 1045 + 3006\ ,$$
$$37633 = 9276 + 7 \cdot 4051 = 9276 + 28357.$$

XXI. Hinc ergo si pro quolibet numero n inventa fuerit fractio $S = \frac{p}{q}$, pro sequente numero $n+1$ fiet $S = \frac{n(p+q)}{p+nq}$, cujus formulae ope ex quolibet casu sequens multo expeditius reperiri poterit quam per praecedentem methodum. Ita cum pro casu $n = 8$ repertus fuerit valor $S = \frac{93289}{37633}$, pro sequente casu $n = 9$ erit: $S = \frac{9(93289 + 37633)}{93289 + 8 \cdot 37633} = \frac{1047376}{394353}$. Ve-

rum quia haec eximia regula hactenus sola inductione innititur, ejus demonstrationem in sequente articulo dabimus. Ante autem quam hoc argumentum deseramus, observasse juvabit, posteriorem columnam tabulae (§. XV.) datae nobis insignem novam proprietatem suppeditare. Si enim loco litterarum α, β, γ, etc. earum valores successive substituamus, pro S novam fractionem continuam nanciscemur, quae ita se habet:

$$S = \cfrac{n-1}{1+\cfrac{n-2}{2+\cfrac{n-3}{3+\cfrac{n-4}{4+\cfrac{n-5}{5+\text{etc.}}}}}}$$

quae forma semper abrumpitur, unde operae pretium erit hanc transformationem in sequenti theoremate ante oculos posuisse.

Theorema.

XXII. *Si fuerit* $S = \cfrac{n}{1+\cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\text{etc.}}}}}$

erit etiam semper

$$S = \cfrac{n-1}{1+\cfrac{n-2}{2+\cfrac{n-3}{3+\cfrac{n-4}{4+\cfrac{n-5}{5+\text{etc.}}}}}}$$

siquidem n *fuerit numerus integer positivus, excepta unitate, ob rationem supra allegatam.*

Methodus tertia
in summas harum fractionum continuarum inquirendi.

XXIII. Si evolutiones casuum ante tractatorum contemplemur, animadvertemus in fractionibus pro litteris α, β, γ, etc. datis inverso ordine cujuslibet numerator dare denominatorem sequentis; quamobrem omnes terminos ordine disponamus, ac differentias tam primas quam secundas et sequentes subjiciamus. Ita pro casu $n=2$ termini harum fractionum, ab unitate incipiendo, erunt sequentes:

	1.	2.	3.	4.
D. I.	1.	1.	1.	

Simili modo pro $n=4$ habebimus hos terminos:

	1.	3.	7.	13.	21.
D. I.	2.	4.	6.	8.	
D. II.	2.	2.	2.		

Casus vero $n=5$ praebet sequens schema:

	1.	4.	13.	34.	73.	136.
D. I.	3.	9.	21.	39.	63.	
D. II.	6.	12.	18.	24.		
D. III.	6.	6.	6.			

Casus porro $n=6$ dat sequens schema:

1. 5. 21. 73. 209. 501. 1045.

D. I. 4. 16. 52. 136. 292. 544.

D. II. 12. 36. 84. 156. 242.

D. III. 24. 48. 72. 86.

D. IV. 24. 24 24.

Pro casu $n = 7$ habebimus:

1. 6. 31. 136. 501. 1546. 4051. 9276.

D. I. 5. 25. 105. 365. 1045. 2505. 5225.

D. II. 20. 180. 260. 680. 1460. 2720.

D. III. 60. 180. 420. 780. 1260.

D. IV. 120. 240. 360. 480.

D. V. 120. 120. 120.

Casus denique $n = 8$ dat sequens schema:

1. 7. 43. 229. 1045. 4051. 13327. 37633. 93289.

D. I. 6. 36. 186. 816. 3006. 9276. 24306. 55656.

D. II. 30. 150. 630. 2190. 6270. 15030. 31350.

D. III. 120. 480. 1560. 4080. 8760. 16320.

D. IV. 360. 1080. 2520. 4680. 7560.

D. V. 720. 1440. 2160. 2880.

D. VI. 720. 720. 720.

XXIV. Consideratio horum casuum nobis sequentes conclusiones suppeditat:

1°. Quia omnes hi casus tandem ad differentias constantes perducunt, hinc discimus, omnes istas series esse

algebraicas, quarum scilicet terminus generalis algebraice exhiberi queat.

2°. Porro etiam videmus differentias constantes constituere progressionem hypergeometricam, scilicet:

1. 2. 6. 24. 120. 720. etc.

3°. Constat autem terminos generales cujusque progressionis ex terminis primis singularum differentiarum formari, qui ergo termini primi se habent ut sequens tabella indicat:

$n = 2$	1.						
$n = 3$	1.	1.					
$n = 4$	1.	2.	2.				
$n = 5$	1.	3.	6.	6.			
$n = 6$	1.	4.	12.	24.	24.		
$n = 7$	1.	5.	20.	60.	120.	120.	
$n = 8$	1.	6.	30.	120.	360.	720.	720.

Evidens autem est hanc postremam seriem hoc modo repraesentari posse:

1; 6; 6. 5; 6. 5. 4; 6. 5. 4. 3; 6. 5. 4. 3. 2; 6. 5. 4. 3. 2. 1.

4°. Cum ista progressio referatur ad casum $n = 8$, hinc tuto concludere licet, in genere terminos primos tam ipsius seriei, quam ipsarum differentiarum, hanc constituturos esse progressionem:

$$1;\ n-2;\ (n-2)(n-3);\ (n-2)(n-3)(n-4);\ \text{etc.}$$

Digitized by Google

5°. Deinde vero ex doctrina progressionum constat terminum generalem cujusque seriei reperiri, si, manente termino ipsius seriei primo, primarum differentiarum terminus primus multiplicetur per x; secundarum vero differentiarum per $\frac{x(x-1)}{1.2}$; tertiarum per $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$ et ita porro, unde terminus generalis pro nostro casu hoc modo exprimetur:

$$1+(n-2)x+(n-2)(n-3)\frac{x(x-1)}{1.2}+(n-2)(n-3)(n-4)\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\text{etc.}$$

unde sumto $x=1$, oritur terminus secundus $n-1$; at si loco x sumantur numeri 2. 3. 4 etc. orientur termini tertius, quartus, quintus, etc. Conveniet autem haec pro singulis casibus evolvere.

XXV. Hinc ergo si fuerit $n=2$, terminus generalis erit $=1$; at si $n=3$, terminus generalis erit $1+x$. Hoc autem casu ipsa series erat: 1. 2. 3. 4; ubi patet sumto $x=3$ prodire terminum ultimum 4, qui per praecedentem divisus dat valorem ipsius $S=\frac{4}{3}$. Sumatur nunc $n=4$ et seriei 1. 3. 7. 13. 21 erit terminus generalis:

$$=1+2x+x(x-1)=1+x+xx,$$

unde sumto $x=4$ prodit terminus ultimus $=21$, qui per praecedentem 13 divisus dat $S=\frac{21}{13}$. Sit nunc $n=5$ et progressionis 1. 4. 13. 34. 73. 136 terminus generalis erit:

$$1+3x+3.\frac{2.x(x-1)}{1.2}+3.2.\frac{1.x(x-1)(x-2)}{1.2.3},$$

unde, sumto $x=5$, oritur ultimus terminus 136, qui per

penultimum divisus dat valorem ipsius S. Simili modo, sumto $n = 6$, seriei 1. 5. 21. 73. 209. 501. 1045 terminus generalis erit:

$$1 + 4x - 4.3\frac{x(x-1)}{1.2} + 4.3.2\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + 4.3.2.1\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4},$$

qui posito $x = 6$ praebet terminum ultimum, at posito $x = 5$ penultimum; quorum ille per hunc divisus praebet valorem ipsius S.

XXVI. Quoniam autem hic tantum agitur de termino ultimo et penultimo, horum terminorum formam pro casu $n = 6$ accuratius perpendamus. Sumto igitur $x = 5$, erit terminus penultimus:

$$1 + 4.5 + 4.3.\frac{5.4}{1.2} + 4.3.2.\frac{5.4.3}{1.2.3} + 4.3.2.1.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4},$$

at sumto $x = 6$, habebitur terminus ultimus:

$$1 + 4.6 + 4.3.\frac{6.5}{1.2} + 4.3.2.\frac{6.5.4}{1.2.3} + 4.3.2.1.\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4},$$

unde si pro hoc casu ponatur $S = \frac{p}{q}$ et denominatores ad priores factores referantur, erit:

$$p = 1 + 4.6 + 6.6.5 + 4.6.5.4 + 1.6.5.4.3.$$

Eodemque modo erit:

$$q = 1 + 4.5 + 6.5.4 + 4.5.4.3 + 1.5.4.3.2,$$

ubi evidens est coëfficientes priores ex potestate quarta binomii esse desumtos.

XXVII. In omnibus igitur casibus optimo successu coëfficientibus binomialibus uti poterimus; et quoniam, pro valore generali n, coëfficientes ex potestate $n - 2$ sunt

desumendi, meminisse juvabit, me olim hos coëfficientes sequenti modo expressisse:

$$[\tfrac{n-2}{1}];\ [\tfrac{n-2}{2}];\ [\tfrac{n-2}{3}],\ [\tfrac{n-2}{4}]\ \text{etc.}$$

Si ponamus ut hactenus $S = \frac{p}{q}$, erit:

$$p = 1 + [\tfrac{n-2}{1}]n + [\tfrac{n-2}{2}]n(n-1) + [\tfrac{n-2}{3}]n(n-1)(n-2)$$
$$+ [\tfrac{n-2}{4}]n(n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc. et}$$
$$q = 1 + [\tfrac{n-2}{1}](n-1) + [\tfrac{n-2}{2}](n-1)(n-2)$$
$$+ [\tfrac{n-2}{3}](n-1)(n-2)(n-3)\ \text{etc.}$$

Ita si fuerit $n = 7$, erit hinc:

$$p = 1 + 5.7 + 10.7.6 + 10.7.6.5 + 5.7.6.5.4$$
$$+ 1.7.6.5.4.3\ \text{et}$$
$$q = 1 + 5.6 + 10.6.5 + 10.6.5.4 + 5.6.5.4.3$$
$$+ 1.6.5.4.3.2.$$

Tales igitur expressiones ad quosvis casus facile applicantur.

XXVIII. Quodsi jam istae formulae pro p et q inventae accuratius perpendantur, et cum sequente casu $n + 1$, pro quo sit $S = \frac{p'}{q'}$, ideoque:

$$p' = 1 + [\tfrac{n-1}{1}](n+1) + [\tfrac{n-1}{2}](n+1)n$$
$$+ [\tfrac{n-1}{3}](n+1)n(n-1)\ \text{etc. et}$$
$$q' = 1 + [\tfrac{n-1}{1}]n + [\tfrac{n-1}{2}]n(n-1)$$
$$+ [\tfrac{n-1}{3}]n(n-1)(n-2) + \text{etc.}$$

comparentur, haud difficulter inde deduci poterit insignis

illa relatio, quam jam ante in medium attulimus, scilicet semper esse:

$$p' = np + nq \text{ et}$$
$$q' = p + nq,$$

quae proprietas eo magis est notatu digna, quod ejus ope ex quolibet casu sequens facillime derivari potest, quemadmodum jam in praecedente articulo est ostensum.

Digitized by Google

DE SERIE MAXIME MEMORABILI, QUA POTESTAS BINOMIALIS QUAECUNQUE EXPRIMI POTEST.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 20. Decembris 1779.

§. 1. Memini me olim vidisse seriem prorsus singularem pro potestate binomiali: $(1+x)^n$, quae abrumpebatur pro casibus quibus exponens n est tam numerus integer positivus, quam negativus. Quia autem ejus formae non amplius recordabar, eam sequenti modo sum perscrutatus. Quia ista series abrumpi debet, sive n fuerit numerus integer positivus, sive negativus, eam sub hac forma repraesento:

$$(1+x)^n = A + nB + n(n-1)C + (n+1)(n)(n-1)D$$
$$+ (n+1)(n)(n-1)(n-2)E + (n+2)\ldots(n-2)F$$
$$+ (n+2)\;.\;.\;.\;.\;(n-3)G + \text{etc.}$$

§. 2. Hac forma generali constituta, litteras A, B, C, D, etc. ita determinemus, ut casibus, quibus pro n numerus integer sive positivus sive negativus assumitur, satisfiat; unde casus simpliciores sequentes dabunt aequationes:

Digitized by Google

Si $n = 0$, erit $1 = A$,

- $n = 1$ - $1 + x = A + B$,
- $n = -1$ - $\frac{1}{1+x} = A - B + 2C$,
- $n = 2$ - $(1+x)^2 = A + 2B + 2C + 6D$,
- $n = -2$ - $\frac{1}{(1+x)^2} = A - 2B + 6C - 6D + 24E$,
- $n = 3$ - $(1+x)^3 = A + 3B + 6C + 24D + 24E + 120F$,
- $n = -3$ - $\frac{1}{(1+x)^3} = A - 3B + 12C - 24D + 120E - 120F + 720G$,
- $n = 4$ - $(1+x)^4 = A + 4B + 12C + 60D + 120E + 720F + 720G + 5040H$,
- $n = -4$ - $\frac{1}{(1+x)^4} = A - 4B + 20C - 60D + 360E - 720F + 5040G - 5040H + 40320I$,

etc.

§. 3. Jam resolutio harum aequationum pro litteris A, B, C, D, etc. sequentes nobis praebet valores:

1). $A = 1$,
2). $B = x$,
3). $2C = \frac{xx}{1+x}$,
4). $6D = \frac{x^3}{1+x}$,
5). $24E = \frac{x^4}{(1+x)^2}$,
6). $120F = \frac{x^5}{(1+x)^2}$,
7). $720G = \frac{x^6}{(1+x)^3}$,

etc.

§. 4. Lex, qua hi valores ordine progrediuntur, satis est manifesta, dum quilibet terminus prodit, si praecedens vel per x vel per $\frac{x}{1+x}$ multiplicetur. Quo observato series quaesita sequenti forma expressa reperietur:

Digitized by Google

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{xx}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{x^3}{1+x}$$
$$+ \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1\ldots4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(n+2)\ldots(n-2)}{1\ldots5}\frac{x^5}{(1+x)^2}$$
$$+ \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1\ldots6}\frac{x^6}{(1+x)^3} + \text{etc.}$$

cujus ordo quo clarius in oculos incurrat, statuamus $\frac{xx}{1+x} = zz$ et distinguamus terminos ordine pares ab imparibus, ut seriem geminatam obtineamus, eritque:

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{\ldots4}z^4 + \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1\ldots6}z^6 + \text{etc.} \\ + x\left(n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}z^2 + \frac{(n+2)\ldots(n-2)}{1\ldots5}z^4 + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

atque ob insignem ordinem, quo termini utriusque seriei procedunt, jam satis tuto concludere licet, eas esse veritati consentaneas. Quoniam vero haec lex per solam inductionem est conclusa, utique rigidiore demonstratione indiget, quam jam sum investigaturus.

§. 5. Interim tamen statim casus memorabilis se offert, quo veritas hujus seriei egregie confirmatur, scilicet si exponens n statuatur infinite magnus, simul vero x infinite parvum, ita tamen ut productum nx sit quantitas finita, puta u; tum enim constat esse $(1+\frac{u}{n})^n = e^u$. Hoc autem casu series inventa sequentem induet formam:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2\ 3.4} + \text{etc.}$$

quae series, ut cuique constat, veritati est consentanea.

§. 6. Ut autem in demonstrationem completam inquiramus, quia posuimus $\frac{xx}{1+x} = zz$, erit $x = \frac{zz + z\sqrt{(zz+4)}}{2}$.

Ad hanc fractionem tollendam statuamus $z = 2y$, ut fiat $x = 2yy + 2y\sqrt{yy+1}$, hincque fit:

$$1 + x = 1 + 2yy + 2y\sqrt{yy+1} = (y + \sqrt{1+yy})^2,$$

ita ut potestas nostra proposita evadat $(y + \sqrt{1+yy})^{2n}$. Quia igitur ista formula $y + \sqrt{1+yy}$ frequentissime occurret, brevitatis gratia ponamus $y + \sqrt{1+yy} = v$, ut potestas evolvenda sit v^{2n}.

§. 7. Cum igitur ista potestas v^{2n} aequetur binis seriebus supra exhibitis, pro priore statuamus:

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} zz + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1 \ldots 4} z^4 + \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1 \ldots 6} z^6 + \text{etc.}$$

pro altera vero statuamus:

$$\frac{tx}{z} = nx + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} xz^2 + \frac{(n+2)\ldots(n-2)}{1 \ldots 4} xz^4 + \text{etc.}$$

ut fiat:

$$t = nz + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \frac{(n+2)\ldots(n-2)}{1 \ldots 4} z^5 + \text{etc.}$$

quae series praecedenti magis est assimilata. Hinc igitur habebimus $v^{2n} = s + \frac{tx}{z}$.

§. 8. Cum nunc posuerimus $z = 2y$, atque hinc fiat $x = 2yy + 2y\sqrt{1+yy} = 2yv$, habebimus $\frac{x}{z} = v$, et aequatio nostra jam erit $v^{2n} = s + tv$. Ut nunc hanc aequationem per differentiationem tractemus, notetur esse $\partial v = \partial y + \frac{y \partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{v \partial y}{\sqrt{1+yy}}$. Vicissim autem y per v ita exprimitur, ut sit $y = \frac{vv-1}{2v}$, hincque porro $\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v}$.

Tum vero differentiando erit $\partial y = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv}$, qui valor egregie convenit cum eo quem praecedens formula differentialis praeberet, unde fit:

$$\partial y = \frac{\partial v}{v} \sqrt{1+yy} = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv}.$$

§. 9. Cum jam potestas nostra v^{2n} aequetur duabus seriebus, quarum alteram per s alteram per tv denotavimus, notasse hic juvabit priorem seriem s complecti terminos rationales, alteram vero terminos omnes continet irrationales. Hoc observato aequationis inventae primo sumamus logarithmos, ut habeamus $2nlv = l(s+tv)$ et sumtis differentialibus erit $\frac{2n\partial v}{v} = \frac{\partial s + v\partial t + t\partial v}{s+tv}$. Cum autem sit $v = y + \sqrt{1+yy}$ et $\partial v = \frac{v\partial y}{\sqrt{1+yy}}$, facta hac substitutione orietur haec aequatio:

$$\frac{2n\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{\partial s\sqrt{1+yy} + y\partial t\sqrt{1+yy} + \partial t(1+yy) + ty\partial y + t\partial y\sqrt{1+yy}}{(s+ty+t\sqrt{1+yy})\sqrt{1+yy}},$$

quae sublatis fractionibus hanc induet formam:

$$2ns\partial y + 2nty\partial y + 2nt\partial y\sqrt{1+yy}$$
$$= \partial s\sqrt{1+yy} + y\partial t\sqrt{1+yy} + \partial t(1+yy) + ty\partial y + t\partial y\sqrt{1+yy},$$

unde seorsim aequando partes rationales et irrationales nascuntur hae duae aequationes:

I. $2ns\partial y + (2n-1)ty\partial y = \partial t + yy\partial t$,

II. $(2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t$.

§. 10. Ut harum aequationum prior simplicior reddatur, ab ea subtrahatur posterior per y multiplicata, ejus-

que loco prodibit ista: $2ns\partial y = \partial t - y\partial s$. Altera aequatio, cum hac combinanda, erit $(2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t$. Jam videamus an ex his duabus aequationibus pro litteris s et t easdem series derivare queamus, quas supra per inductionem elicuimus. Quoniam autem illae series procedebant per potestates litterae $z = 2y$, hic loco y scribamus $\frac{1}{2}z$, sicque nostrae ambae aequationes erunt:

$$(2n-1)t\partial z = 2\partial s + z\partial t,$$
$$2ns\partial z = 2\partial t - z\partial s.$$

§. 11. Possemus nunc ex his duabus aequationibus eliminare quantitatem t, quo facto ptodiret aequatio differentialis secundi gradus inter s et z, unde haud difficulter series valorem ipsius s exprimens deduci posset. Deinde simili modo, eliminata littera s, talis aequatio prodiret inter t et z, ex qua eodem modo series pro t derivari posset: verum multo facilius ambae hae series immediate ex binis aequationibus inventis erui poterunt. Pro utraque scilicet littera statim fingamus sequentes series indefinitas:

$$s = 1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + Ez^{10} + \text{etc.}$$
$$t = \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7 + \varepsilon z^9 + \text{etc.}$$

§. 12. Nunc istas series substituamus primo in aequatione priore:

$$(2n-1)t - \frac{z\partial t}{\partial z} - \frac{2\partial s}{\partial z} = 0,$$

sequenti modo:

$$\begin{array}{rcccccc}
(2n-1)t & = & (2n-1)\alpha z & +(2n-1)\beta z^3 & +(2-n1)\gamma z^5 & +(2n-1)\delta z^7 & +\text{etc.} \\
-\frac{z\partial t}{\partial z} & = & -\ \alpha & -\ 3\beta & -\ 5\gamma & -\ 7\delta & -\text{etc.} \\
-\frac{z\partial s}{\partial z} & = & -\ 4A & -\ 8B & -\ 12C & -\ 16D & -\text{etc.}
\end{array}$$

Hic jam singulis partibus seorsim ad nihilum redactis obtinemus sequentes determinationes:

$$\begin{array}{ll}
A = \frac{(n-1)}{2}\alpha, & D = \frac{(n-4)}{8}\delta, \\
B = \frac{(n-2)}{4}\beta, & E = \frac{(n-5)}{10}\varepsilon, \\
C = \frac{(n-3)}{6}\gamma, & F = \frac{(n-6)}{12}\zeta.
\end{array}$$

etc.

§. 13. Eodem modo tractetur altera aequatio:

$$2ns + \frac{z\partial s}{\partial z} - \frac{z\partial t}{\partial z} = 0,$$

et facta substitutione serierum fictarum supra datarum fiet:

$$\begin{array}{rcccccc}
2ns & = & 2n & +2nAz^2 & +2nBz^4 & +2nCz^6 & +2nDz^8+\text{etc.} \\
+\frac{z\partial s}{\partial z} & = & .. & +\ 2A & +\ 4B & +\ 6C & +\ 8D\ +\text{etc.} \\
-\frac{z\partial t}{\partial z} & = & -2\alpha & -\ 6\beta & -\ 10\gamma & -\ 14\delta & -\ 18\varepsilon\ -\text{etc.}
\end{array}$$

Hincque ergo fluunt sequentes determinationes:

$$\begin{array}{ll}
\alpha = n, & \delta = \frac{n+3}{7}C, \\
\beta = \frac{n+1}{3}A, & \varepsilon = \frac{n+4}{9}D, \\
\gamma = \frac{n+2}{5}B, & \zeta = \frac{n+5}{11}E,
\end{array}$$

etc.

§. 14. Cum nunc litterarum graecarum prima $\alpha = n$ sit cognita, alternatim binas superiores determinationes con-

sulendo sequentes valores reperientur:

$$\alpha = n, \qquad A = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$\beta = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}, \qquad B = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4},$$
$$\gamma = \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-2)}{1\ldots5}, \qquad C = \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-3)}{1\ldots6},$$
$$\delta = \frac{(n+3)\ldots\ldots(n-3)}{1\ldots\ldots7}, \qquad D = \frac{(n+3)\ldots\ldots(n-4)}{1\ldots\ldots8},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Demonstratum igitur nunc est legem progressionis, quam supra, quasi divinando, attulimus, cum veritate perfecte consentire.

§. 15. Cum igitur inventis istis seriebus sit:

$$(1+x)^n = v^{2n} = s + t\frac{x}{z},$$

quaestio hic omni attentione digna occurrit, quinam prodituri sint valores pro utraque littera s et t seorsim sumta, quam investigationem in sequente problemate sum susceptururus.

Problema.

Propositis his duabus seriebus:

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1.2.3.4}z^4 + \text{etc.}$$
$$t = \frac{n}{1}z + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}z^3 + \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-2)}{1.2.3.4.5}z^5 + \text{etc.}$$

investigare utriusque summam.

Solutio.

§. 16. Determinatio harum duarum summarum repetenda est ex binis aequationibus differentialibus supra inventis, dum loco z et ∂z scribitur $2y$ et $2\partial y$:

Digitized by Google

$$(2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t,$$
$$2ns\partial y = \partial t + y\partial s.$$

Hic quidem iterum posset alterutra litterarum s et t eliminari, quo pacto perveniretur ad aequationem differentialem secundi gradus: verum etiam isto labore supersedere poterimus. Utamur scilicet tantum aequatione priore hac forma relata: $\partial s = 2nt\partial y - \partial . ty$, cum qua combinemus aequationem principalem: $v^{2n} = s + tv$, unde fit $s = v^{2n} - tv$, ideoque:

$$\partial s = 2nv^{2n-1}\partial v - \partial . tv = 2nz\partial y - \partial . ty.$$

Est vero $\partial . tv - \partial . ty = \partial . t(v-y) = \partial . t\sqrt{1+yy}$, ob $v = y + \sqrt{1+yy}$. Sicque habebimus:

$$2nv^{2n-1}\partial v = 2nt\partial y + \partial t\sqrt{1+yy} + \frac{ty\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$

quae aequatio per $\sqrt{1+yy}$ divisa, dat:

$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1+yy} + 2nt\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1+yy}}.$$

Quia vero est $\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{\partial v}{v}$, aequatio nostra erit:

$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1+yy} + 2nt\frac{\partial v}{v} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1+yy}},$$

quae multiplicata per $v^{2n}\sqrt{1+yy}$ reddet membrum sinistrum integrabile, eritque:

$$\partial . tv^{2n}\sqrt{1+yy} = 2nv^{4n-1}\partial v,$$

cujus ergo integrale erit:

$$tv^{2n}\sqrt{1+yy} = \tfrac{1}{2}v^{4n} + \tfrac{C}{2},$$

consequenter habebimus:

$$t = \frac{v^{2n} + C v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

§. 17. Jam pro constante C, quia casu $y = 0$ et $v = 1$, fieri debet $t = 0$, erit $C = -1$, ita ut sit:

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}}, \text{ unde deducitur:}$$

$$s = v^{2n} - tv = v^{2n} - \frac{v^{2n+1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

Supra autem vidimus esse: $\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v}$, quo substituto reperietur: $s = \frac{v^{2n} + v^{2-2n}}{vv+1}$.

Interim tamen etiam videamus, quomodo aequationem differentialem supra memoratam tractari oporteat.

Alia Solutio.

ex differentialibus secundi gradus petita.

§. 18. Cum nostrae binae aequationes differentiales sint: $\partial s = 2nt\partial y - \partial . ty$,

$$\partial t = 2ns\partial y + y\partial s,$$

erit ex priore $s = 2n\int t\partial y - ty$, quibus valoribus in altera substitutis fiet:

$$\partial t = 4nn\partial y\int t\partial y - y . \partial . ty,$$

quae evoluta dat:

$$\partial t = 4nn\partial y\int t\partial y - ty\partial y - yy\partial t.$$

§. 19. Ut hinc signum summatorium tollamus, statuamus $\int t\partial y = u$, ut sit $t = \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\partial t = \frac{\partial\partial u}{\partial y}$, quibus va-

Digitized by Google

loribus substitutis prodit: $\frac{\partial\partial u}{\partial y}(1+yy)+y\partial u = 4nnu\partial y$, quam aequationem, ponendo $u = e^{\int p\partial y}$, ob $\partial u = p\partial y e^{\int p\partial y}$ et $\partial\partial u = (\partial p\partial y + pp\partial y)e^{\int p\partial y}$, ad differentialia prima reducere licet; erit enim:

$$(\partial p + pp\partial y)(1+yy) + py\partial y = 4nn\partial y, \quad \text{sive}$$
$$\partial p + pp\partial y + \frac{py\partial y}{1+yy} = 4nn\frac{\partial y}{1+yy}.$$

§. 20. Ut nunc primum terminum et tertium in unum contrahamus, ponamus $p = \frac{q}{\sqrt{1+yy}}$, eritque aequatio: $\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}} + \frac{qq\partial y}{1+yy} = 4nn\frac{\partial y}{1+yy}$, sive $\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}} = \frac{(4nn-qq)\partial y}{1+yy}$, quae commode separationem admittit; evidens enim est prodire:

$$\frac{\partial q}{4nn-qq} = \frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$

quae aequatio per $4n$ multiplicata et integrata dat:

$$l\frac{2n+q}{2n-q} = 4n\int\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}} = 4nlv,$$

consequenter erit $\frac{2n+q}{2n-q} = Cv^{4n}$, unde elicitur:

$$q = \frac{2n(Cv^{4n}-1)}{Cv^{4n}+1}.$$

§. 21. Hinc igitur, ob $p = \frac{q}{\sqrt{1+yy}}$, erit

$$p\partial y = \frac{q\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{q\partial v}{v}, \quad \text{ideoque } p\partial y = \frac{2n(Cv^{4n}-1)\partial v}{v(Cv^{4n}+1)},$$

quae expressio resolvitur in has partes:

$$p\partial y = -\frac{2n\partial v}{v} + \frac{4nCv^{4n-1}\partial v}{Cv^{4n}+1},$$

cujus ergo integrale erit:

$$\int p\partial y = -2nlv + l(Cv^{4n}+1) + lD,$$

consequenter erit:

$$e^{\int p\partial y} = \frac{D}{v^{2n}}(1+Cv^{4n}) = Dv^{-2n} + CDv^{+2n} = u.$$

§. 22. Cum igitur sit $u = \int t \partial y$, ideoque $t = \frac{\partial u}{\partial y}$, per differentiationem, mutatis constantibus arbitrariis, reperimus:

$$t = \frac{E v^{-2n} + F v^{+2n}}{\sqrt{1+yy}}.$$

Ad constantes autem definiendas primo notetur posito $y = 0$ et $v = 1$ fieri debere $t = 0$, unde fit $F = -E$, ita ut jam sit: $t = \frac{E}{\sqrt{1+yy}}(v^{-2n} - v^{+2n})$. Deinde vero si y fuerit infinite parvum, fieri debet $t = nz = 2ny$, tum vero evadit $v = 1 + y$ et $v^{-1} = 1 - y$, ideoque $v^{2n} = 1 + 2ny$ et $v^{-2n} = 1 - 2ny$, ex quibus valoribus fiet $2ny = -4nEy$, ergo $E = -\frac{1}{2}$, sicque nanciscimur pro t eundem valorem ac supra invenimus, scilicet $t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$, ex quo porro ut ante derivatur $s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$.

Solutio facillima Problematis.

§. 23. Hanc solutionem derivabimus ex sola aequatione $x^{2n} = s + tv$, in qua, ob $v = y + \sqrt{1+yy}$, littera s complectitur potestates pares ipsius y, t vero impares. Sumto igitur y negative, littera s manet eadem, littera t vero abibit in $-t$; tum autem loco v habebimus:

$$-y + \sqrt{1+yy} = v^{-1}.$$

Hoc observato, si loco litterarum s, t, v scribamus s, $-t$, v^{-1}, aequatio nostra etiamnunc subsistere debebit, sicque habebimus $v^{-2n} = s - \frac{t}{v}$, qua aequatione cum principali $v^{2n} = s + tv$ conjuncta, fiet subtrahendo:

$$v^{2n} - v^{-2n} = t v + \frac{t}{v},$$

unde fit $t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$, et hinc reperietur $s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$. Cum enim ex prima aequatione sit $t = v^{2n-1} - \frac{s}{v}$, ex altera vero $-t = v^{1-2n} - v^3$, hi valores invicem coaequati dabunt $\frac{s(vv+1)}{v} = v^{2n-1} + v^{1-2n}$, unde ob $\frac{vv+1}{v} = 2\sqrt{1+yy}$ erit $s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$.

§. 24. Transferamus denique haec omnia ad ipsam potestatem $1 + x$, et cum sit $1 + x = vv$ et $\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v} = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}}$, erit $2\sqrt{1+yy} = \frac{x+2}{\sqrt{1+x}}$, quibus valoribus substitutis fiet:

$$s = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2} \times ((1+x)^{n-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}-n}),$$

$$t = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2} \times ((1+x)^{n} - (1+x)^{-n}),$$

sive

$$s = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{-n}}{x+2},$$

$$t = \frac{(1+x)^{n+\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}-n}}{x+2}.$$

Hinc pro altera serie deducitur $\frac{tx}{z} = t\sqrt{1+x}$, ideoque valor seriei erit:

$$\frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^{1-n}}{2+x},$$

quae est summa terminorum ordine parium in serie pro potestate $(1+x)^n$ inventa.

DILUCIDATIONES
IN CAPITA POSTREMA CALCULI MEI DIFFERENTIALIS DE FUNCTIONIBUS INEXPLICABILIBUS.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 13 Martii 1780.

§. 1. Cum hoc argumentum, utpote in Analysi prorsus novum, neutiquam satis dilucide sit pertractatum, constitui hic idem majori studio retractare, atque omnia momenta, quibus innititur, ex primis principiis repetere; ubi plurimum juvabit idonea signa in calculum introduxisse. Ita si proposita fuerit series quaecunque, ejus terminos, indicibus 1, 2, 3, 4, etc. respondentes, his signis repraesentabo: (1), (2), (3), (4), etc., hincque terminus generalis hujus seriei, indici indefinito x respondens, mihi erit (x), qui ergo pro quavis serie certa erit functio ipsius x, quam penitus cognitam assumo, ita scilicet comparatam, ut ejus valores non solum pro numeris integris, loco x assumtis, sed etiam pro fractis, atque adeo surdis, exhiberi queant.

Digitized by Google

§. 2. Denotet porro $\Sigma : x$ terminum summatorium ejusdem seriei, qui exprimat summam terminorum, a primo incipiendo, usque ad terminum (x), ita ut sit:

$$\Sigma : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (x),$$

cujus ergo omnes valores, quoties x fuerit numerus integer positivus, ex ipsa serie actu exhiberi poterunt, siquidem erit ut sequitur:

$$\Sigma : 1 = (1)$$
$$\Sigma : 2 = (1) + (2)$$
$$\Sigma : 3 = (1) + (2) + (3)$$
$$\Sigma : 4 = (1) + (2) + (3) + (4)$$

etc. etc.

Cujusmodi autem valores eadem formula $\Sigma : x$ sit acceptura, quando ipsi x valores fracti, vel adeo surdi, sive positivi, sive negativi, tribuantur, hinc neutiquam apparet; unde istos valores ad peculiare functionum genus, quas *inexplicabiles* vocavi, refero. Quemadmodum igitur tales functiones per formulas analyticas determinatas exprimi queant, hic imprimis sum investigaturus.

§. 3. Totum autem hoc negotium commodissime expedietur per differentias continuas ex serie proposita derivatas, dum scilicet quilibet terminus a sequente subtrahitur, quo pacto orietur series primarum differentiarum, ex qua porro simili modo differentiae secundae, tertiae, quar-

tae, etc. formabuntur. Omnes autem has differentias sequentibus characteribus indicabo.

Different. I.	Different. II.	Different. III.	
$(2) - (1) = \Delta\, 1$	$\Delta\, 2 - \Delta\, 1 = \Delta^2 1$	$\Delta^2 2 - \Delta^2 1 = \Delta^3 1$	
$(3) - (2) = \Delta\, 2$	$\Delta\, 3 - \Delta\, 2 = \Delta^2 2$	$\Delta^2 3 - \Delta^2 2 = \Delta^3 2$	etc.
$(4) - (3) = \Delta\, 3$	$\Delta\, 4 - \Delta\, 3 = \Delta^2 3$	$\Delta^2 4 - \Delta^2 3 = \Delta^3 3$	
$(5) - (4) = \Delta\, 4$	$\Delta\, 5 - \Delta\, 4 = \Delta^2 4$	$\Delta^2 5 - \Delta^2 4 = \Delta^3 4$	
etc.	etc.	etc.	

§. 4. His characteribus constitutis singuli seriei termini ex primo (1) ejusque differentiis: $\Delta 1$, $\Delta^2 1$, $\Delta^3 1$, $\Delta^4 1$, etc. exprimi poterunt. Cum enim sit $(2) = (1) + \Delta 1$ et $\Delta 2 = \Delta 1 + \Delta^2 1$, ob $(3) = (2) + \Delta 2$, erit $(3) = (1) + 2\Delta 1 + \Delta^2 1$. Hinc jam fluit ista aequalitas: $\Delta 3 = \Delta 1 + 2\Delta^2 1 + \Delta^3 1$. Quia nunc $(4) = (3) + \Delta 3$, habebimus:
$(4) = (1) + 3\Delta 1 + 3\Delta^2 1 + \Delta^3 1$, inde porro sequitur $\Delta 4 = \Delta 1 + 3\Delta^2 1 + 3\Delta^3 1 + \Delta^4 1$. Ob $(5) = (4) + \Delta 4$, erit $(5) = (1) + 4\Delta 1 + 6\Delta^2 1 + 4\Delta^3 1 + \Delta^4 1$, et ita porro. Ex ipsa formatione harum formularum manifestum est, hic eosdem coëfficientes, qui in potestate binomiali habentur, cujus exponens est unitate minor quam index termini propositi, occurrere. Ita erit:
$$(n) = 1 + \tfrac{n-1}{1}\Delta 1 + \tfrac{n-1}{1}\cdot\tfrac{n-2}{2}\Delta^2 1 + \tfrac{n-1}{1}\cdot\tfrac{n-2}{2}\cdot\tfrac{n-3}{3}\Delta^3 1 + \text{etc.}$$

§. 5. Quod si hic numerum n unitate augeamus, ha-

Digitized by Google

bebimus: $(n+1)=1+\frac{n}{1}\Delta 1+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\Delta^2 1+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3 1+$ etc. Cum jam haec postrema expressio exhibeat terminum, qui a primo n gradibus est remotus, simili modo terminus qui a secundo per totidem gradus est promotus $(n+2)$, ex secundo, ejusque differentiis, determinatur: erit enim:

$$(n+2)=2+\frac{n}{1}\Delta 2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\Delta^2 2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3 2+\text{etc.}$$

Eodem modo evidens est fore protinus:

$$(n+3)=3+\frac{n}{1}\Delta 3+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\Delta^2 3+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3 3+\text{etc.}$$

$$(n+4)=4+\frac{n}{1}\Delta 4+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\Delta^2 4+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3 4+\text{etc.}$$

§. 6. Hinc ergo patet, ipsum seriei notrae terminum generalem (x) ex primo, ejusque differentiis, hoc modo definiri:

$$(x)=(1)+\frac{x-1}{1}\Delta 1+\frac{x-1}{1}.\frac{x-2}{2}\Delta^2 1+\frac{x-1}{1}.\frac{x-2}{2}.\frac{x-3}{3}\Delta^3 1+\text{etc.}$$

unde terminus ultimum sequens $(x+1)$ manifesto erit:

$$(x+1)=(1)+\frac{x}{1}\Delta 1+\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\Delta^2 1+\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}\Delta^3 1+\text{etc.}$$

quae expressio cum in sequentibus frequentissime occurrat, brevitatis gratia introducamus sequentes characteres:

$$\frac{x}{1}=x,$$
$$\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}=x',$$
$$\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}=x'',$$
$$\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.\frac{x-3}{4}=x''',$$

etc.

quibus adhibitis habebimus sequentes aequationes:

$$(x+1) = (1) + x\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x''\Delta^3 1 + \text{etc.}$$
$$(x+2) = (2) + x\Delta 2 + x'\Delta^2 2 + x''\Delta^3 2 + \text{etc.}$$
$$(x+3) = (3) + x\Delta 3 + x'\Delta^2 3 + x''\Delta^3 3 + \text{etc.}$$
$$(x+4) = (4) + x\Delta 4 + x'\Delta^2 4 + x''\Delta^3 4 + \text{etc.}$$
— — — — — —
— — — — — —
$$(x+n) = (n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + \text{etc.}$$

§. 7. Deinde etiam summas quotcunque terminorum nostrae seriei ex solo termino primo, ejusque differentiis, determinari poterit, quemadmodum sequens tabula declarat:

$$\Sigma : 1 = (1)$$
$$\text{add. } (2) = (1) + \Delta 1$$
$$\Sigma : 2 = 2\,(1) + \Delta 1$$
$$(3) = (1) + 2\Delta 1 + \Delta^2 1$$
$$\Sigma : 3 = 3\,(1) + 3\Delta 1 + \Delta^2 1$$
$$(4) = (1) + 3\Delta 1 + 3\Delta^2 1 + \Delta^3 1$$
$$\Sigma : 4 = 4\,(1) + 6\Delta 1 + 4\Delta^2 1 + \Delta^3 1$$
$$(5) = (1) + 4\Delta 1 + 6\Delta^2 1 + 4\Delta^3 1 + \Delta^4 1$$
$$\Sigma : 5 = 5\,(1) + 10\Delta 1 + 10\Delta^2 1 + 5\Delta^3 1 + \Delta^4 1,$$
etc.

Hic iterum evidens est coëfficientes eosdem esse, qui in potestate binominali ejusdem ordinis occurrunt.

Digitized by Google

§. 8. In usum igitur vocatis characteribus modo ante stabilitis, ipsum terminum summatorium nostrae seriei $\Sigma : x$ exprimere valemus: erit enim

$$\Sigma : x = x(1) + x' \Delta 1 + x'' \Delta^2 1 + x''' \Delta^3 1 + \text{etc.}$$

quae forma jam ita est comparata, ut loco x non solum numeros integros, sed etiam fractos, imo surdos quoscunque tam positivos quam negativos accipere liceat, quibus casibus utique ista expressio in infinitum progredietur, nisi forte series proposita deducat tandem ad differentias evanescentes, cujusmodi series algebraicae vocari solent, quibus ergo casibus non ad functiones inexplicabiles pervenitur. Interim tamen ista expressio, pro termino summatorio inventa, quando in infinitum porrigitur, nihil adjumenti offert, quando differentiationes, vel etiam summationes, sunt instituendae; quamobrem in id erit incumbendum, quemadmodum, saltem pro certis casibus, terminus summatorius inventus in alias formas transfundi queat, quae neque differentiationi neque integrationi refragentur, atque huc pertinent omnia subsidia, quae in Calculo differentiali fusius exposui, et quarum inventio non parum erat abstrusa. Sequenti autem modo totum hoc negotium facile conficietur.

§. 9. Ad expressionem pro termino summatorio $\Sigma : x$ modo ante inventam addantur plures formulae sub hac specie contentae:

$(n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + \text{etc.} \ldots\ldots - (x + n)$,
quarum summae, cum sint nihilo aequales, omnes quotcunque fuerint, cum $\Sigma : x$ junctum sumtae, nihilominus terminum summatorium expriment. Sumantur ergo pro n successive omnes numeri 1, 2, 3, 4, etc. et tota expressio secundum columnas verticales, singulis valoribus x, x', x'', etc. respondentes, sequenti modo disponantur:

Expressio generalis pro termino summatorio.

$$x(1) + x'\Delta 1 + x''\Delta^2 1 + x'''\Delta^3 1 + \text{etc.}$$
$$(1) + x\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x''\Delta^3 1 + x'''\Delta^4 1 + \ldots\ldots - (x+1)$$
$$(2) + x\Delta 2 + x'\Delta^2 2 + x''\Delta^3 2 + x'''\Delta^4 2 + \ldots\ldots - (x+2)$$
$$(3) + x\Delta 3 + x'\Delta^2 3 + x''\Delta^3 3 + x'''\Delta^4 3 + \ldots\ldots - (x+3)$$
— — — — — —

— — — — — —
$$(n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + \Delta'''\Delta^4 n + \ldots\ldots - (x+n).$$

§. 10. Etsi veritas hujus expressionis nulli amplius dubio est obnoxia, tamen non parum juvabit, eam ex ipsa forma confirmasse. Colligantur nimirum in unam summam singulae columnae verticales; ac primae quidem summa erit:
$$(1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (n) = \Sigma : n.$$
Secunda columna dat:
$$x(1 + \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \ldots + \Delta n).$$

Digitized by Google

Cum autem sit $\Delta\, 1 = (2) - (1)$;
$\Delta\, 2 = (3) - (2)$;
$\Delta\, 3 = (4) - (3)$;
etc.

tota haec summa contrahetur in $x \,.\, (n + 1)$. Simili modo tertiae columnae summa erit:

$$x' (\Delta 1 + \Delta^2 1 + \Delta^2 2 + \Delta^2 3 + \Delta^2 4 + \ldots . \Delta^2 n);$$

et quia $\Delta^2 1 = \Delta 2 - \Delta 1$; $\Delta^2 2 = \Delta 3 - \Delta 2 \ldots \Delta^2 n = \Delta (n+1) \Delta n$, illa summa contrahitur in $x' \Delta (n + 1)$. Eodem modo patet fore quartae columnae summam $x'' \Delta^2 (n + 1)$ et quintae $= x''' \Delta^3 (n + 1)$, et ita porro. Ultimae vero columnae subtrahendae summa est:

$$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \ldots . (x + n) = \Sigma : (x + n) - \Sigma : x.$$

§. 11. Summa igitur omnium columnarum verticalium mediarum, praeter primam et ultimam, est ut vidimus:

$$x (n + 1) + x' \Delta (n + 1) + x'' \Delta^2 (n + 1) + x''' \Delta^3 (n + 1).$$

Cum autem sit:

$$x (1) + x' \Delta 1 + x'' \Delta^2 1 + x''' \Delta^3 1 + \text{etc.} = \Sigma : x,$$

singulis terminis numero n auctis erit summa nostrae seriei:

$$x (n + 1) + x' \Delta (n + 1) + x'' \Delta^2 (n + 1) + \text{etc.} = \Sigma : (x + n) - \Sigma : n,$$

consequenter omnium plane columnarum summa praeter ultimam est $= \Sigma : (x + n)$: unde si summa ultimae columnae, quae est $\Sigma : (x + n) - \Sigma : x$ subtrahatur, remanebit summa totius expressionis $= \Sigma : x$, hoc est terminus summatorius quaesitus.

§. 12. Maxime hic mirum videbitur, quod valorem formulae $\Sigma : x$, quae serie satis simplici exprimitur, per congeriem innumerabilium serierum expressum et involutum dederimus; verum mox summus usus hujus formae complicatissimae patebit, quando numerum serierum horizontalium adeo in infinitum continuaverimus, quod fiet, si pro n numerum infinitum accipiamus, quemadmodum nunc clarius explicabimus.

§. 13. Denotante igitur n numerum infinite magnum, summa secundae columnae verticalis, quae est $x(n+1)$, continebit terminum seriei nostrae infinitesimum qui ergo si evanescat, multo magis summae sequentium columnarum verticalium evanescent; quamobrem hoc casu sufficiet solam primam columnam cum ultima in calculo retinuisse. Sin autem termini infinitesimi non evanescant, sed tamen inter se fuerint aequales, tum tertiam columnam, cum sequentibus, abjicere licebit. Porro autem si demum differentiae secundae infinitesimae evanescant, tres priores columnas verticales in calculo retineri debebunt; similique modo quatuor, si tertiae demum infinitesimae evanescant. Secundum hoc igitur serierum discrimen ipsas series in sequentes species distribuemus.

Species prima serierum
quarum termini infinitesimi evanescunt.

§. 14. Quoties igitur talis series proponatur, pro ejus termino summatorio sufficiet terminos primae et ultimae columnae verticalis in calculo retinuisse, sicque nanciscemur pro termino summatorio sequentem expressionem:

$$\Sigma : x = \begin{cases} (1) + (2) + (3) + (4) + \text{etc.} \\ -(x+1)-(x+2)-(x+3)-(x+4)-\text{etc.} \end{cases}$$

quae quidem in infinitum excurrit, atque eo magis convergit, quo minor fuerit index x, quandoquidem, si is evanescat, tota series in nihilum abibit, sive erit $\Sigma : 0 = 0$, id quod cum rei natura egregie congruit; quando enim numerus terminorum addendorum est nullus, etiam summa necessario debet esse nulla.

§. 15. Quando autem index x est numerus praemagnus, haec series utique parum converget; verum semper licebit hujusmodi casus ad indices minores reducere. Cum enim sit $\Sigma : (x + 1) = \Sigma : x + (x + 1)$, simili modo erit $\Sigma : (x + 2) = \Sigma : x + (x + 1) + (x + 2)$, atque adeo in genere, denotante i numerum integrum:

$$\Sigma : (x + i) = \Sigma : x + (x + 1) + (x + 2) \ldots\ldots + (x + i).$$

Quamobrem si summa $x + i$ terminorum desideretur, sufficiet summam x terminorum, hoc est $\Sigma : x$, investigasse,

hocque modo omnes hujusmodi quaestiones reduci poterunt ad casus, ubi index x est adeo unitate minor, quo casu series pro $\Sigma : x$ ante data vehementer converget.

§. 16. Talis reductio imprimis est necessaria, quando index x est numerus negativus. Cum enim sit:
$\Sigma : x = \Sigma (x - 1) + (x)$, erit $\Sigma : (x - 1) = \Sigma : (x) - (x)$, eodemque modo, $\Sigma : (x - 2) = \Sigma : x - (x) - (x - 1)$ et $\Sigma : (x - 3) = \Sigma : x - (x) - (x - 1) - (x - 2)$, et in genere $\Sigma : (x - i) = \Sigma : x - (x) - (x - 1) - \ldots\ldots (x - i + 1)$, hocque modo, quantumvis numerus negativus $x - i$ fuerit magnus, resolutio semper ad $\Sigma : x$ reduci potest, ita ut sit $x < 1$.

Exemplum.

§. 17. Proposita sit haec series harmonica:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots \tfrac{1}{x} = \Sigma : x,$$

cujus summa x terminorum desideretur, ubi pro x numeros quoscunque, praeter integros positivos, accipere liceat, siquidem pro casibus, quibus x est numerus integer positivus, tota res nulla difficultate laborat. Hoc igitur casu ex forma ante data erit:

$$\Sigma : x = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \text{etc.} \end{cases}$$

quae duae series in hanc unicam contrahentur:

$$\Sigma : x = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+2)} + \frac{x}{3(x+3)} + \frac{x}{4(x+4)} + \text{etc.}$$

Digitized by Google

cujus seriei summa per se constat, quoties x fuerit numerus integer positivus. Ita erit:

Si $x = 1$	$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \text{etc.}$
- $x = 2$	$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \text{etc.}$
- $x = 3$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 6} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \text{etc.}$
- $x = 4$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{2 \cdot 6} + \frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{4 \cdot 8} + \text{etc.}$
etc.	etc.

quae quidem series sunt notissimae.

§. 18. Quo haec clarius intelligantur, construamus curvam, cujus abscissae $ox = x$ respondeat applicata: Tab. I. Fig. 1.

$$xy = y = \Sigma : x,$$

ita ut, sumtis super axe ox intervallis unitate aequalibus $0,1$; $1,2$; $2,3$; $3,4$; etc. applicatae futurae sint:

$$1 \,.\,.\, (1) = 1,$$
$$2 \,.\,.\, (2) = 1 + \tfrac{1}{2},$$
$$3 \,.\,.\, (3) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3},$$
$$4 \,.\,.\, (4) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4},$$

atque aequatio inter binas coordinatas erit:

$$y = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+2)} + \frac{x}{3(x+3)} + \frac{x}{4(x+4)} + \text{etc.}$$

ex qua ergo aequatione omnes applicatae intermediae definiri poterunt, atque adeo sufficiet pro x valores unitate minores accepisse. Ita si applicata $\frac{1}{2} \,.\,.\, (\frac{1}{2})$, abscissae $o \,.\,.\, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ respondens, desideretur, reperietur:

Digitized

$$\tfrac{1}{2}\cdot\therefore(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2\cdot 5} + \tfrac{1}{3\cdot 7} + \tfrac{1}{4\cdot 9} + \tfrac{1}{5\cdot 11} + \text{etc.}$$

cujus seriei summa per logarithmos assignari poterit, hoc modo. Formetur haec series:

$$y = \frac{t^3}{1\cdot 3} + \frac{t^5}{2\cdot 5} + \frac{t^7}{3\cdot 7} + \frac{t^9}{4\cdot 9} + \text{etc.}$$

quae ergo series, sumto $t = 1$, dabit valorem quaesitum; at vero differentiando habebimus:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{4} + \text{etc.}$$

et denuo differentiando:

$$\frac{\partial\partial y}{2\partial t^2} = t + t^3 + t^5 + t^7 + \text{etc.} = \frac{t}{1-tt}.$$

Hinc ergo vicissim erit $\frac{\partial y}{2\partial t} = \int\frac{t\partial t}{1-tt}$ et $y = 2\int\partial t\int\frac{t\partial t}{1-tt}$; quae duplex integratio reducitur more solito ad unicam, quo facto erit $y = 2t\int\frac{t\partial t}{1-tt} - 2\int\frac{tt\partial t}{1-tt}$. Quia autem post integrationem statui debet $t = 1$, erit:

$$y = 2\int\frac{t\partial t}{1-tt} - 2\int\frac{tt\partial t}{1-tt} = 2\int\frac{t\partial t}{1+t};$$

quamobrem integrando fiet $y = 2t - 2\,l\,(t+1)$, ideoque nostro casu $y = 2 - 2l2$, cujus valor proxime verus est 0,61370564.

§. 19. Inventa jam applicata abscissae $\tfrac{1}{2}$ respondente, scilicet $\Sigma : \tfrac{1}{2} = 2 - 2l2$, ex ea sequentes per formulas supra datas facile derivantur, scilicet:

$$\Sigma : (1 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \Sigma\,\tfrac{1}{2},$$

$$\Sigma : (2 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \Sigma : \tfrac{1}{2},$$

$$\Sigma : (3 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{7} + \Sigma : \tfrac{1}{2},$$

etc. etc.

Digitized by Google

Quin etiam praecedentes applicatae, in figura non expressae, ex formula $\Sigma:(x-i)$, quam invenimus, scil.: ex $\Sigma:(x-i)=\Sigma:x-(x)-(x-1)-(x-2)\ldots-(x-i+1)$, deduci poterunt. Quia igitur nostro casu $x=\frac{1}{2}$, erit applicata:

$$\Sigma:(-\tfrac{1}{2}) = \Sigma:\tfrac{1}{2}-2=-2l2,$$

erit scilicet negativa. Sumto autem $x=-1$, ea fit infinita. Infinita vero etiam evadet casibus $x=-2$, $x=-3$, $x=-4$, etc. Intra autem haec intervalla erit:

$$\Sigma:-(1+\tfrac{1}{2}) = \Sigma:\tfrac{1}{2}-2+2,$$
$$\Sigma:-(2+\tfrac{1}{2}) = \Sigma:\tfrac{1}{2}-2+2-\tfrac{2}{3},$$
$$\Sigma:-(3+\tfrac{1}{2}) = \Sigma:\tfrac{1}{2}-2+2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5},$$
etc. etc.

§. 20. Differentiemus nunc seriem pro applicata y inventam, fietque: $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+$ etc., quae ergo series exprimit tangentem anguli, sub quo elementum curvae in y ad axem inclinatur; unde patet pro abscissa infinita hanc inclinationem fore nullam, sive tractum curvae in infinito axi esse parallelum. Tum vero, sumto $x=0$, innotescet inclinatio curvae ad ipsum initium $=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. $=\frac{\pi\pi}{6}=1{,}644$, ideoque angulus $=58^\circ.\,42'$. Tum vero, sumto $x=1$, erit:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{6}-1=0{,}644,$$

ubi ergo inclinatio erit $=32^\circ.\,48'$, hincque ulterius continuando inclinatio continuo decrescet.

§. 21. Retrogrediendo vero ad abscissas negativas supra vidimus, casibus, quibus $x = -1$, vel $x = -2$, vel $x = -3$, applicatas fieri infinite magnas, et totidem curvae assymptotas constituere. Nunc vero videbimus, iisdem locis fieri $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, ibique inclinationem curvae esse 90°, sive tangentes ad axem fore perpendiculares. Praeterea, quoniam series pro $\frac{\partial y}{\partial x}$ inventa semper habet summam positivam, sequitur omnes partes curvae dextrorsum semper ascendere, contra vero, sinistrorsum, descendere.

§. 22. Quin etiam poterimus integrationem adhibere atque aream curvae ab initio usque ad applicatum xy assignare. Ex prima enim forma, ad quam sumus perducti immediate, manifesto fiet:

$$\int y\partial x = \left\{ \begin{matrix} x & + & \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{3}x & + \text{etc.} \\ -l(1+x) & - & l(2+x) & - & l(3+x) & - \text{etc.} \end{matrix} \right\} + \text{Const.}$$

quae constans ita debet determinari, ut casu $x = 0$ tota area evanescat; unde illa rite ita exprimetur:

$$\int y\partial x = \left\{ \begin{matrix} x & + & \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{3}x & + \text{etc.} \\ -l(1+x) & - & l(1+\frac{1}{2}x) & - & l(1+\frac{1}{3}x) & - \text{etc.} \end{matrix} \right.$$

Cum igitur sit $l\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \text{etc.}$ superior expressio per series sequentes exprimi poterit:

Digitized by Google

$$\int y\partial x = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \text{etc.} \\ + \frac{x^2}{2.4} - \frac{x^3}{3.8} + \frac{x^4}{4.16} - \frac{x^5}{5.32} + \frac{x^6}{6.64} - \text{etc.} \\ + \frac{x^2}{2.9} - \frac{x^3}{3.27} + \frac{x^4}{4.81} - \frac{x^5}{5.243} + \frac{x^6}{6.729} - \text{etc.} \\ + \frac{x^2}{2.16} - \frac{x^3}{3.64} + \frac{x^4}{4.256} - \frac{x^5}{5.1024} + \frac{x^6}{6.4096} - \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

§. 23. Quod si jam has series verticaliter colligamus, habebimus:

$$\int y\partial x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}) = +0,822467.x^2, \\ -\frac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \text{etc.}) = -0,400685.x^3, \\ +\frac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \text{etc.}) = +0,270581.x^4, \\ -\frac{1}{5}x^5(1 + \frac{1}{32} + \frac{1}{243} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{3125} + \text{etc.}) = -0,207385.x^5, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ponamus nunc $x = 1$, ut prodeat area 0 1 (1), et quia fractiones decimales hic datae parum convergunt, notetur, seriei cujuscunque, ubi signa alternantur, scil.:

$$s = a - b + c - \partial + e - \text{etc.}$$

summam per differentias continuas ita exprimi, ut sit:

$$s = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta a + \frac{1}{8}\Delta^2 a - \frac{1}{16}\Delta^3 a + \text{etc.}$$

cujus ergo regulae ope calculus sequenti modo institui poterit:

		$-\Delta$	$+\Delta^2$	$-\Delta^3$	$+\Delta^4$	$-\Delta^5$	$+\Delta^6$	$-\Delta^7$	$+\Delta^8$	
a)	0,822467	0,421782	0,291678	0,224770	0,183230	0,154737	0,133936	0,118072	0,105564	etc.
b)	0,400685	0,130104	0,066908	0,041540	0,028493	0,020801	0,015864	0,012508		
c)	0,270581	0,063196	0,025368	0,013047	0,007692	0,004937	0,003356			
d)	0,207385	0,037828	0,012321	0,005355	0,002755	0,001581				
e)	0,169557	0,025507	0,006966	0,002600	0,001174					
f)	0,144050	0,018541	0,004366	0,001426						
g)	0,125509	0,014170	0,002940							
h)	0,111334	0,011235								
i)	0,100099									

§. 24. Harum columnarum, quarum prima ex calculi differentialis cap. VI. part. II. pag. 456 est desumta, numeri supremi referunt terminum primum a, cum suis differentiis continuis; secundi vero descendendo referunt terminum b cum suis differentiis; tertii terminum c cum suis differentiis. Quia nunc supremi termini parum convergunt, duos primos $a-b$ actu colligamus, eritque $a-b=0{,}421782$: sequentium vero $c-\partial+e-f+$ etc. summam:

$$=\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{4}\Delta c+\tfrac{1}{8}\Delta^2 c-\tfrac{1}{16}\Delta^3+\text{etc.}$$

secundum datam legem computemus, eritque:

$\frac{1}{2}c$	$=0{,}135290$
$-\frac{1}{4}\Delta c$	$=0{,}015799$
$+\frac{1}{8}\Delta^2 c$	$=0{,}003171$
$-\frac{1}{16}\Delta^3 c$	$=0{,}000815$
$+\frac{1}{32}\Delta^4 c$	$=0{,}000220$
$-\frac{1}{64}\Delta^5 c$	$=0{,}000077$
$+\frac{1}{128}\Delta^6 c$	$=0{,}000026$
$-\int eqq$	$=0{,}000010$
Summa	$=0{,}155408$
$a-b$	$=0{,}421782$
Area	$=0{,}577190$

Spero autem, fusiorem evolutionem hujus lineae curvae satis memorabilis nemini fore ingratam, praecipue cum aequatio pro hac curva pertineat ad functiones inexplicabiles, atque idcirco ista ad casum specialiorem digressio a nostro scopo haud aliena sit estimanda.

Species secunda serierum quarum differentiae infinitesimae primae evanescunt.

§. 25. Ad hanc ergo speciem pertinent omnes series,

Digitized by Google

quarum termini infinitesimi inter se sunt aequales. Ut ergo terminum summatorium harum serierum $\Sigma : x$ exprimamus, nihil aliud opus est, nisi ut ad expressionem praecedentis speciei insuper termini secundae columnae verticalis formae generalis §. 9. exhibitae adjungantur, cujus quidem terminus supremus seorsim erit exhibendus; et quia columnae singulae horizontales jam tribus terminis constant, terminus summatorius quaesitus $\Sigma : x$ sequenti serie triplicata definietur:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{lllll} & + \; (1) & - \; (2) & + \; (3) & - \; (4) \\ x\,(1) & + \; x\Delta 1 & + \; x\Delta 2 & + \; x\Delta 3 & + \; x\Delta 4 \\ & -(x+1) & -(x+2) & -(x+3) & -(x+4) \end{array} \right\} \text{etc.}$$

quae forma, ob $\Delta 1 = (2) - (1)$; $\Delta 2 = (3) - (2)$; $\Delta 3 = (4) - (3)$; etc. transfundetur in hanc:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{llll} & + \; \overline{1-x}\,(1) & + \; \overline{1-x}\,(2) & + \; \overline{1-x}\,(3) \\ x\,(1) & + \; x\,(2) & + \; x\,(3) & + \; x\,(4) \\ & - \; (x+1) & - \; (x+2) & - \; (x+3) \end{array} \right\} \text{etc.}$$

quae series eo magis convergit, quo minor x accipiatur. Supra autem docuimus, omnes casus semper eo reduci posse ubi x sit fractio unitate minor.

§. 26. Consideremus primo casum simplicissimum, quo omnes seriei termini sunt inter se aequales, scilicet: $(x) = a$: per se enim patet, ejus terminum summatorium

esse ax, quem eundem valorem nostra expressio statim declarabit. Erit enim $\Sigma : x = xa$.

§. 27. Nunc consideretur casus quo $(x) = \frac{x+1}{x}$, ita ut nostra series sit $\Sigma : x = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots \frac{x+1}{x}$, cujus termini infinitesimi omnes unitati aequantur. Nostra igitur formula nobis dabit:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{l} + \overline{1-x} . \frac{2}{1} + \overline{1-x} . \frac{3}{2} + \overline{1-x} . \frac{4}{3} \\ 2x + \quad x . \frac{3}{2} + \quad x . \frac{4}{3} + \quad x . \frac{5}{4} \\ - \frac{(x+2)}{x+1} - \frac{(x+3)}{x+2} - \frac{(x+4)}{x+3} \end{array} \right\} \text{etc.}$$

unde patet, sumto $x = 1$, fore $\Sigma : x = \frac{2}{1}$; at sumto $x = 2$ fiet:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{l} - 1 . \frac{2}{1} - 1 . \frac{3}{2} - 1 . \frac{4}{3} \\ 4 + 2 . \frac{3}{2} + 2 . \frac{4}{3} + 2 . \frac{5}{4} \\ - \frac{4}{3} - \frac{5}{4} - \frac{6}{5} \end{array} \right\} \text{etc.} = 4 - \frac{2}{1} + \frac{3}{2}.$$

§. 28. Iste vero casus facile reduci potest ad speciem praecedentem. Cum enim terminus generalis sit $(x) = \frac{x+1}{x}$, is in partes resolutus dabit $(x) = 1 + \frac{1}{x}$; quamobrem duae formentur series, prior scilicet ex termino generali 1, altera vero ex termino generali $\frac{1}{x}$, haeque duae series junctim sumtae dabunt summam quaesitam $\Sigma : x$; erit scilicet:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \dots x \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{x}. \end{array} \right.$$

Jam superioris seriei summa est x, inferior vero per speciem primam evolvi potest, indeque habebitur:

$$\Sigma : x = \begin{cases} x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \text{etc.} \end{cases}$$

quae expressio multo est simplicior praecedente, nihilo vero minus eundem valorem exhibet. Ita si sumatur $x = \frac{1}{2}$, prior expressio nobis dabit:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \\ - \frac{5}{4} - \frac{7}{5} - \frac{9}{7} - \frac{11}{9} \end{array} \right\} \text{etc.}$$

terminisque secundum ordinem collectis fiet:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 12} + \frac{1}{7 \cdot 24} + \frac{1}{9 \cdot 40} + \frac{1}{11 \cdot 60} + \text{etc.}$$

cujus ordo clarius patescet ex sequenti forma:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = 1 \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 12} + \text{etc.}$$

Altera vero expressio dat hanc seriem:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} \\ - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{2}{9} - \text{etc.} \end{cases}$$

quae, collectis terminis dabit:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 9} + \text{etc.}$$

§. 29. Ex hoc exemplo apparet, seriem ex specie secunda deductam magis convergere quam posteriorem ex specie prima derivatam; quare operae pretium erit prioris seriei convergentiam attentius considerare. Quilibet scilicet hujus seriei terminus oritur ex his tribus partibus: $\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} - \frac{2n+3}{2n+1}$, quae cum se mutuo proxime destruant, summa duorum priorum aequalis erit tertiae, unde

sequitur haec formula satis memorabilis: $\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}=\frac{2(2n+3)}{2n+1}$, quod eo propius ad veritatem accedit, quo major fuerit numerus n. Hinc utrinque subtrahendo 2, erit proxime $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{4}{2n+1}$.

§. 30. Talis autem reductio ad speciem primam semper locum habere potest, quando series proposita tandem ad valorem finitum convergit; verum si seriei termini tandem in infinitum crescant, haec reductio non amplius locum habere potest, ideoque necessario ad speciem secundam erit recurrendum. Talis est casus quo $(x)=\sqrt{x}$; denotante enim n numerum infinitum bini termini infinitesimi contigui erunt $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}$, quorum differentia est $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, ideoque evanescens. Hoc ergo casu series nostra erit:

$$\Sigma : x = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots \sqrt{x}.$$

Hinc ergo per praecepta data habebimus hanc expressionem:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{llll} & +\overline{1-x}\sqrt{1} & +\overline{1-x}\sqrt{2} & +\overline{1-x}\sqrt{3} \\ x & +x\sqrt{2}+ & x\sqrt{3}+ & x\sqrt{4} \\ & -\sqrt{x+1} & -\sqrt{x+2} & -\sqrt{x+3} \end{array} \right\} \text{etc.}$$

quae series quantopere convergat videamus casu $x=\frac{1}{2}$, eritque:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{4} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{4}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -\ \sqrt{\frac{3}{2}}-\ \sqrt{\frac{5}{2}}-\ \sqrt{\frac{7}{2}}-\ \sqrt{\frac{9}{2}} \end{array} \right\} \text{etc.}$$

et collectis terminis quicunque erit $\frac{1}{2}\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sqrt{n+1}-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$,

Digitized by Google

quod eo propius ad nihilum accedere debet, quo major fuerit numerus n, quocirca proxime erit $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=\sqrt{2(2n+1)}$. Sumtis enim quadratis habebimus $2n+1+2\sqrt{n(n+1)}=2(2n+1)$, ideoque $2\sqrt{n(n+1)}=2n+1$. Sumtis denuo quadratis fiet $4nn+4n=4nn+4n+1$, quae ratio utique proxime ad aequalitatem accedit. Ceterum hic notari meretur, veros valores pro fractionibus loco x assumtis tantopere esse transcendentes, ut nullis plane formulis analyticis exprimi queant. Quin etiam quilibet valor pro x assumtus ad peculiare transcendentium genus pertinebit.

§. 31. Antequam hanc speciem deseramus, adjungamus adhuc insigne Theorema circa convergentiam formularum multo generalius eo quod modo ante attulimus.

Theorema.

Sequens aequalitas: $(\beta-\alpha)\sqrt[\mu]{n^\nu}+\alpha\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}=\beta\sqrt[\mu]{(n+\frac{\alpha}{\beta})^\nu}$, *eo propius ad veritatem accedet, quo major sumatur numerus* n, *simulque quo minor fuerit fractio* $\frac{\alpha}{\beta}$, *si modo exponens* $\frac{\nu}{\mu}$ *unitate fuerit minor. At vero sumto* ν *negativo, ista aequalitas:*

$$\frac{(\beta-\alpha)}{\sqrt[\mu]{n^\nu}}+\frac{\alpha}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}}=\frac{\beta}{\sqrt[\mu]{(n+\frac{\alpha}{\beta})^\nu}}$$

sine posteriore conditione ad veritatem eo propius accedet, quo major fuerit numerus n *et quo minor fuerit fractio* $\frac{\alpha}{\beta}$. *Quin etiam sub iisdem conditionibus pro-*

xime per logarithmos erit tam:

$$(\beta - \alpha)\, l n + \alpha\, l (n + 1) = \beta\, l (n + \tfrac{\alpha}{\beta}),$$

quam $\frac{\beta - \alpha}{l n} + \frac{\alpha}{l (n+1)} = \frac{\beta}{l (n + \frac{\alpha}{\beta})}$.

Demonstratio.

§. 32. Sequitur hoc theorema ex solutione generali pro hac specie data, cujus terminus quicunque consistit his partibus: $\overline{1 + x}\,(n) + x\,(n + 1) - (n + x)$, atque eo minor evadit, quo major sumatur numerus n, existente x fractione unitate minore. Quod si jam ponamus $x = \frac{\alpha}{\beta}$ et $(x) = \sqrt[\mu]{x^\nu}$, ideoque etiam $(n) = \sqrt[\mu]{n^\nu}$, necesse est ut sit $\frac{\mu}{\nu} < 1$, quia alioquin termini infinitesimi non haberent differentias evanescentes. Hae autem substitutiones praebent formulas priores in theoremate datas. Quando vero fractio $\frac{\mu}{\nu}$ negativa accipitur, tum series proposita adeo in specie prima continebitur, siquidem ipsi termini infinitesimi in nihilum abeunt.

§. 33. Quo vis hujus theorematis intelligatur, notasse juvabit, has formulas quatuor casibus exacte cum veritate convenire, quorum primus est: si $\alpha = 0$; secundus, quo $\alpha = \beta$; tertius, quo $\nu = 0$; quartus denique locum habet si pro n accipiatur numerus infinitus. Praeterea vero datur casus quintus, quo in forma priore est $\mu = \nu$, sive $\sqrt[\mu]{n^\nu} = n$.

Digitized by Google

Species tertia serierum
quarum differentiae demum infinitesimae secundae evanescunt.

§. 34. Hoc igitur eveniet, quoties ipsi termini infinitesimi progressionem arithmeticam constituunt; formula igitur pro $\Sigma : x$ ante in superiore specie inventa ad hunc casum accommodabitur, si insuper singuli termini columnae tertiae verticalis adjungantur. Hoc modo terminus summatorius sequenti modo exprimetur:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{l} \quad\;\; + \;(1) \;\; + \;\; (2) \;\; + \;\; (3) \;\ldots\ldots + (n) \\ + \; x\,(1) + x\,\Delta 1 + x\,\Delta 2 + x\,\Delta 3 \;\ldots\ldots + x\,\Delta n \\ \quad\; x'\,\Delta 1 + x'\,\Delta^2 1 + x'\,\Delta^2 2 + x'\,\Delta^2 3 \;\ldots\ldots + x'\,\Delta^2 n \\ \quad\;\; - (x+1) - (x+2) - (x+3) \ldots\ldots - (x+n). \end{array} \right.$$

§. 35. Transmutemus nunc hanc expressionem in formam ad usum magis accommodatam, ac primo quidem loco x' scribamus ejus valorem $\frac{xx-x}{2}$; tum vero ob $\Delta n = (n+1) - (n)$ et $\Delta^2 n = (n+2) - 2\,(n+1) + (n)$, his valoribus substitutis postrema columna praecedentis formulae abibit in hanc formam:

$$\begin{array}{l} (n) + x\,(n+1) + \frac{\overline{xx-x}}{2}\,(n+2) \\ - x\,(n) - \overline{xx-x}\,(n+1) \\ + \frac{xx-x}{2}\,(n), \end{array}$$

qui termini collecti praebent:

$$\frac{xx-3x+2}{2}\,(n) - \overline{xx-2x}\,(n+1) + \frac{xx-x}{2}\,(n+2).$$

Ponamus igitur brev. gr. $\frac{xx-3x+2}{2}=p$; $xx-2x=q$ et $\frac{xx-x}{2}=r$, sicque terminus summatorius quaesitus sequenti forma exprimetur:

$$\Sigma : x = \begin{cases} \frac{3x-xx}{2}(1) + \frac{xx-x}{2}(2) \\ + p(1) - q(2) + r(3) - (x+1) \\ + p(2) - q(3) + r(4) - (x+2) \\ + p(3) - q(4) + r(5) - (x+3), \end{cases}$$

etc.

quae series jam vehementer converget.

§. 36. Hinc igitur novum Theorema, simile praecedenti, sed multo latius patens, possumus derivare, ponendo ut ante $x=\frac{\alpha}{\beta}$, $(n)=\sqrt[\mu]{n^\nu}$, ubi jam sufficit ut exponens $\frac{\nu}{\mu}$ binario sit minor; multo magis autem hunc exponentem negativum statuere licebit.

Theorema.

Ista aequalitas: $(\alpha\alpha-3\alpha\beta+2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu}-(2\alpha\alpha-4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}$ $+(\alpha\alpha-\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}=2\beta\beta\sqrt[\mu]{(n+\frac{\alpha}{\beta})^\nu}$, *eo propius ad veritatem accedet, quo major capiatur numerus* n *et quo minus fractio* $\frac{\alpha}{\beta}$ *ab unitate discrepet, dummodo* $\frac{\nu}{\mu}$ *binario sit minus. Tum vero, sumto* μ *negativo, erit plerumque multo accuratius:*

$$\frac{\alpha\alpha-3\alpha\beta+2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{n^\nu}}-\frac{(2\alpha\alpha-4\alpha\beta)}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}}+\frac{(\alpha\alpha-\alpha\beta)}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}}=\frac{2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{(n+\frac{\alpha}{\beta})^\nu}}.$$

Quin etiam pro formulis radicalibus logarithmi accipi poterunt.

§. 37. Veritas hujus theorematis etiam exacte subsistit his quatuor casibus: 1°) $\alpha = 0$; 2°) $\alpha = \beta$; 3°) $\nu = 0$ et 4°) $n = \infty$. Praeterea vero idem evenit, quando in forma priore est vel $\nu = \mu$ vel $\nu = 2\mu$, ita ut sit $\sqrt[\mu]{n^\nu}$, vel n vel nn. Habemus igitur sex casus, quibus hoc theorema nihil plane a veritate aberrat; unde facile intelligitur etiam reliquis casibus omnibus errorem non esse posse notabilem.

§. 38. Possumus etiam hoc theorema adhuc generalius reddere, loco n scribendo $\frac{n}{c}$ et ubique per debitam potestatem ipsius c multiplicando, quo fractiones tollantur. Sicque prior forma fiet:

$$(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu} - (2\alpha\alpha - 4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu}$$
$$+ (\alpha\alpha - \alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu} = 2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n + \frac{\alpha c}{\beta}\right)^\nu},$$

altera autem forma ab hac non discrepat, nisi quod radicalia in denominatorem ingrediuntur, id quod etiam de logarithmis est intelligendum.

§. 39. Operae pretium erit hoc theorema aliquo exemplo illustrasse. Sumatur igitur $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, fientque aequalitates in theoremate exhibitae:

$$3\sqrt[\mu]{n^\nu} + 6\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu} - \sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu} = 8\sqrt[\mu]{(n+\tfrac{1}{2}c)^\nu}$$

$$\frac{3}{\sqrt[\mu]{n^\nu}} + \frac{6}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}} - \frac{1}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}} = \frac{8}{\sqrt[\mu]{(n+\frac{1}{2})^\nu}}.$$

Applicemus formam priorem ad logarithmos, fietque:

$$3\,l n + 6\,l\,(n+c) - l\,(n+2c) = 8\,l\,(n+\tfrac{1}{2}c).$$

Sit nunc $n = 10$ et $c = 2$, ut prodeat:

$$3\,l\,10 + 6\,l\,12 - l\,14 = 8\,l\,11.$$

Facta igitur evolutione erit:

$$3\,l\,10 = 3{,}0000000 \qquad l\,14 = 1{,}1461280$$
$$6\,l\,12 = 6{,}4750872 \qquad 8\,l\,11 = 8{,}3311416$$
$$9{,}4750872 \quad \doteq \quad 9{,}4772696,$$

quorum differentia est 0,0021824, quae multo minor prodiisset, si numero n majorem valorem tribuissemus.

§. 40. Circa ipsum autem terminum summatorium seriei propositae imprimis notari convenit, tam differentiationem quam integrationem facile institui posse, sumto scilicet indice x variabili, quemadmodum hoc jam in specie prima fusius est ostensum, ubi ipse terminus summatorius $\Sigma : x$ tanquam applicata cujusdam curvae est consideratus, dum index x referebat abscissam, hocque respectu in calculo differentiali potissimum functiones inexplicabiles sum perscrutatus.

§. 41. Ex formula autem generali, pro termino sum-

matorio $\Sigma : x$ supra data evolvamus hic quoque casum seriei harmonicae, quo est: $\Sigma : x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}$ et quaeramus ejus valorem pro indice $x = \frac{1}{2}$, atque ob $(x) = \frac{1}{x}$, tum vero ob $p = \frac{3}{8}$; $q = -\frac{3}{4}$; $r = -\frac{1}{8}$, habebimus:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \left\{ \tfrac{5}{8} - \tfrac{1}{16} \begin{array}{l} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} \\ + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{20} \\ - \frac{1}{24} - \frac{1}{32} - \frac{1}{40} - \frac{1}{48} \\ - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{2}{9} \end{array} \right\} \text{etc.}$$

sive erit:

$$8\,\Sigma : \tfrac{1}{2} = \left\{ \tfrac{9}{2} \begin{array}{l} + \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} \\ + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{6}{5} \\ - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ - \frac{16}{3} - \frac{16}{5} - \frac{16}{7} - \frac{16}{9} \end{array} \right\} \text{etc.}$$

Contrahamus singulas columnas in unum terminum, eritque:

$$8\,\Sigma : \tfrac{1}{2} = \frac{6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9} + \text{etc.}$$

quae series utique magis convergit ea, quam specie secunda invenimus.

§. 42. Quod si autem terminos non contrahamus, sed eos, qui eundem habent denominatorem, colligamus, omissa serie infima habebimus:

$$8\,\Sigma : \tfrac{1}{2} = \left\{ \tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{1} + \tfrac{9}{2} \begin{array}{l} + \ 8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{etc.}\right) \\ - 16 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \text{etc.}\right), \end{array} \right.$$

sive loco superioris seriei scribendo $16\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \text{etc.}\right)$ habebimus:

$\frac{1}{2}\Sigma : \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} +$ etc.
Addamus utrinque $l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ etc. fiet [illegible] $- \frac{3}{4} + l\,2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, consequenter $\Sigma : \frac{1}{2} = 2 - 2\,l\,2$, qui valor egregie convenit cum eo qui in specie prima est datus.

SUPPLEMENTUM

DE FUNCTIONIBUS INEXPLICABILIBUS FORMAE:

$$\Pi : x = A.\,B.\,C.\,D.\,E \;\ldots\ldots\; X.$$

§. 1. Hic factores A, B, C, D, etc. sunt termini cujusdam seriei, indicibus 1, 2, 3, 4, etc. respondentes, et X terminus indici x respondens; factores autem, qui indicibus sequentibus $x+1$; $x+2$; $x+3$; etc. respondent, per X', X''. X''', etc. designabo. Hinc jam statim patet, fore $\Pi : (x+1) = X' . \Pi : x$ et $\Pi : (x+2) = X'.X''.\Pi : x$, et ita porro. Praecedentes vero erunt $\Pi : (x-1) = \frac{\Pi : x}{x}$ etc. Unde intelligitur sufficere, dummodo hae formulae pro valoribus ipsius x unitate minoribus assignentur.

§. 2. Quoties fuerit x numerus integer positivus, valores ipsius $\Pi : x$ sponte se produnt. Erit nempe $\Pi : 1 = A$;

Digitized by Google

$\Pi : 2 = AB$; $\Pi : 3 = ABC$; etc. Quando autem x non est numerus integer positivus, productum, quod charactere $\Pi : x$ designamus, erit functio inexplicabilis ipsius x, nisi forte factores A, B, C, D, etc. ita fuerint comparati, ut praecedentes a sequentibus destruantur, veluti evenit in hac forma: $\Pi : x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{x+1}$, quandoquidem hic manifesto est $\Pi : x = \frac{1}{x+1}$, vel etiam in hoc exemplo: $\Pi : x = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \ldots \ldots \frac{xx+2x}{(x+1)^2}$. Hinc enim erit: $\Pi : 1 = \frac{3}{2 \cdot 2}$; $\Pi : 2 = \frac{2}{3} = \frac{4}{2 \cdot 3}$; $\Pi : 3 = \frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot 4}$; $\Pi : 4 = \frac{3}{5} = \frac{6}{2 \cdot 5}$; $\Pi : 5 = \frac{7}{2 \cdot 6}$; etc. unde patet in genere fore $\Pi : x = \frac{x+2}{2(x+1)}$.

§. 3. Casus autem inexplicabiles, sumendis logarithmis, ad praecedentem dissertationem revocabuntur. Erit enim:

$$l\Pi : x = lA + lB + lC + \ldots + lX,$$

quae forma cum supra tractata comparata nobis dabit sequentes valores:

$$\Sigma : x = l\Pi : x;\ (1) = lA;\ (2) = lB;\ (3) = lC;\ \text{etc.}$$

et $(x) = lX$; tum vero erit $(x+1) = lX'$; $(x+2) = lX''$; etc. hocque consensu observato species supra tractatas ad praesentem casum accommodemus.

Species prima,

ubi logarithmi factorum infinitesimorum evanescunt, sive ubi factores infinitesimi unitati aequantur.

§. 4. Cum igitur pro hac prima specie, introductis valoribus modo datis, habeamus.

$$l\Pi : x = \begin{cases} lA + lB + lC + lD + \text{etc.} \\ -lX' - lX'' - lX''' - lX^{IV} - \text{etc.} \end{cases}$$

ad numeros ascendendo erit:

$$\Pi : x = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X^{IV}} \cdot \text{ etc.}$$

Hic nulla exempla subjungo, quia jam plura in calculo differentiali sunt evoluta.

Species secunda,

ubi factores infinitesimi inter se fiunt aequales.

§. 5. Tum enim eorum logarithmi etiam inter se erunt aequales, ideoque differentiae primae omnes evanescent. Huc igitur accommodemus formulam supra §. 25. inventam, eritque:

$$l\Pi : x = xlA \begin{cases} +\overline{1-x}lA + \overline{1-x}lB + \overline{1-x}lC \\ + \quad xlB + \quad xlC + \quad xlD \\ - \quad lX' \quad - \quad lX'' \quad - \quad lX''' \end{cases} \text{etc.}$$

unde ad numeros ascendendo habebimus:

$$\Pi : x = A^x \cdot \frac{A^{1-x}.B^x}{X'} \cdot \frac{B^{1-x}.C^x}{X''} \cdot \frac{C^{1-x}.D^x}{X'''} \cdot \text{ etc.}$$

Species tertia,

ubi termini infinitesimi constituunt progressionem geometricam.

§. 6. Tum enim logarithmi horum terminorum progressionem arithmeticam constituent, cujus ergo differentiae ecundae evanescent. Ut jam expressionem supra §. 35.

Digitized by Google

inventam ad hunc casum accomodemus, notandum est br. gr. positum fuisse $p = \frac{xx - 3x + 2}{2}$, $q = xx - 2x$ et $r = \frac{xx - x}{2}$, unde habebimus:

$$l\Pi : x = \left\{ \begin{array}{r} + plA + plB + plC \\ (\frac{3x - xx}{2}) lA - qlB - qlC - qlD \\ + \frac{xx - x}{2} lB + rlC + rlD + rlE \\ - lX' - lX'' - lX''' \end{array} \right\} \text{etc.}$$

Ponamus autem hic porro compendii causa $\frac{xx - 3x}{2} = m$ et $\frac{xx - x}{2} = n$, atque ad numeros ascendendo habebimus hanc expressionem:

$$\Pi : x = \frac{B^n}{A^m} \cdot \frac{A^p C^r}{B^q X'} \cdot \frac{B^p D^r}{C^q X''} \cdot \frac{C^p E^r}{D^q X'''} \cdot \text{ etc.}$$

§. 7. Hoc modo confido, doctrinam de functionibus inexplicabilibus, quae in Calculo differentiali non satis accurate et luculenter est exposita, fere penitus exhausisse, ita ut nihil amplius desiderari possit; quod eo magis necessarium videbatur, cum hoc argumentum plane sit novum et a nemine adhuc tractatum. Praecipue autem ejus summus usus in interpolatione serierum, atque hinc adeo symptomata linearum curvarum, quarum applicatae per functiones inexplicabiles exprimuntur, investiganda erat.

RECHERCHES SUR LES INTEGRALES PREMIERES DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU SECOND DEGRÉ À QUATRE ET À CINQ VARIABLES.

PAR

Mr. JEAN TREMBLEY.

Présenté à la Conférence le 9 Oct. 1805.

Mon but dans ce mémoire est uniquement d'appliquer aux équations à quatre et à cinq variables du second degré la méthode que j'ai donnée dans le mémoire précedent pour les équations à trois variables. Je traiterai d'abord des équations à quatre variables.

§. 1. Soit $\psi = F:(\Phi', \Phi'')$; ψ, Φ', Φ'' étant des fonctions de x, y, z, v, p, q, r, et ayant $\partial z = p\partial x + q\partial y + r\partial v$, ensorte que $p = (\frac{\partial z}{\partial x})$, $q = (\frac{\partial z}{\partial y})$, $r = (\frac{\partial z}{\partial v})$ et par conséquent $(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}) = (\frac{\partial p}{\partial y}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$; $(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}) = (\frac{\partial p}{\partial v}) = (\frac{\partial r}{\partial x})$; $(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}) = (\frac{\partial q}{\partial v}) = (\frac{\partial r}{\partial y})$, on fera pour abréger $n = (\frac{\partial\psi}{\partial x}) + p(\frac{\partial\psi}{\partial z})$; $m = (\frac{\partial\psi}{\partial y}) + q(\frac{\partial\psi}{\partial z})$; $l = (\frac{\partial\psi}{\partial v}) + r(\frac{\partial\psi}{\partial z})$; $n' = (\frac{\partial\Phi'}{\partial x}) + p(\frac{\partial\Phi'}{\partial z})$; $m' = (\frac{\partial\Phi'}{\partial y}) + q(\frac{\partial\Phi'}{\partial z})$; $l' = (\frac{\partial\Phi'}{\partial v}) + r(\frac{\partial\Phi'}{\partial z})$; $n'' = (\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) + p(\frac{\partial\Phi'}{\partial z})$; $m'' = (\frac{\partial\Phi''}{\partial y}) + q(\frac{\partial\Phi''}{\partial z})$; $l'' = (\frac{\partial\Phi''}{\partial v}) + r(\frac{\partial\Phi''}{\partial z})$; on aura maintenant, en différentiant successivement suivant x, y, v et prenant successivement Φ', Φ'',

Digitized by Google

$$n + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$
$$= \left(n' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right) F' : \Phi'$$
$$m + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$
$$= \left(m' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right) F' : \Phi'$$
$$l + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)$$
$$= \left(l' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\right) F' : \Phi'$$
$$n + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$
$$= \left(n'' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right) F' : \Phi''$$
$$m + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$
$$= \left(m'' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right) F' : \Phi''$$
$$l + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)$$
$$= \left(l'' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) F' : \Phi''.$$

Prenant maintenant l'équation :

$$(n + \text{etc.}) + \alpha\,(m + \text{etc.}) + \beta\,(l + \text{etc.}) = 0,$$

α et β étant des quantités indéterminées, on aura les deux équations de condition :

$$(n' + \text{etc.}) + \alpha\,(m' + \text{etc.}) + \beta\,(l' + \text{etc.}) = 0$$
$$(n'' + \text{etc.}) + \alpha\,(m'' + \text{etc.}) + \beta\,(l'' + \text{etc.}) = 0.$$

Donc $\beta = -\frac{(n' + \text{etc.}) - \alpha\,(m' + \text{etc.})}{l' + \text{etc.}} = -\frac{(n'' + \text{etc.}) - \alpha\,(m'' + \text{etc.})}{l'' + \text{etc.}}$.

Donc $\alpha = \frac{(n' + \text{etc.})(l'' + \text{etc.}) - (n'' + \text{etc.})(l' + \text{etc.})}{(m'' + \text{etc.})(l' + \text{etc.}) - (m' + \text{etc.})(l'' + \text{etc.})}$. On a de même

$$\beta = \frac{(n'' + \text{etc.})(m' + \text{etc.}) - (n' + \text{etc.})(m'' + \text{etc.})}{(m'' + \text{etc.})(l' + \text{etc.}) - (m' + \text{etc.})(l'' + \text{etc.})}.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation, on a en réduisant au même dénominateur :

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&(n + \text{etc.})\,(m'' + \text{etc.})\,(l' + \text{etc.}) \\
&\quad - (n + \text{etc.})\,(m' + \text{etc.})\,(l'' + \text{etc.}) \\
&+ (m + \text{etc.})\,(n' + \text{etc.})\,(l'' + \text{etc.}) \\
&\quad - (m + \text{etc.})\,(n'' + \text{etc.})\,(l' + \text{etc.}) \\
&+ (l + \text{etc.})\,(n'' + \text{etc.})\,(m' + \text{etc.}) \\
&\quad - (l + \text{etc.})\,(n' + \text{etc.})\,(m'' + \text{etc.}) = 0.
\end{aligned}
$$

§. 2. Maintenant si l'on développe les termes, qu'on opère les multiplications, et qu'on fasse pour abréger: $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) = a$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) = b$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) = c$, on aura:

$$
\begin{aligned}
&\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - b\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + c\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right)\left(\begin{aligned}&-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) \\ &-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\end{aligned}\right) \\
&+ \left(-la + l'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. - l''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\right) \\
&+ \left(-lb + l'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. - l''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right) \\
&+ \left(-lc + l''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. - l''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right) \\
&+ \left(ma - m'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. + m''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\right) \\
&+ \left(mb - m'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. + m''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right) \\
&+ \left(mc - m'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. + m''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$+\left(-na+n'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)\right.$$
$$\left.-n''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\right)$$
$$+\left(-nb+n'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)\right.$$
$$\left.-n''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)$$
$$+\left(-nc+n'\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\right)\right.$$
$$\left.-n''\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)\right)\left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)$$
$$+\left((m''l'-m'l'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+(m'l-ml')\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+(ml''-m''l)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$
$$+\left((n'l''-n''l')\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+(nl'-n'l)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+(n''l-nl'')\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$
$$+\left((n''m'-n'm'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+(n'm-nm')\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+(nm''-n''m)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)$$
$$+\left((m''l'-m'l'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+(m'l-ml')\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+(ml''-m''l)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$
$$+\left((n'l''-n''l')\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+(nl'-n'l)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+(n''l-nl'')\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$
$$+\left((n''m'-n'm'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+(n'm-nm')\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+(nm''-n''m)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)$$
$$+\left((m''l'-m'l'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(m'l-ml')\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)+(ml''-m''l)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$
$$+\left((n'l''-n''l')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(nl'-n'l)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)+(n''l-nl'')\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$
$$+\left((n''m'-n'm'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(n'm-nm')\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)+(nm''-n''m)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)$$
$$+n\,(m''l'-m'l'')-m\,(n''l'-n'l'')+l(n''m'-n'm'')=0.$$

§. 3. Faisons pour abréger $A'=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)$;
$A''=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)$; $B'=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)$;
$B''=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)$; $C'=\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)$;
$C''=\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)$;

$a^{(1)}=m''l'-m'l''$; $a^{(2)}=m'l-ml'$; $a^{(3)}=ml''-m''l$;
$b^{(1)}=n'l''-n''l'$; $b^{(2)}=nl'-n'l$; $b^{(3)}=n''l-nl''$;
$c^{(1)}=n''m'-n'm''$; $c^{(2)}=n'm-nm'$; $c^{(3)}=nm''-n''m$.

Or on a $(\frac{\partial p}{\partial x}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})$, $(\frac{\partial p}{\partial y}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$, $(\frac{\partial p}{\partial v}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v}) = (\frac{\partial r}{\partial x})$, $(\frac{\partial q}{\partial y}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})$,
$(\frac{\partial q}{\partial v}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v}) = (\frac{\partial r}{\partial y})$, $(\frac{\partial r}{\partial v}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial v^2})$.

Donc $(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial x}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y})^2$;

$(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x}) = (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial x}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})(\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y})(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v})$;

$(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y}) - (\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x}) = (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial y}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y})(\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v})$;

$(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v})^2$;

$(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x}) = (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y})(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v})(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v})$;

$(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y}) = (\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v})^2$.

L'équation deviendra donc :

$$
\begin{aligned}
&\left(a(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}) - b(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}) + c(\tfrac{\partial\psi}{\partial p})\right)
\begin{pmatrix}
-(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v}) + (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y}) \\
-(\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x})
\end{pmatrix} \\
&+ (A''l' - A'l'' - al)\left((\tfrac{\partial p}{\partial x})(\tfrac{\partial q}{\partial y}) - (\tfrac{\partial p}{\partial y})(\tfrac{\partial q}{\partial x})\right) \\
&+ (B''l' - B'l'' + A'm'' - A''m' - bl + ma)\left((\tfrac{\partial p}{\partial x})(\tfrac{\partial r}{\partial y}) - (\tfrac{\partial p}{\partial y})(\tfrac{\partial r}{\partial x})\right) \\
&+ (C''l' - C'l'' + A''n' - A'n'' - cl - na)\left((\tfrac{\partial q}{\partial x})(\tfrac{\partial r}{\partial y}) - (\tfrac{\partial q}{\partial y})(\tfrac{\partial r}{\partial x})\right) \\
&+ B'm'' - B''m' + bm)\left((\tfrac{\partial p}{\partial x})(\tfrac{\partial r}{\partial v}) - (\tfrac{\partial p}{\partial v})(\tfrac{\partial r}{\partial x})\right) \\
&+ (C'm'' - C''m' + B''n' - B\,n'' + cm - bn)\left((\tfrac{\partial q}{\partial x})(\tfrac{\partial r}{\partial v}) - (\tfrac{\partial q}{\partial v})(\tfrac{\partial r}{\partial x})\right) \\
&+ (C''n' - C'n'' - cn)\left((\tfrac{\partial q}{\partial y})(\tfrac{\partial r}{\partial v}) - (\tfrac{\partial q}{\partial v})(\tfrac{\partial r}{\partial y})\right) \\
&+ \left(a^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}) + a^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial p}) + a^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial p})\right)(\tfrac{\partial p}{\partial x}) \\
&+ \left(b^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}) + b^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial p}) + b^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial p}) + a^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}) + a^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial q}) + a^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial q})\right)(\tfrac{\partial p}{\partial y}) \\
&+ \left(c^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}) + c^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial p}) + c^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial p}) + a^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}) + a^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}) + a^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r})\right)(\tfrac{\partial p}{\partial v}) \\
&+ \left(b^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}) + b^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial q}) + b^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial q})\right)(\tfrac{\partial q}{\partial y}) \\
&+ \left(c^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}) + c^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial q}) + c^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial q}) + b^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}) + b^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}) + b^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r})\right)(\tfrac{\partial q}{\partial v}) \\
&+ \left(c^{(1)}(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}) + c^{(2)}(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}) + c^{(3)}(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r})\right)(\tfrac{\partial r}{\partial v}) \\
&+ na^{(1)} + mb^{(1)} + lc^{(1)} = 0.
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Soit maintenant l'équation générale :

$$N\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\right)\right.$$
$$+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)$$
$$+\alpha\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\right)$$
$$+\beta\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)+\gamma\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$
$$+\delta\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$
$$+\varepsilon\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)+\zeta\left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)$$
$$+\eta\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\theta\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\varkappa\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)+\lambda\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)+\upsilon\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)+\omega=0,$$

on a $N=a\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, $\alpha=A''l'-A'l''-al$,

$$\beta=B''l'-B'l''+A'm''-A''m'+am-bl,$$
$$\gamma=C''l'-C'l''+A''n'-A'n''-cl-na,$$
$$\delta=B'm''-B''m'+bm,$$
$$\varepsilon=C'm''-C''m'+B''n'-B'n''+cm-bn,$$
$$\zeta=C''n'-C'n''-cn,$$
$$\eta=a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right);$$
$$\theta=b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)$$
$$+a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right);$$
$$\varkappa=c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)$$
$$+a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)+a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right);$$
$$\lambda=b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right);$$
$$\mu=c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)$$
$$+b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)+b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right);$$
$$\nu=c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right);$$
$$\omega=n\,a^{(1)}+m\,b^{(1)}+l\,c^{(1)}.$$

Digitized by Google

§. 4. Supposons d'abord $N=0$, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta=0$, l'équation se réduira à celle-ci :

$$\eta\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+\theta\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right)+\varkappa\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial v}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\,\partial v}\right)+\nu\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)+\omega=0.$$

On a d'après cette supposition les sept équations suivantes : $a\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0$; $A''l'-A'l''-al=0$; $B''m'-B'm''-bm=0$; $C''n'-C'n''-cn=0$;

$$B''l'-B'l''-A''m'+A'm''-bl+am=0;$$
$$C''m'-C'm''-B''n'+B'n''-cm+bn=0;$$
$$C''l'-C'l''+A''n'-A'n''-cl-an=0.$$

Donc
$$A''B'-A'B''=-N\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0;$$
$$A''C'-A'C''=-N\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0;$$
$$B''C'-B'C''=-N\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0;$$
$$B'c-C'b=N\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)=0;$$
$$B'a-A'b=N\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)=0;$$
$$B''c-C''b=N\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)=0;$$
$$B''a-A''b=N\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)=0;$$
$$C''a-A''c=N\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)=0.$$

Donc $c=\frac{C''a}{A''}$, $b=\frac{B''a}{A''}$, $B'=\frac{B''A'}{A''}$, $C'=\frac{C''A'}{A''}$. Substituant ces valeurs dans la 2de, 3me et 4me équation, on a $A''l'-A'l''-al=0$, $A''m'-A'm''-am=0$, $A''n'-A'n''-an=0$, et les trois autres équations deviennent identiquement nulles. On tire de là :

$$a=\frac{A''l'-A'l''}{l}=\frac{A''m'-A'm''}{m}=\frac{A''n'-A'n''}{n}.$$

Digitized by Google

Donc $A''(l'm - lm') - A'(l''m - lm'') = 0$;
$A''(l'n - ln') - A'(l''n - ln'') = 0$;
$A''(m'n - mn') - A'(m''n - mn'') = 0$;
ou $A''a^{(2)} + A'a^{(3)} = 0$, $A''b^{(2)} + A'b^{(3)} = 0$, $A''c^{(2)} + A'c^{(3)} = 0$.
On tire de là: $\frac{A''}{A'} = -\frac{a^{(3)}}{a^{(2)}} = -\frac{b^{(3)}}{b^{(2)}}$, donc $a^{(3)}b^{(2)} - a^{(2)}b^{(3)} = 0$, ou $na^{(1)} + mb^{(1)} + lc^{(1)} = \omega = 0$. Ainsi dans ces suppositions le dernier terme de l'équation doit être nul. On a aussi $A'' = \frac{A'l'' + al}{l'} = \frac{A'm'' + am}{m'} = \frac{A'n'' + an}{n'}$; donc

$A'(l''m' - l'm'') + a(lm' - ml') = 0$;
$A'(l''n' - l'n'') + a(ln' - l'n) = 0$;
$A'(m''n' - m'n'') + a(mn' - m'n) = 0$,

ou $-A'a^{(1)} + aa^{(2)} = 0$, $A'b^{(1)} - ab^{(2)} = 0$, $-A'c^{(1)} + ac^{(2)} = 0$.
On a donc $a^{(1)} = \frac{aa^{(2)}}{A'}$, $b^{(1)} = \frac{ab^{(2)}}{A'}$, $c^{(1)} = \frac{ac^{(2)}}{A'}$, $a^{(3)} = -\frac{A''}{A'}a^{(2)}$, $b^{(3)} = -\frac{A''}{A'}b^{(2)}$, $c^{( )} = -\frac{A''}{A'}c^{(2)}$. Substituant ces valeurs dans les six dernières équations on a:

$$\eta = \frac{aa^{(2)}}{A'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) - \frac{A''}{A'}a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)$$
$$= \frac{a^{(2)}}{A'}\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) - A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right) = \frac{a^{(2)}}{A'}\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - a\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right) = 0,$$
$$\lambda = \frac{b^{(2)}}{A'}\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right) = \frac{b^{(2)}}{A'}\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - a\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right) = 0,$$
$$\nu = \frac{c^{(2)}}{A'}\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - A''\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right) = \frac{c^{(2)}}{B'}\left(b\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + B'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - B''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$
$$= \frac{c^{(2)}}{B'}\left(b\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + B'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - B''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right) = \frac{c^{(2)}}{B'}\left(b\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - b\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right) = 0.$$

On trouve par la même raison $\theta = \lambda = \mu = 0$. Ainsi l'équation proposée devient identiquement nulle. Il suit

Digitized by Google

de là qu'une équation de la forme:
$\eta\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+\theta\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)+\varkappa\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right)+\nu\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)=0$,
n'a point d'intégrale première de la forme $\psi=F:(\Phi',\Phi'')$, si A', B' sont réels; s'ils sont nuls, l'intégration devient beaucoup plus simple, comme nous le verrons plus bas. C'est le cas de l'équation que Mr. de *la Grange* trouve dans sa mécanique pag. 503:

$$gh\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+gh\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)=0,$$

équation qui résulte de la théorie du son en n'ayant égard qu'au mouvement horisontal de l'air. (On remarquera que j'appelle z ce que Mr. de *la Grange* appelle Φ et v ce qu'il appelle t).

§. 5. Maintenant, si l'on reprend les valeurs générales du §. 3. et qu'on multiplie α par $Y^{(1)}$, β par $Y^{(2)}$, γ par $Y^{(3)}$, δ par $Y^{(4)}$, ε par $Y^{(5)}$, ζ par $Y^{(6)}$, ($Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}\ldots Y^{(6)}$ étant de nouvelles indéterminées) on aura:

$$\begin{aligned}&Y^{(1)}\alpha+Y^{(2)}\beta+Y^{(3)}\gamma+Y^{(4)}\delta+Y^{(5)}\varepsilon+Y^{(6)}\zeta\\
&=(Y^{(1)}A''+Y^{(2)}B''+Y^{(3)}C'')l'-(Y^{(1)}A'+Y^{(2)}B'+Y^{(3)}C')l''\\
&-(Y^{(1)}a+Y^{(2)}b+Y^{(3)}c)l-(Y^{(2)}A''+Y^{(4)}B''+Y^{(5)}C'')m'\\
&+(Y^{(2)}A'+Y^{(4)}B'+Y^{(5)}C')m''+(Y^{(2)}a+Y^{(4)}b+Y^{(5)}c)m\\
&+(Y^{(3)}A''+Y^{(5)}B''+Y^{(6)}C'')n'-(Y^{(3)}A'-Y^{(5)}B'-Y^{(6)}C')n''\\
&-(Y^{(3)}a+Y^{(5)}b+Y^{(6)}c)n.\end{aligned}$$

Pour faire disparaître les quantités l', l'', m', m'', n', n'' je fais:

Digitized by Google

$Y^{(1)}A' + Y^{(2)}B' + Y^{(3)}C' = 0$, $Y^{(1)}A'' + Y^{(2)}B'' + Y^{(3)}C'' = 0$,
$Y^{(2)}A' + Y^{(4)}B' + Y^{(5)}C' = 0$, $Y^{(2)}A'' + Y^{(4)}B'' + Y^{(5)}C'' = 0$,
$Y^{(3)}A' + Y^{(5)}B' + Y^{(6)}C' = 0$, $Y^{(3)}A'' + Y^{(5)}B'' + Y^{(6)}C'' = 0$.

On tire de là $Y^{(1)} = -\frac{Y^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}$, $Y^{(3)} = -\frac{Y^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}$,
$Y^{(4)} = -\frac{Y^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}$, $Y^{(5)} = \frac{Y^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}$, $Y^{(6)} = -\frac{Y^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}$.
Faisons $Y^{(2)} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, nous aurons $Y^{(1)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2$
$Y^{(2)} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $Y^{(3)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $Y^{(4)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2$, $Y^{(5)} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$,
$Y^{(6)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2$, ce qui donne:
$Y^{(1)}a + Y^{(2)}b + Y^{(3)}c = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - b\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + c\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right) = N\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$,
$Y^{(2)}a + Y^{(4)}b + Y^{(5)}c = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(-a\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + b\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - c\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right) = -N\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$,
$Y^{(3)}a + Y^{(5)}b + Y^{(6)}c = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(a\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - b\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + c\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right) = N\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$.
On aura donc: $\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$
$+ \zeta\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2 + N\left(l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + m\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + n\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right) = 0$.

§. 6. Si l'on multiplie maintenant η par $P^{(1)}$, θ par $P^{(2)}$, $\varkappa$ par $P^{(3)}$, λ par $P^{(4)}$, μ par $P^{(5)}$, ν par $P^{(6)}$, ($P^{(1)}$, $P^{(2)} \ldots P^{(6)}$ étant de nouvelles indéterminées) on aura:

$$P^{(1)}\eta + P^{(2)}\theta + P^{(3)}\varkappa + P^{(4)}\lambda + P^{(5)}\mu + P^{(6)}\nu$$
$$= (P^{(1)}a^{(1)} + P^{(2)}b^{(1)} + P^{(3)}c^{(1)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + (P^{(1)}a^{(2)} + P^{(2)}b^{(2)} + P^{(3)}c^{(2)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)$$
$$+ (P^{(1)}a^{(3)} + P^{(2)}b^{(3)} + P^{(3)}c^{(3)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) + (P^{(2)}a^{(1)} + P^{(4)}b^{(1)} + P^{(5)}c^{(1)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$+ (P^{(2)}a^{(2)} + P^{(4)}b^{(2)} + P^{(5)}c^{(2)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) + (P^{(2)}a^{(3)} + P^{(4)}b^{(3)} + P^{(5)}c^{(3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)$$
$$+ (P^{(3)}a^{(1)} + P^{(5)}b^{(1)} + P^{(6)}c^{(1)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + (P^{(3)}a^{(2)} + P^{(5)}b^{(2)} + P^{(6)}c^{(2)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)$$
$$+ (P^{(3)}a^{(3)} + P^{(5)}b^{(3)} + P^{(6)}c^{(3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right).$$

Digitized by Google

Pour faire disparaitre les différentielles de Φ', Φ'', je fais:

$$P^{(1)}a^{(2)}+P^{(2)}b^{(2)}+P^{(3)}c^{(2)}=0,\quad P^{(1)}a^{(3)}+P^{(2)}b^{(3)}+P^{(3)}c^{(3)}=0,$$
$$P^{(2)}a^{(2)}+P^{(4)}b^{(2)}+P^{(5)}c^{(2)}=0,\quad P^{(2)}a^{(3)}+P^{(4)}b^{(3)}+P^{(5)}c^{(3)}=0,$$
$$P^{(3)}a^{(2)}+P^{(5)}b^{(2)}+P^{(6)}c^{(2)}=0,\quad P^{(3)}a^{(3)}+P^{(5)}b^{(3)}+P^{(6)}c^{(3)}=0.$$

On tire de là:

$$P^{(1)}=\frac{P^{(2)}(b^{(2)}c^{(3)}-b^{(3)}c^{(2)})}{c^{(2)}a^{(3)}-c^{(3)}a^{(2)}}=\frac{P^{(2)}n}{m},\quad P^{(3)}=\frac{P^{(2)}(b^{(3)}a^{(2)}-b^{(2)}a^{(3)})}{c^{(2)}a^{(3)}-c^{(3)}a^{(2)}}=\frac{P^{(2)}l}{m},$$
$$P^{(4)}=\frac{P^{(2)}(c^{(2)}a^{(3)}-c^{(3)}a^{(2)})}{b^{(2)}c^{(3)}-b^{(3)}c^{(2)}}=\frac{P^{(2)}m}{n},\quad P^{(5)}=\frac{P^{(2)}(a^{(2)}b^{(3)}-a^{(3)}b^{(2)})}{b^{(2)}c^{(3)}-b^{(3)}c^{(2)}}=\frac{P^{(2)}l}{n},$$
$$P^{(6)}=-\frac{P^{(3)}a^{(2)}-P^{(5)}b^{(2)}}{c^{(2)}}=\frac{P^{(2)}l^2}{mn}.$$

Je fais $P^{(2)}=mn$, et j'ai $P^{(1)}=n^2$, $P^{(2)}=mn$, $P^{(3)}=ln$, $P^{(4)}=m^2$, $P^{(5)}=lm$, $P^{(6)}=l^2$; ce qui donne:

$$l^2\eta+mn\theta+ln\varkappa+m^2\lambda+ml\mu+l^2\nu$$
$$=(na^{(1)}+mb^{(1)}+lc^{(1)})\left(n\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+m\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)$$
$$=\omega\left(n\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+m\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right).$$

Donc
$$(l^2\nu+m^2\lambda+n^2\eta+lm\mu+ln\varkappa+mn\theta)$$
$$-\omega\left(l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+m\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+n\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right)=0.$$

§. 7. On tire de l'équation finale du §. 5:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)=\frac{\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)-\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-Nl}{2\alpha}$$
$$\pm\frac{\sqrt{\begin{matrix}\beta^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2-2\beta\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\gamma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2-2\beta Nl\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+2\gamma Nl\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+N^2l^2\\ -4\alpha\delta\quad+4\alpha\varepsilon\qquad\qquad-4\alpha\zeta\qquad-4\alpha Nm\qquad-4\alpha Nn\end{matrix}}}{2\alpha}.$$

Or je vais prouver *a priori* que la quantité contenue sous le radical est un quarré dont la racine est $A\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+B\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+Nl$.

Digitized by Google

A et B étant des fonctions des coëfficiens α, β etc. En effet, en reprenant les valeurs du §. 3, on a:

$$\beta^2 - 4\alpha\delta = (B''l' - B'l'' - A'm'' + A''m' - ma - bl)^2 + 4N\left(a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) - a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right),$$

$$\gamma^2 - 4\alpha\zeta = (C''l' - C'l'' - A''n' + A'n'' - cl + an)^2 + 4N\left(b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right),$$

$$4\alpha\varepsilon - 2\beta\gamma = -2(B''l' - B'l'' - A'm'' + A''m' - ma - bl)(C''l' - C'l'' - A''n' + A'n'' - cl + an) - 4N\left(a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right) - 4N\left(b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) - b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)$$

$$2\beta l + 4\alpha m = 2l(B''l' - B'l'' - A'm'' + A''m' - am - bl) + 4a^{(3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right) + 4a^{(2)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)$$

$$2\gamma l - 4\alpha n = 2l(C''l' - C'l'' - A''n' + A'n'' - cl + an) + 4b^{(3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right) + 4b^{(2)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right).$$

Donc $(\beta^2 - 4\alpha\delta)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 + (4\alpha\varepsilon - 2\beta\gamma)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + (\gamma^2 - 4\alpha\zeta)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2$

$$- (2\beta Nl + 4\alpha Nm)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + (2\gamma Nl - 4\alpha Nn)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + N^2l^2$$

$$= (B''l' - B'l'' - A'm'' + A''m' - ma - bl)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2$$

$$+ (C''l' - C'l'' - A''n' + A'n'' - cl - an)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2$$

$$- 2(B''l' - B'l'' - A'm'' + A''m' - ma - bl) \times (C''l' - C'l'' - A''n' + A'n'' - cl + an)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$

$$+ 4N\left(a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 - a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 - a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2\right)$$

$$+ 4N\left(b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - b^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - b^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)$$

$$+ 4N\left(-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 + a^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) + a^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)$$

$$+ 4N\left(-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + b^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) + b^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)$$

$$-4N\left(a^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right.$$
$$\left.+a^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)$$
$$-4N\left(-b^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)+b^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right.$$
$$\left.-b^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+b^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)$$
$$-2Nl\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)(B''l'-B'l''-A'm''+A''m'-am-bl)$$
$$+2Nl\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)(C''l'-C'l''-A''n'+A'n''-cl+an)+N^2l^2$$

(en effaçant ce qui se détruit)

$$=(B''l'-B'l''-A'm''+A''m'-am-bl)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2$$
$$+(C''l'-C'l''-A''n'+A'n''-cl+an)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2$$
$$-2(B''l'-B'l''-A'm''+A''m'-am-bl)\times$$
$$(C''l'-C'l''-A''n'+A'n''-cl+an)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-2Nl\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)(B''l'-B'l''-A'm''+A''m'-am-bl)$$
$$+2Nl\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)(C''l'-C'l''-A''n'+A'n''-cl+an)+N^2l^2.$$

La racine quarrée de cette quantité est :

$$(B''l'-B'l''-A'm''+A''m'-am-bl)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-(C''l'-C'l''-A''n'+A'n''-cl+an)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+Nl.$$

La quantité contenue sous le signe radical est donc un quarré de la forme que j'ai assignée ci-dessus. On remarquera que si l'on fait $N=0$, on aura :

$$B''l'-B'l''-A'm''+A''m'-am-bl=\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta},$$
$$C''l'-C'l''-A''n'+A'n''-cl+an=\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta}.$$

Ainsi l'on obtiendra cette équation linéaire :

Digitized by Google

$$2\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+Nl$$
$$\pm\left(\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\pm Nl\right)=0.$$

On aura soin dans le calcul des quantités $\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta}$, $\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta}$ d'y faire $N=0$.

§. 8. Maintenant on tire de l'équation finale du §. 6:

$$l=-\frac{m\mu-n\varkappa+\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{2\nu}$$
$$\pm\frac{\sqrt{\begin{array}{l}\mu^2m^2+2\mu\varkappa mn+\varkappa^2n^2+4\nu m\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-4\nu n\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\omega^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\\-4\lambda\nu-4\nu\theta\quad-4\nu\eta-2\mu m\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-2\varkappa n\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\end{array}}}{2\nu}.$$

Or
$$\mu^2-4\lambda\nu=\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)^2$$
$$-4n'\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\right)+4n''\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)$$
$$-4n\omega\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right),$$

$$\varkappa^2-4\nu\eta=\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)^2$$
$$+4m'\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)-4m''\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right)$$
$$+4m\omega\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right),$$

$$2\mu\varkappa-4\nu\theta$$
$$=2\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$
$$\times\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right)$$
$$+4m'\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\right)+4n'\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right)$$
$$-4m''\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)-4n''\omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$
$$+4m\omega\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)+4n\omega\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)$$

Digitized by Google

$$4\nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-2\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=-\Big[2c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-2c^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-2c^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)$$
$$-2b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2-2b^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-2b^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)$$
$$+4c^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)+4c^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big],$$

$$4\nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2\varkappa\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=-\Big[2c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-2c^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-2c^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)$$
$$-2a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2-2a^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-2a^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)$$
$$+4c^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)+4c^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big].$$

On a donc:

$$(\mu^2-4\lambda\nu)m^2+(2\mu\varkappa-4\nu\theta)mn+(\varkappa^2-4\nu\eta)n^2+\Big(4\nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-2\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\Big)m\omega+\Big(4\nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2\varkappa\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\Big)n\omega+\omega^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2$$
$$=\Big(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big)^2m^2$$
$$+\Big(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big)^2n^2$$
$$+2\Big(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big)$$
$$\times\Big(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big)mn$$
$$-4m^2n'\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\Big)+4m^2n''\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\Big)$$
$$-4m^2n\omega\Big(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\Big)+4n^2m'\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\Big)$$
$$-4n^2m''\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\Big)+4mn^2\omega\Big(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\Big)$$
$$+4mnm'\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\Big)+4mnn'\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\Big)$$
$$-4mnm''\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\Big)-4mnn''\omega\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big)$$
$$+4m^2n\omega\Big(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\Big)+4mn^2\omega\Big(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\Big)$$
$$-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\omega m\Big(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big)$$
$$-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\omega n\Big(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\Big)$$
$$+(4m^2n'\omega-4mnm'\omega)\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\Big)$$
$$+(4mnm''\omega-4m^2n''\omega)\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\Big)$$
$$+(4mnn'\omega-4n^2m'\omega)\Big(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\Big)$$

Digitized by Google

$$+(4n^2m''\omega - 4mnn''\omega)\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right) + \omega^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2$$

= (en effaçant ce qui se détruit)

$$\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)^2 m^2$$
$$+\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)^2 n^2$$
$$+2\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$
$$\times\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)mn$$
$$-2\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right.$$
$$\left.-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)m\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$
$$-2\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right.$$
$$\left.a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)n\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\omega^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2,$$

quantité dont la racine quarrée est :

$$\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)m$$
$$+\left(c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right.$$
$$\left.-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)n-\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right).$$

On remarquera que si $\omega = 0$, on a :

$$c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)-b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-b^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-b^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)$$
$$=\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu},$$
$$c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)+c^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a^{(2)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-a^{(3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)$$
$$=\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta}.$$

Ainsi l'on obtiendra cette équation linéaire :

$$2\nu l+\mu m+\varkappa n-\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\pm\left(m\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu}+n\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta}-\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)=0.$$

On aura soin dans le calcul des quantités $\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu}$, $\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta}$ d'y faire $\omega = 0$.

§. 9. On tire aussi de l'équation finale du §. 5:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=\frac{\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-Nm}{2\delta}$$

$$\pm\frac{\sqrt{\begin{array}{l}\beta^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+2\beta\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2-2\beta Nm\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-2\varepsilon Nm\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+N^2m^2\\-4\alpha\delta-4\delta\gamma\qquad-4\delta\zeta\ -4\delta Nl\quad-4\delta Nn\end{array}}}{2\delta}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=-\frac{\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-Nn}{2\zeta}$$

$$\pm\frac{\sqrt{\begin{array}{l}\gamma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2-2\gamma\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2+2\gamma Nn\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-2\varepsilon Nn\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+N^2n^2\\-4\alpha\zeta+4\beta\zeta\qquad-4\delta\zeta\ -4\zeta Nl\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-4\zeta Nm\end{array}}}{2\zeta}$$

On tire aussi de l'équation finale du §. 6:

$$m=-\frac{\mu l-\theta n+\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{2\lambda}$$

$$\pm\frac{\sqrt{\begin{array}{l}\mu^2l^2+2\mu\theta ln+\theta^2n^2-2\mu\omega l\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-2\theta\omega n\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\omega^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2\\-4\lambda\nu-4\lambda\varkappa\quad-4\lambda\eta+4\lambda\omega l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+4\lambda\omega n\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\end{array}}}{2\lambda}$$

$$n=-\frac{\varkappa l-\theta m+\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{2\eta}$$

$$\pm\frac{\sqrt{\begin{array}{l}\varkappa^2l^2+2\varkappa\theta lm+\theta^2m^2-2\varkappa\omega l\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2\theta\omega m\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\omega^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\\-4\nu\eta-4\mu\eta\quad-4\lambda\eta+4\eta\omega l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+4\eta\omega m\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\end{array}}}{2\eta}$$

On prouvera comme ci-dessus que les quantités contenues sous les radicaux sont des quarrés parfaits, ensorte que joignant aux deux équations trouvées §. 7. et 8. ces quatre équations, après les avoir traitées précisement de la même manière, on aura, dis-je, les six formes d'équations suivantes:

$$2\nu l+(\mu-\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu})m+(\varkappa-\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta})n-2\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,$$
$$(\mu+\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu})l+2\lambda m+(\theta-\sqrt{\theta^2-4\lambda\eta})n-2\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,$$
$$(\varkappa+\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta})l+(\theta+\sqrt{\theta^2-4\lambda\eta})m+2\eta n-2\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0;$$
$$-2\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta})\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta})\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2Nl=0,$$
$$(\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta})\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-2\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-4\delta\zeta})\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2Nm=0,$$
$$-(\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta})\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-4\delta\zeta})\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-2\zeta\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2Nn=0.$$

§. 10. Il semble d'abord que les deux équations des §. 7. et 8. suffisaient et qu'il est inutile de reproduire ces équations sous de nouvelles formes, mais outre que ces formes différentes peuvent être utiles pour abréger le calcul, comme on le verra par les exemples que je donnerai plus bas, elles sont nécessaires pour surmonter une difficulté qui se présente dans le calcul. En effet si $N=0$, $\omega=0$, on peut tirer immédiatement de ces équations l'intégrale complète. Mais si ces quantités ne sont pas nulles, on ne voit pas comment il faut s'y prendre pour déterminer les coëfficiens des quantités N et ω

dans les termes $\beta^2 - 4\alpha\delta$, $\mu^2 - 4\lambda\nu$ etc. Mais on considérera que les quantités $\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta}$, $\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta}$, $\sqrt{\varepsilon^2-4\delta\zeta}$, qui doivent être prises telles qu'on y ait $N=0$, ont la même forme respectivement que les quantités β, γ, ε, il n'y a de différence que dans les signes. Prenant donc les valeurs de β, γ, ε et mettant devant chaque terme des coëfficiens indéterminés, puis retranchant respectivement ces quantités des radicaux $\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta}$, $\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta}$, $\sqrt{\varepsilon^2-4\delta\zeta}$, le reste doit être divisible par N, ce qui, si N n'est pas l'unité, fournit un moyen de déterminer quelques-uns des coëfficiens. De même les quantités $\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu}$, $\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta}$, $\sqrt{\theta^2-4\lambda\eta}$, qui doivent être prises telles qu'on y ait $\omega=0$ ont la même forme respectivement que les quantités μ, $\varkappa$, θ, il n'y a de différence que dans les signes. Prenant donc les valeurs de μ, $\varkappa$, θ, et mettant devant chaque terme des coëfficiens indéterminés, puis retranchant respectivement ces quantités des radicaux $\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu}$, $\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta}$, $\sqrt{\theta^2-4\lambda\eta}$, le reste doit être divisible par ω, ce qui, si ω n'est pas l'unité, fournit un moyen de déterminer quelques-uns des coëfficiens. Il est vrai qu'il peut y avoir des termes qui se détruisent, mais la comparaison des formes les fait aisément retrouver. On tirera ensuite les valeurs de l, m et n des trois dernières équa-

Digitized by Google

tions, et on les substituera dans les trois premières, l'on aura ainsi trois équations en $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ qui devront être identiquement nulles et l'on déterminera par là les coëfficiens indeterminés.

§. 11. Soit, par exemple: $N=0$, $\alpha=r$, $\beta=2r-q-1$, $\gamma=r+p+1$, $\delta=-2q-2$, $\varepsilon=2p-q+1$, $\zeta=p+1$, $\eta=-3r$, $\theta=-3r$, $\varkappa=4+3p+q-r$, $\lambda=-r$, $\mu=3+2p+q-r$, $\nu=2+p+q$, $\omega=r$. Comme $N=0$, on a exactement $\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta}=2r+q+1$, $\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta}=r-p-1$, $\sqrt{\varepsilon^2-4\delta\zeta}=2p+q+3$. Comme ω n'est pas nul, je fais $\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu}=\alpha'+\beta'p+\gamma'q+\delta'r$, $\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta}=\alpha''+\beta''p+\gamma''q+\delta''r$, $\sqrt{\theta^2-4\lambda\nu}=\alpha'''+\beta'''p+\gamma'''q+\delta'''r$. Il est vrai que θ ne contient que r, mais la forme des termes $\theta^2-4\lambda\nu$ me prescrit la forme que j'ai adoptée. Je fais maintenant:

$$\underset{-9}{\alpha'^2}+\underset{-12}{2\alpha'\beta'p}+\underset{-6}{2\alpha'\gamma'q}+\underset{-2}{2\alpha'\delta'r}+\underset{-4}{\beta'^2p^2}+\underset{-4}{2\beta'\gamma'pq}+2\beta'\delta'pr+\underset{-1}{\gamma'^2q^2}+\underset{-2}{2\gamma'\delta'qr}+\underset{-1}{\delta'^2r^2}.$$

Cette quantité doit être divisible par $\omega=r$, ce qui donne $\alpha'=3$, $\beta'=2$, $\gamma'=1$ et $\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu}=3+2p+q+\delta'r$. J'ai ensuite:

$$\underset{-16}{\alpha''^2}+\underset{-24}{2\alpha''\beta''p}+\underset{-8}{2\alpha''\gamma''q}+\underset{-16}{2\alpha''\delta''r}+\underset{-9}{\beta''^2p^2}+\underset{-6}{2\beta''\gamma''pq}+\underset{-6}{2\beta''\delta''pr}+\underset{-1}{\gamma''^2q^2}+\underset{-10}{2\gamma''\delta''qr}+\underset{-1}{\delta''^2r^2}.$$

Cette quantité doit aussi être divisible par $\omega=r$, ce qui donne $\alpha''=4$, $\beta''=3$, $\gamma''=1$ et $\sqrt{\varkappa^2-4\eta\nu}=4+3p+q+\delta''r$. J'ai en fin:

$$\alpha'''^2+2\alpha'''\beta'''p+2\alpha'''\gamma'''q+\underset{-8}{2\alpha'''\delta'''r}+\beta'''^2p^2+2\beta'''\gamma'''pq+\underset{-4}{2\beta'''\delta'''pr}+\gamma'''^2q^2+\underset{-4}{2\gamma'''\delta'''qr}+\underset{-9}{\delta'''^2r^2}.$$

Cette quantité doit aussi être divisible par $\omega = r$, ce qui donne $\alpha''' = 0$, $\beta''' = 0$, $\gamma''' = 0$ et $\sqrt{\theta^2 - 4\lambda\nu} = \delta''' r$. Substituant ces valeurs dans les six équations du §. 9, on a les équations suivantes :

$$(4 + 2p + 2q)l - (\delta' r + r)m - (\delta'' r - r)n - 2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$(6 + 4p + 2q + \delta' r - r)l - 2rm - (\delta''' r + 3r)n - 2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0,$$
$$(8 + 6p + 2q + \delta'' r - r)l + (\delta''' r - 3r)m - 6rn - 2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$-2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + 4r\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - 2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$-(2q + 2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + (4q + 4)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - (2q + 2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$-(2p + 2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + (4p + 4)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - (2p + 2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0.$$

Ce cas-ci fait exception à la règle générale, parceque la supposition de $N = 0$, fait disparaitre les quantités l, m, n des trois dernières équations, lesquelles se réduisent à celle-ci : $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$. On tirera des trois premières équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, et on les substituera dans celle-ci, ce qui donnera $\delta' = \delta'' = \delta''' = 1$; l'on aura donc les trois équations suivantes :

$$(4 + 2p + 2q)l - 2rm - 2rn - 2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$(6 + 4p + 2q)l - 2rm - 4rn - 2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0,$$
$$(8 + 6p + 2q)l - 2rm - 6rn - 2r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0.$$

On tirera de ces équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et l'on aura :

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial v + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ \frac{(2\partial r + 3\partial q + 4\partial p)l + (\partial r + 2\partial q + 3\partial p)(pl - rn) + (\partial r + \partial q + \partial p)(ql - rm)}{r}.$$

Digitized by Google

Faisant $ql - rm = 0$, $pl - rn = 0$, on a $\frac{l}{m} = \frac{r}{q}$, $\frac{l}{n} = \frac{r}{p}$, donc $l = r$, $m = q$, $n = p$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$. Donc $\partial\psi = \partial z + 4\partial p + 3\partial q + 2\partial r$, et $\psi = z + 4p + 3q + 2r$. Faisant $l = 0$, $ql - rm = 0$, on a $m = 0$, donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0$, $pl - rn = -rn = -r\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$, donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -1$, ce qui donne $\partial\psi = -\partial x + 3\partial p + 2\partial q + \partial r$, et $\psi = -x + 3p + 2q + r$. Faisant $l = 0$, $pl - rn = 0$, on a $n = 0$, donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0$, $pl - rm = -rm = -r\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -1$, ce qui donne $\partial\psi = -\partial y + \partial p + \partial q + \partial r$ et $\psi = -y + p + q + r$. L'intégrale complète est donc $4p + 3q + 2r + z = F:(3p + 2q + r - x), (p + q + r - y)$.

§. 12. Soit $N = 0$, $\alpha = r - 1$, $\beta = 2r - q - 3$, $\gamma = r + p$, $\delta = -2q - 2$, $\varepsilon = 2p + 1 - q$, $\zeta = p + 1$, $\eta = 1 - 2q - 3r$, $\theta = 4 + 2p - q - 3r$, $\varkappa = 5 + 3p + q - r$, $\lambda = 2 + p - r$, $\mu = 4 + 2p + q - r$, $\nu = 2 + p + q$, $\omega = 1 + p + q + r$. Comme $N = 0$, on a exactement $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta} = 2r + q - 1$, $\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\zeta} = r - p - 2$, $\sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta} = 2p + q + 3$. Comme ω n'est pas nul, je fais $\sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu} = \alpha' + \beta' p + \gamma' q + \delta' r$, $\sqrt{\varkappa^2 - 4\nu\eta} = \alpha'' + \beta'' p + \gamma'' q + \delta'' r$, $\sqrt{\theta^2 - 4\lambda\nu} = \alpha''' + \beta''' p + \gamma''' q + \delta''' r$. Je fais :

$$\alpha'^2 + 2\alpha'\beta' p + 2\alpha'\gamma' q + 2\alpha'\delta' r + \beta'^2 p^2 + 2\beta'\gamma' pq + 2\beta'\delta' pr \substack{+\\-1} \gamma'^2 q^2 \substack{+\\-2} 2\gamma'\delta' qr \substack{+\\-1} \delta'^2 r^2$$

$$= (1 + p + q + r)(a' + b'p + c'q + \partial' r)$$

$$= a' + \substack{a'\\+b'}p + \substack{a'\\+c'}q + \substack{a'\\+\partial'}r + b'p^2 + \substack{b'\\+c'}pq + \substack{c'\\+\partial'}pr + c'q^2 + \substack{c'\\+\partial'}qr + \partial' r^2.$$

On trouve en comparant $a' = \alpha'^2$, $b' = \beta'^2$, $c' = \gamma'^2 - 1$, $\partial' = \delta'^2 - 1$, $\alpha' = \beta'$, $\gamma' = \delta'$, $\alpha' - \gamma' = \pm 1$. Prenant le signe supérieur, on a $\sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu} = \alpha' + \alpha' p + (\alpha' - 1)q + (\alpha' - 1)r$.

Je fais ensuite :

$$\begin{matrix} \alpha''^2 & +2\alpha''\beta' p & +2\alpha''\gamma'' q & +2\alpha''\delta'' r & +\beta''^2 p^2 & +2\beta''\gamma'' pq & +2\beta''\delta'' pr & +\gamma''^2 q^2 & +2\gamma''\delta'' qr & +\delta''^2 r^2 \\ -17 & -26 & -22 & -14 & -9 & -14 & -6 & -9 & -10 & -1 \end{matrix}$$

$$= (1 + p + q + r)(a'' + b'' p + c'' q + \partial'' r)$$

$$= \begin{matrix} a'' & +a'' p & +a'' q & +a'' r & +b'' p^2 & +b'' pq & +b'' pr & +c'' q^2 & +c'' qr & +\partial'' r^2 \\ & +b'' & +c'' & +\partial'' & & +c'' & +\partial'' & & +\partial'' & \end{matrix} .$$

On trouve en comparant $a'' = \alpha''^2 - 17$, $b'' = \beta''^2 - 9$, $c'' = \gamma''^2 - 9$, $\partial'' = \delta''^2 - 1$, $\alpha'' = \beta''$, $\gamma'' = \delta''$, $\alpha'' - \gamma'' = \pm 2$. Prenant le signe supérieur, on a :

$$\sqrt{\varkappa^2 - 4\eta\nu} = \alpha'' + \alpha'' p + (\alpha'' - 2) q + (\alpha'' - 2) r.$$

Je fais enfin :

$$\begin{matrix} \alpha'''^2 & +2\alpha'''\beta''' p & +2\alpha'''\gamma''' q & +2\alpha'''\delta''' r & +\beta'''^2 p^2 & +2\beta'''\gamma''' pq & +2\beta'''\delta''' pr & +\gamma'''^2 q^2 & +2\gamma'''\delta''' qr & +\delta'''^2 r^2 \\ -8 & -12 & -8 & -4 & -4 & -4 & & -1 & +2 & +3 \end{matrix}$$

$$= (1 + p + q + r)(a''' + b''' p + c''' q + \partial'' r)$$

$$= \begin{matrix} a''' & +a''' p & +a''' q & +a''' r & +b''' p^2 & +b''' pq & +b''' pr & +\epsilon''' q^2 & +c'' qr & +\partial'' r^2 \\ & +b''' & +c''' & +\partial'' & & +c''' & +\partial'' & & +\partial''' & \end{matrix} .$$

On a en comparant : $a''' = \alpha'''^2 - 8$, $b''' = \beta'''^2 - 4$, $c''' = \gamma'''^2 - 1$, $\partial''' = \delta'''^2 + 3$, $\alpha''' = \beta'''$, $\gamma''' = \delta'''$, $\alpha''' - \gamma''' = \pm 1$. Prenant le signe supérieur, on a :

$$\sqrt{\theta^2 - 4\lambda\eta} = \alpha''' + \alpha''' p + (\alpha''' - 1) q + (\alpha''' - 1) r.$$

Substituant ces valeurs dans les six équations du §. 9, on a les équations suivantes :

$$(4 + 2p + 2q) l + (4 - \alpha' + (2 - \alpha')p + (2 - \alpha')q - \alpha' r) m$$
$$+ (5 - \alpha'' + (3 - \alpha'')p + (3 - \alpha'')q + (1 - \alpha'')r) n$$
$$- 2(1 + p + q + r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$

$$(4+\alpha'+(2+\alpha')p+\alpha'q+(\alpha'-2)r)l+(4+2p-2r)m$$
$$+(4-\alpha'''+(2-\alpha''')p-\alpha'''q-(\alpha'''+2)r)n$$
$$-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,$$
$$(5+\alpha''+(3+\alpha'')p+(\alpha''-1)q+(\alpha''-3)r)l$$
$$+(4+\alpha'''+(2+\alpha''')p+(\alpha'''-2)q+(\alpha'''-4)r)m+(2-4q-6r)n$$
$$-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,$$
$$(2-2r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(4r-4)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)+(2-2r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,$$
$$-(2+2q)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(4+4q)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)-(2+2q)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,$$
$$-(2+2p)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(4+4p)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)-(2+2p)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0.$$

Les trois dernières équations se réduisent à celle-ci: $\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)-2\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0$, si l'on y substitue les valeurs de $\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ tirées des trois premières, on aura $\alpha'=2$, $\alpha''=3$, $\alpha'''=2$. On aura donc les trois équations:

$$(4+2p+2q)l+(2-2r)m+(2-2r)n$$
$$-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,$$
$$(6+4p+2q)l+(4+2p-2r)m+(2-2q-4r)n$$
$$-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,$$
$$(8+6p+2q)l+(6+4p-2r)m+(2-4q-6r)n$$
$$-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0.$$

On tirera de ces équations les valeurs de $\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et l'on aura:

$$\partial\psi=\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\partial v+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+\frac{(4\partial p+3\partial q+2\partial r)l+(3\partial p+\text{[illegible]}\partial q+\partial r)(pl+m\text{[illegible]}rn)+(\partial p+\text{[illegible]}+\partial r)(\text{[illegible]}m+n)+(\text{[illegible]}\partial p+\partial r)(pm-qn)}{1+p+q+r}.$$

Faisant $pm-qn=0$, on a $\frac{m}{n}=\frac{q}{p}$, ce qui donne $m=q$, $n=p$ et

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial v + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$

$$+ \frac{(4\partial p + 3\partial q + 2\partial r)l + (3\partial p + 2\partial q + \partial r)(pl + q - rp) + (\partial p + \partial q + \partial r)(ql - rq + p)}{1 + p + q + r}.$$

Faisant $l = 1 + r = \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$ ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, on a $\partial\psi = \partial v + \partial z$

$$+ \frac{(4\partial p + 3\partial q + 2\partial r)(1 + r) + (3\partial p + 2\partial q + \partial r)(p + q) + (\partial p + \partial q + \partial r)(p + q)}{1 + p + q + r}$$

$= \partial v + \partial z + (4\partial p + 3\partial q + 2\partial r)$ et $\psi = v + z + 4p + 3q + 2r$. Faisant $l = r$, $n = p$, $m = 1 + q$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0$, on a $\partial\psi = \partial y + \partial z + 3\partial p + 2\partial q + \partial r$, et $\psi = y + z + 3p + 2q + r$. Faisant $l = r$, $n = p + 1$, $m = q$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, on a $\partial\psi = \partial x + \partial z + \partial p + \partial q + \partial r$, et $\psi = x + z + p + q + r$. L'intégrale est donc :

$4p + 3q + 2r + v + z = \mathrm{F} : (3p + 2q + r + y + z)$, $(p + q + r + x + z)$.

§. 13. Soit $\mathrm{N} = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 2r - 4$, $\gamma = r - 2$, $\delta = -2q - 3$, $\varepsilon = 2p - q$, $\zeta = p + 1$, $\eta = 1 - 2q - 4r$, $\theta = 4 + 2p - q - 4r$, $\varkappa = 6 + 4p + 2q - r$, $\lambda = 2 + p - r$, $\mu = 4 + 2p + q - r$, $\nu = 2 + p + q$, $\omega = 1 + p + q + r$. On a $\beta^2 - 4\alpha\delta = 4r^2 - 16r + 4 - 8q$, je fais $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta} = \alpha' + \alpha'' q + \alpha''' r$. On a $\gamma^2 - 4\alpha\zeta = r^2 - 4r + 8 + 4p$, je fais $\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\zeta} = \gamma' + \gamma'' p + \gamma''' r$. On a $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4p^2 + 4pq + q^2 + 12p + 8q + 12$, je fais $\sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta} = \beta' + \beta'' p + \beta''' q$. Comme on a $\mathrm{N} = 1$,

Digitized by Google

il ne résulte de là aucun moyen de déterminer les coëfficiens, nous les laisserons donc tels qu'ils sont. Je fais maintenant : $\sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu} = \delta' + \delta'' p + \delta''' q + \delta^{IV} r$,

$$\sqrt{\varkappa^2 - 4\nu\eta} = \varepsilon' + \varepsilon'' p + \varepsilon''' q + \varepsilon^{IV} r,$$

$$\sqrt{\theta^2 - 4\lambda\eta} = \zeta' + \zeta'' p + \zeta''' q + \zeta^{IV} r.$$

Je fais :

$$\delta'^2 + 2\delta'\delta'' p + 2\delta'\delta''' q + 2\delta'\delta^{IV} r + \delta''^2 p^2 + 2\delta''\delta''' pq + 2\delta''\delta^{IV} pr \underset{-1}{+ \delta'''^2 q^2} \underset{-2}{+ 2\delta'''\delta^{IV} qr} \underset{-1}{+ \delta^{IV2} r^2}$$

$$= (1 + p + q + r)(a' + b' p + c' q + \partial' r)$$

$$= a' \underset{+b'}{+ a'p} \underset{+c'}{+ a'q} \underset{+\partial'}{+ a'r} + b'p^2 \underset{+c'}{+ b'pq} \underset{+\partial'}{+ b'pr} + c'q^2 \underset{+\partial'}{+ c'qr} + \partial' r^2.$$

On trouve en comparant $a' = \delta'^2$, $b' = \delta''^2$, $c' = \delta'''^2 - 1$, $\partial' = \delta^{IV2} - 1$, $\delta' = \delta''$, $\delta''' = \delta^{IV}$, $\delta' - \delta''' = \pm 1$. Prenant le signe supérieur, on a :

$$\sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu} = \delta' + \delta' p + (\delta' - 1) q + (\delta' - 1) r.$$

Je fais ensuite :

$$\underset{-28}{\varepsilon'^2} \underset{-44}{+ 2\varepsilon'\varepsilon'' p} \underset{-36}{+ 2\varepsilon'\varepsilon''' q} \underset{-20}{+ 2\varepsilon'\varepsilon^{IV} r} \underset{-16}{+ \varepsilon''^2 p^2} \underset{-24}{+ 2\varepsilon''\varepsilon''' pq} \underset{-8}{+ 2\varepsilon''\varepsilon^{IV} pr} \underset{-12}{+ \varepsilon'''^2 q^2} \underset{-12}{+ 2\varepsilon'''\varepsilon^{IV} qr} \underset{-1}{+ \varepsilon^{IV2} r^2}$$

$$= (1 + p + q + r)(a'' + b'' p + c'' q + \partial'' r)$$

$$= a'' \underset{+b''}{+ a''p} \underset{+c''}{+ a''q} \underset{+\partial''}{+ a''r} + b''p^2 \underset{+c''}{+ b''pq} \underset{+\partial''}{+ b''pr} + c''q^2 \underset{+\partial''}{+ c''qr} + \partial'' r^2.$$

On trouve en comparant $a'' = \varepsilon'^2 - 28$, $b'' = \varepsilon''^2 - 16$, $c'' = \varepsilon'''^2 - 12$, $\partial'' = \varepsilon^{IV2} - 1$, $\varepsilon' = \varepsilon''$, $\varepsilon' - \varepsilon''' = \pm 2$, $\varepsilon' - \varepsilon^{IV} = \pm 3$, $\varepsilon''' - \varepsilon^{IV} = \pm 1$. Prenant le signe supérieur, on a $\sqrt{\varkappa^2 - 4\nu\eta} = \varepsilon' + \varepsilon' p + (\varepsilon' - 2) q + (\varepsilon' - 3) r$. Je fais enfin :

$$\begin{aligned}&\underset{-8}{\zeta'^2}+\underset{-12}{2\zeta'\zeta''p}+\underset{-8}{2\zeta'\zeta'''q}+\underset{-4}{2\zeta'\zeta^{IV}r}+\underset{-4}{\zeta''^2p^2}+\underset{-4}{2\zeta''\zeta'''pq}+2\zeta''\zeta^{IV}pr+\underset{-1}{\zeta'''^2q^2}+2\zeta'''\zeta^{IV}qr+\zeta^{IV2}r^2\\ &=(1+p+q+r)(a'''+b'''p+c'''q+\partial'''r)\\ &=\underset{+b'''}{a'''}+\underset{+c'''}{a'''p}+\underset{+\partial'''}{a'''q}+a'''r+b'''p^2+\underset{+c'''}{b'''pq}+\underset{+\partial'''}{b'''pr}+c'''q^2+\underset{+\partial'''}{c'''qr}+\partial'''r^2.\end{aligned}$$

On trouve en comparant $a'''=\zeta'^2-8$, $b'''=\zeta''^2-4$, $c'''=\zeta'''^2-1$, $\partial'''=\zeta^{IV2}$, $\zeta'=\zeta''$, $\zeta'-\zeta'''=\pm 1$, $\zeta'-\zeta^{IV}=\pm 2$, $\zeta'''-\zeta^{IV}=\pm 1$. Prenant le signe supérieur, on a $\sqrt{\theta^2-4\lambda\eta}=\zeta'+\zeta'p+(\zeta'-1)q+(\zeta'-2)r$. Substituant ces valeurs dans les six équations du §. 9 on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}&(4+2p+2q)l+(4-\delta'+(2-\delta')p+(2-\delta')q-\delta'r)m\\ &\quad+(6-\varepsilon'+(4-\varepsilon')p+(4-\varepsilon')q+(2-\varepsilon')r)n\\ &\quad-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(4+\delta'+(2+\delta')p+\delta'q+(\delta'-2)r)l+(4+2p-2r)m\\ &\quad+(4-\zeta'+(2-\zeta')p-\zeta'q-(2+\zeta')r)n\\ &\quad-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(6+\varepsilon'+(4+\varepsilon')p+\varepsilon'q+(\varepsilon'-4)r)l+(4+\zeta'+(2+\zeta')p\\ &\quad+(\zeta'-2)q+(\zeta'-6)r)m+(2-4q-8r)n\\ &\quad-2(1+p+q+r)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+((2+\alpha''')r+\alpha''q+\alpha'-4)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\\ &\quad-((1+\gamma''')r+\gamma''p+\gamma'-2)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2l=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&((2-\alpha''')r-\alpha''q-\alpha'-4)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(4q+6)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)+((2-\beta'')p\\ &\quad-(\beta'''+1)q-\beta')\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2m=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&((\gamma'''-1)r+\gamma''p+\gamma'+2)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\\ &+((\beta''+2)p+(\beta'''-1)q+\beta')\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)-(2p+2)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)-2n=0.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Je représente, pour abréger ces six équations de cette manière:

$$A'l+A''m+A'''n-2\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,\quad a'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+a''\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+a'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=2l,$$
$$B'l+B''m+B'''n-2\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,\quad b'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+b''\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+b'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=2m,$$
$$C'l+C''m+C'''n-2\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,\quad c'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+c''\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+c'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=2n.$$

Substituant les valeurs de l, m, n tirées des trois dernières équations dans la première, on a:

$$\left[\begin{matrix}A'a'+A''b'+A'''c'\\ -4\omega\end{matrix}\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+(A'a''+A''b''+A'''c'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$+(A'a'''+A''b'''+A'''c''')\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,$$

ce qui donne les trois équations:

$$A'a'+A''b'+A'''c'-4\omega=0,\quad A'a''+A''b''+A'''c''=0,$$
$$A'a'''+A''b'''+A'''c'''=0.$$

Substituant les valeurs dans la première équation et réduisant, on a:

$$4\delta'-4\alpha'+\alpha'\delta'-2\varepsilon'+6\gamma'-\gamma'\varepsilon'$$
$$+(4\delta'-2\alpha'+\alpha'\delta'+6\gamma''-\gamma''\varepsilon'-2\varepsilon'+4\gamma'-\gamma'\varepsilon')p$$
$$+(4\delta'-2\alpha'+\alpha'\delta'-4\alpha''+\alpha''\delta'+4\gamma'-2\varepsilon'-\gamma'\varepsilon')q$$
$$+(2+2\delta'+\alpha'\delta'-4\alpha'''+\alpha'''\delta'+6\gamma'''-\gamma'''\varepsilon'+2\gamma'-\varepsilon'-\gamma'\varepsilon')r$$
$$+(\alpha''\delta'-2\alpha'')q^2+(\alpha''\delta'-2\delta'-2\alpha'''+\alpha'''\delta'+4\gamma'''-\gamma'''\varepsilon'+\varepsilon')qr$$
$$+(\alpha'''\delta'-2\delta'+2\gamma'''-\gamma'''\varepsilon'+\varepsilon'-2)r^2$$
$$+(4\gamma''-\gamma''\varepsilon')p^2+\left(\begin{matrix}4\gamma''-\gamma''\varepsilon'\\+\alpha''\delta'-2\alpha''\end{matrix}\right)pq$$
$$+\left(\begin{matrix}2\gamma''-\gamma''\varepsilon'+4\gamma'''-\gamma'''\varepsilon'+\varepsilon'\\-2\delta'-2\alpha'''+\alpha'''\delta'\end{matrix}\right)pr=0.$$

Le coëfficient de p^2 donne $\gamma'^2=0$. Le coëfficient de q^2

donne $\alpha''=0$, ce qui fait évanouir le coëfficient de pq. Le coëfficient de r^2 peut se mettre sous cette forme: $(\alpha'''-2)\delta'+(\gamma'''-1)(\epsilon'+2)$, ce qui donne $\alpha'''=2$, $\gamma'''=1$, ce qui fait évanouir le coëfficient de qr. Cela posé, les coëfficiens des quatre premiers termes deviennent identiques en faisant $\alpha'=\gamma'$, et donnent l'équation $4\delta'-2\epsilon'+\alpha'\delta'+2\alpha'-\alpha'\epsilon'=0$, ce qui donne $\alpha'=0$, $\gamma'=0$, $\epsilon'=2\delta'$. Substituant maintenant les valeurs dans la 2^de^ équation et réduisant, on a:

$$\begin{aligned}
&8-6\delta'+6\beta'-2\beta'\delta'+(16-10\delta'+4\beta'-2\beta'\delta'+6\beta''-2\beta''\delta')p\\
&+(14-8\delta'+4\beta'-2\beta'\delta'+6\beta'''-2\beta'''\delta')q\\
&+(16-6\delta'+2\beta'-2\beta'\delta')r+(12+2\beta''-2\beta''\delta'-4\delta')pr\\
&+(2-6\delta'+4\beta'''-2\beta'''\delta'+4\beta''-2\beta''\delta')pq\\
&+(4-2\delta'+4\beta'''-2\beta'''\delta')q^2+(6+2\beta'''-2\beta'''\delta'-2\delta')qr\\
&+(8+4\beta''-2\beta''\delta'-4\delta')p^2=0.
\end{aligned}$$

Le coëfficient de p^2 donne $\delta'=2$, le coëfficient de qr donne $\beta'''=1$, le coëfficient de pr donne $\beta''=2$, le coëfficient de r donne $\beta'=2$, ce qui satisfait aux autres équations. On a donc $\sqrt{\beta^2-4\alpha\delta}=2r$, $\sqrt{\gamma^2-4\alpha\zeta}=r$, $\sqrt{\epsilon^2-4\delta\zeta}=2+2p+q$, $\sqrt{\mu^2-4\lambda\nu}=2+2p+q+r$, $\sqrt{\varkappa^2-4\nu\eta}=4+4p+2q+r$, $\sqrt{\theta^2-4\lambda\eta}=2+2p+q+r$. Les trois premières équations deviennent donc en divisant par 2:

Digitized by Google

$$(2+p+q)l+(1-r)m+(1-r)n-(1+p+q+r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0;$$

$$(3+2p+q)l+(2+p-r)m+(1-q-2r)n$$
$$-(1+p+q+r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,$$

$$(5+4p+2q)l+(3+2p-2r)m+(1-2q-4r)n$$
$$-(1+p+q+r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,$$

Je tire de là les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$ et j'ai :

$$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial v$$
$$+\frac{(5\partial p+3\partial q+2\partial r)l+(3\partial p+2\partial q+\partial r)m+(\partial p+\partial q+\partial r)n}{1+p+q+r}$$
$$+\frac{(4\partial p+2\partial q+\partial r)(pl-nr)+(2\partial p+\partial q+\partial r)(ql-mr)+(2\partial p+\partial q)(mp-nq)}{1+p+q+r}.$$

Soit $mp-nq=0$, on a $\frac{m}{n}=\frac{q}{p}$, ce qui donne $m=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=q$, $n=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=p$, ou $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=1$.

Donc $\partial\psi=\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial v$

$$+\frac{(5\partial p+3\partial q+2\partial r)l+(3\partial p+2\partial q+\partial r)q+(\partial p+\partial q+\partial r)p}{1+p+q+r}$$
$$+\frac{(4\partial p+2\partial q+\partial r)(pl-pr)+(2\partial p+\partial q+\partial r)(ql-qr)}{1+p+q+r}.$$

Soit $l-r=1$, ou $l=1+r=\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+r\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=1$, on a $\partial\psi=\partial v+\partial z+\frac{(5\partial p+3\partial q+2\partial r)(1+r+p+q)}{1+p+q+r}$ $=\partial v+\partial z+5\partial p+3\partial q+2\partial r$ et $\psi=v+z+5p+3q+2r$.

Soit $ql-mr=0$, on a $\frac{l}{m}=\frac{r}{q}$, ce qui donne $l=\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+r\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=r$, $m=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=q$, ou $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=1$.

Donc $\partial\psi=\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x$

$$+\frac{(5\partial p+3\partial q+2\partial r)r+(3\partial p+2\partial q+\partial r)q+(\partial p+\partial q+\partial r)n}{1+p+q+r}$$
$$+\frac{(4\partial p+2\partial q+\partial r)(pr-nr)+(2\partial p+\partial q)(pq-nq)}{1+p+q+r}.$$

Soit $p-n=-1$, ou $n=1+p=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$, ce qui

donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=1$, on a $\partial\psi=\partial x+\partial z+\frac{(\partial p+\partial q+\partial r)(r+q+1+p)}{1+p+q+r}$ $=\partial x+\partial z+\partial p+\partial q+\partial r$ et $\psi=x+z+p+q+r$. Soit enfin $pl-nr=0$, on a $\frac{l}{n}=\frac{r}{p}$, ce qui donne $l=r$, $n=p$, ou $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=1$. Donc $\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\partial z$

$$+\frac{(5\partial p+3\partial q+2\partial r)r+(3\partial p+2\partial q+\partial r)m+(\partial p+\partial q+\partial r)p}{1+p+q+r}$$
$$+\frac{(2\partial p+\partial q+\partial r)(qr-mr)+(2\partial p+\partial q)(mp-pq)}{1+p+q+r}.$$

Soit $q-m=-1$, ce qui donne $m=1+q$, et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=1$, on a $\partial\psi=\partial y+\partial z+\frac{(3\partial p+2\partial q+\partial r)(r+1+q+p)}{1+p+q+r}=\partial y+\partial z+3\partial p+2\partial q+\partial r$ et $\psi=y+z+3p+2q+r$. L'intégrale est donc $5p+3q+2r+v+z=\text{F}:(3p+2q+r+y+z),(p+q+r+x+z)$. Je ne donne pas d'exemples plus composés, parce qu'ils entrainent des calculs trop longs pour qu'ils puissent être insérés dans ce Mémoire.

§. 14. Je passe aux équations à cinq variables. Soit $\psi=\text{F}:(\phi',\phi'',\phi''')$, ψ, ϕ', ϕ'', ϕ''' étant des fonctions de $x, y, v, u, z, p, q, r, t$, ayant $\partial z=p\partial x+q\partial y+r\partial v+t\partial u$, ensorte que $p=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $q=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $r=\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$, $t=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, et par conséquent $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right)$, on fera pour abréger :

$$n=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\quad m=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\quad l=\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+r\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$
$$k=\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+t\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

$$n' = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right),\ m' = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right),\ l' = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right) + r\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right),$$
$$k' = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial u}\right) + t\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right),$$
$$n'' = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right),\ m'' = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right),\ l'' = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v}\right) + r\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right),$$
$$k'' = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial u}\right) + t\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right),$$
$$n''' = \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial z}\right),\ m''' = \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial z}\right),\ l''' = \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial v}\right) + r\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial z}\right),$$
$$k''' = \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial u}\right) + t\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial z}\right).$$

On aura maintenant en différentiant successivement suivant x, y, v, u et prenant successivement Φ', Φ'', Φ''',

$$n + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$
$$= \left(n' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right) F' : \Phi'$$
$$= \left(n'' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right) F' : \Phi''$$
$$= \left(n''' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right) F' : \Phi'''$$

$$m + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$
$$= \left(m' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right) F' : \Phi'$$
$$= \left(m'' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right) F' : \Phi''$$
$$= \left(m''' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right) F' : \Phi'''$$

$$l + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)$$
$$= \left(l' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right) F' : \Phi'$$
$$= \left(l'' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right) F' : \Phi''$$
$$= \left(l''' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right) F' : \Phi'''$$

$$k + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)$$
$$= \left(k' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)\right) F' : \Phi'$$
$$= \left(k'' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)\right) F' : \Phi''$$
$$= \left(k''' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)\right) F' : \Phi'''.$$

Pour abréger, je mets ces expressions sous cette forme:

$$N = N' F' : \Phi', \quad M = M' F' : \Phi', \quad L = L' F' : \Phi', \quad K = K' F' : \Phi',$$
$$= N'' F' : \Phi'', \quad = M'' F' : \Phi'', \quad = L'' F' : \Phi'', \quad = K'' F' : \Phi'',$$
$$= N''' F' : \Phi''', \quad = M''' F' : \Phi''', \quad = L''' F' : \Phi''', \quad = K''' F' : \Phi'''.$$

Prenant maintenant l'équation $N + \alpha M + \beta L + \gamma K = 0$, α, β, γ étant des coëfficiens indéterminés, on aura les trois équations de condition: $N' + \alpha M' + \beta L' + \gamma K' = 0$, $N'' + \alpha M'' + \beta L'' + \gamma K'' = 0$, $N''' + \alpha M''' + \beta L''' + \gamma K''' = 0$. Eliminant de ces trois équations les quantités α, β, γ, on aura les valeurs suivantes:

$$\alpha = \frac{(L''N''' - N''L''')K' - (L'N''' - N'L''')K'' + (L'N'' - N'L'')K'''}{-(L''M''' - L'''M'')K' + (L'M''' - M'L''')K'' - (L'M'' - L''M')K'''},$$
$$\beta = \frac{-(M''N''' - M'''N'')K' + (M'N''' - M'''N')K'' - (M'N'' - M''N')K'''}{-(L''M''' - L'''M'')K' + (L'M''' - L'''M')K'' - (L'M'' - L''M')K'''},$$
$$\gamma = \frac{N'(L''M''' - L'''M'') - M'(L''N''' - L'''N'') + L'(M''N''' - M'''N'')}{-(L''M''' - L'''M'')K' + (L'M''' - M'L''')K'' - (L'M'' - L''M')K'''}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation en N, M, L, K, on a:

$$(NM''L' - NM'L'' + MN'L'' - MN''L' + LM'N'' - LN'M'')K'''$$
$$-(NM'''L' - NM'L''' + MN'L''' - MN'''L' + LM'N''' - LN'M''')K''$$
$$-(NM''L''' - NM'''L'' + MN'''L'' - MN''L''' + LM'''N'' - LN'''M'')K'$$
$$-(N'''M''L' - N'''M'L'' + M'''N'L'' - M'''N''L' + L'''M'N'' - L'''N'M'')K = 0.$$

§. 15. Il s'agit maintenant de substituer dans cette équation les valeurs de L, M, N, K; L', M', N', K'; L'', M'', N'', K''; L''', M''', N''', K''', et d'opérer les multiplications indiquées. Si l'on fait pour abréger:

Digitized by Google

$$a^{(1,2)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right); \quad b^{(1,2)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right);$$

$$c^{(1,2)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right); \quad a^{(1,3)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right);$$

$$b^{(1,3)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right); \quad c^{(1,3)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right);$$

$$a^{(2,3)} = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right); \quad b^{(2,3)} = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right);$$

$$c^{(2,3)} = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right); \quad d^{(1,2)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right);$$

$$e^{(1,2)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right); \quad f^{(1,2)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right);$$

$$d^{(1,3)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right); \quad e^{(1,3)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right);$$

$$f^{(1,3)} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right); \quad d^{(2,3)} = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right);$$

$$e^{(2,3)} = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right); \quad f^{(2,3)} = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right).$$

$$A' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right); \quad B' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right);$$

$$C' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right); \quad A'' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right);$$

$$B'' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right); \quad C'' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right);$$

$$A''' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right); \quad B''' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right);$$

$$C''' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right); \quad D' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right);$$

$$E' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right); \quad F' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right);$$

$$D'' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right); \quad E'' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right);$$

$$F'' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right); \quad D''' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right);$$

$$E''' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right); \quad F''' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right).$$

$$A^{(1,2)} = m''l' - m'l''; \quad B^{(1,2)} = n'l'' - n''l'; \quad C^{(1,2)} = n''m' - n'm'';$$

$$D^{(1,2)} = k''l' - k'l''; \quad E^{(1,2)} = k''m' - k'm''; \quad F^{(1,2)} = k''n' - k'n'';$$

$$A^{(1,3)} = m'''l' - m'l'''; \quad B^{(1,3)} = n'l''' - n'''l'; \quad C^{(1,3)} = n'''m' - n'm''';$$

$$D^{(1,3)} = k'''l' - k'l'''; \quad E^{(1,3)} = k'''m' - k'm'''; \quad F^{(1,3)} = k'''n' - k'n''';$$

$$A^{(2,3)} = m''l''' - m'''l''; \quad B^{(2,3)} = n'''l'' - n''l'''; \quad C^{(2,3)} = n''m''' - n'''m'';$$

$$D^{(2,3)} = k''l''' - k'''l''; \quad E^{(2,3)} = k''m''' - k'''m''; \quad F^{(2,3)} = k''n''' - k'''n'';$$

$$A^{(0,1)} = m'l - ml'; \quad B^{(0,1)} = nl' - n'l; \quad C^{(0,1)} = n'm - nm';$$

$$D^{(0,1)} = k'l - kl'; \quad E^{(0,1)} = k'm - km'; \quad F^{(0,1)} = k'n - kn';$$

$$A^{(0,2)} = ml'' - m''l; \quad B^{(0,2)} = n''l - nl''; \quad C^{(0,2)} = nm'' - n''m;$$

$$D^{(0,2)} = kl'' - k''l; \quad E^{(0,2)} = km'' - k''m; \quad F^{(0,2)} = kn'' - k''n;$$

$$A^{(0,3)} = m'''l - ml'''; \quad B^{(0,3)} = nl''' - n'''l; \quad C^{(0,3)} = n'''m - nm''';$$

$$D^{(0,3)} = k'''l - kl'''; \quad E^{(0,3)} = k'''m - km'''; \quad F^{(0,3)} = k'''n - kn'''.$$

$$A^{(q,r,t)} = f^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - e^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$A^{(p,r,t)} = f^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - d^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + b^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$A^{(p,q,t)} = e^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - d^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$A^{(p,q,r)} = c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - b^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right);$$

$$B^{(q,r,t)} = f^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - e^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$B^{(p,r,t)} = f^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - d^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + b^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$B^{(p,q,t)} = e^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - d^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + a^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$B^{(p,q,r)} = c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - b^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + a^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right);$$

$$C^{(q,r,t)} = f^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - e^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$C^{(p,r,t)} = f^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - d^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + b^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$C^{(p,q,t)} = e^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - d^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + a^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$

$$C^{(p,q,r)} = c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - b^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + a^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right);$$

$$D^{(q,r,t)} = f^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) - e^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right);$$

$$D^{(p,r,t)} = f^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) - d^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) + b^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right);$$

$$D^{(p,q,t)} = e^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) - d^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right);$$

$$D^{(p,q,r)} = c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) - b^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right).$$

Digitized by Google

Ces dernières quantités peuvent se mettre sous cette forme :

$$A^{(q,r,t)} = C''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - C'''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$A^{(p,r,t)} = B''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - B'''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) + b^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$A^{(p,q,t)} = A''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - A'''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$
$$A^{(p,q,r)} = A''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - A'''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right);$$
$$B^{(q,r,t)} = C'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - C'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) + c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$B^{(p,r,t)} = B'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - B'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) + b^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$B^{(p,q,t)} = A'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - A'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) + a^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$B^{(p,q,r)} = A'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - A'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) + a^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right);$$
$$C^{(q,r,t)} = C'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - C''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) + c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$C^{(p,r,t)} = B'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - B''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) + b^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$C^{(p,q,t)} = A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) + a^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right);$$
$$C^{(p,q,r)} = A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) + a^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right);$$
$$D^{(q,r,t)} = c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right);$$
$$D^{(p,r,t)} = b^{(1,2)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - b^{(1,3)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) + b^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right);$$
$$D^{(p,q,t)} = a^{(1,2)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - a^{(1,3)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right);$$
$$D^{(p,q,r)} = a^{(1,2)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - a^{(1,3)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) + a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right),$$

on obtiendra après les réductions l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&(A'f^{(2,3)} - A''f^{(1,3)} + A'''f^{(1,2)} + F'a^{(2,3)} - F''a^{(1,3)} + F'''a^{(1,2)}) \times \\
&\times \Big[\left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial v}\right) + \left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial u}\right) \\
&- \left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial y}\right) + \left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial v}\right) - \left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial y}\right) \\
&+ \left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial v}\right) + \left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial u}\right) \\
&- \left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial x}\right) + \left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial v}\right) - \left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\tfrac{\partial t}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)]$$

$$+\left(A^{(p,r,t)}m'-B^{(p,r,t)}m''+C^{(p,r,t)}m'''-D^{(p,r,t)}m\right)\times$$

$$\times[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)]$$

$$+\left(A^{(q,r,t)}n'-B^{(q,r,t)}n''+C^{(q,r,t)}n'''-D^{(q,r,t)}n\right)\times$$

$$\times[\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)]$$

$$+\left(A^{(p,q,t)}l'-B^{(p,q,t)}l''+C^{(p,q,t)}l'''-D^{(p,q,t)}l\right)\times$$

$$\times[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)]$$

$$+\left(A^{(p,q,r)}k'-B^{(p,q,r)}k''+C^{(p,q,r)}k'''-D^{(p,q,r)}k\right)\times$$

$$\times[-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)]$$

$$+\left(A^{(q,r,t)}m'-B^{(q,r,t)}m''+C^{(q,r,t)}m'''-D^{(q,r,t)}m\right.$$

$$\left.-A^{(p,r,t)}n'+B^{(p,r,t)}n''-C^{(p,r,t)}n'''+D^{(p,r,t)}n\right)\times$$

$$\times[-\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)]$$

$$+\left(-A^{(q,r,t)}l'+B^{(q,r,t)}l''-C^{(q,r,t)}l'''+D^{(q,r,t)}l\right.$$

$$\left.-A^{(p,q,t)}n'+B^{(p,q,t)}n''-C^{(p,q,t)}n'''+D^{(p,q,t)}n\right)\times$$

$$\times[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)]$$

Digitized by Google

$$+ (A^{(p,r,t)}\,l' - B^{(p,r,t)}\,l'' + C^{(p,r,t)}\,l''' - D^{(p,r,t)}\,l$$

$$- A^{(p,q,t)}\,m' + B^{(p,q,t)}\,m'' - C^{(p,q,t)}\,m''' + D^{(p,q,t)}\,m) \times$$

$$\times [-(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial u}) + (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial x})$$

$$- (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial x})]$$

$$+ (A^{(p,q,r)}\,l' - B^{(p,q,r)}\,l'' + C^{(p,q,r)}\,l''' - D^{(p,q,r)}\,l$$

$$- A^{(p,q,t)}\,k' + B^{(p,q,t)}\,k'' - C^{(p,q,t)}\,k''' + D^{(p,q,t)}\,k) \times$$

$$\times [(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial u}) + (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial x})$$

$$+ (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x})]$$

$$+ (A^{(p,q,r)}\,m' - B^{(p,q,r)}\,m'' + C^{(p,q,r)}\,m''' - D^{(p,q,r)}\,m$$

$$+ A^{(p,r,t)}\,k' - B^{(p,r,t)}\,k'' + C^{(p,r,t)}\,k''' - D^{(p,r,t)}\,k) \times$$

$$\times [-(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial u}) + (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial v}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial x})$$

$$- (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v}) + (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x})]$$

$$+ (A^{(p,q,r)}\,n' - B^{(p,q,r)}\,n'' + C^{(p,q,r)}\,n''' - D^{(p,q,r)}\,n$$

$$- A^{(q,r,t)}\,k' + B^{(q,r,t)}\,k'' - C^{(q,r,t)}\,k''' + D^{(q,r,t)}\,k) \times$$

$$\times [(\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial u}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial y})$$

$$+ (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y})]$$

$$+ (A'D^{(2,3)} + A''D^{(1,3)} - A'''D^{(\ ,2)} - a^{(1,2)}D^{(0,3)} - a^{(1,3)}D^{(0,2)} - a^{(2,3)}D^{(0,1)})$$

$$\times ((\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial x}))$$

$$+ (-B'E^{(2,3)} - B''E^{(1,3)} + B'''E^{(1,2)} + b^{(1,2)}E^{(0,3)} + b^{(1,3)}E^{(0,2)} + b^{(2,3)}E^{(0,1)})$$

$$\times ((\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x}))$$

$$+ (C'F^{(2,3)} + C''F^{(1,3)} - C'''F^{(1,2)} - c^{(1,2)}F^{(0,3)} - c^{(1,3)}F^{(0,2)} - c^{(2,3)}F^{(0,1)})$$

$$\times ((\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y}))$$

$$+ (-D'A^{(2,3)} - D''A^{(1,3)} + D'''A^{(1,2)} + d^{(1,2)}A^{(0,3)} + d^{(1,3)}A^{(0,2)} + d^{(2,3)}A^{(0,1)})$$

$$\times ((\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial x}))$$

$$+\left(-E'B^{(2,3)}-E''B^{(1,3)}+E'''B^{(1,2)}+e^{(1,2)}B^{(0,3)}+e^{(1,3)}B^{(0,2)}+e^{(2,3)}B^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)$$

$$+\left(-F'C^{(2,3)}-F''C^{(1,3)}+F'''C^{(1,2)}+f^{(1,2)}C^{(0,3)}+f^{(1,3)}C^{(0,2)}+f^{(2,3)}C^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-D'B^{(2,3)}-D''B^{(1,3)}+D'''B^{(1,2)}+d^{(1,2)}B^{(0,3)}+d^{(1,3)}B^{(0,2)}+d^{(2,3)}B^{(0,1)}\right.$$

$$\left.-E'A^{(2,3)}-E''A^{(1,3)}+E'''A^{(1,2)}+e^{(1,2)}A^{(0,3)}+e^{(1,3)}A^{(0,2)}+e^{(2,3)}A^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)$$

$$+\left(-D'C^{(2,3)}-D''C^{(1,3)}+D'''C^{(1,2)}+d^{(1,2)}C^{(0,3)}+d^{(1,3)}C^{(0,2)}+d^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$

$$\left.-F'A^{(2,3)}-F''A^{(1,3)}+F'''A^{(1,2)}+f^{(1,2)}A^{(0,3)}+f^{(1,3)}A^{(0,2)}+f^{(2,3)}A^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-E'C^{(2,3)}-E''C^{(1,3)}+E'''C^{(1,2)}+e^{(1,2)}C^{(0,3)}+e^{(1,3)}C^{(0,2)}+e^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$

$$\left.-F'B^{(2,3)}-F''B^{(1,3)}+F'''B^{(1,2)}+f^{(1,2)}B^{(0,3)}+f^{(1,3)}B^{(0,2)}+f^{(2,3)}B^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(B'D^{(2,3)}+B''D^{(1,3)}-B'''D^{(1,2)}-b^{(1,2)}D^{(0,3)}-b^{(1,3)}D^{(0,2)}-b^{(2,3)}D^{(0,1)}\right.$$

$$\left.-A'E^{(2,3)}-A''E^{(1,3)}+A'''E^{(1,2)}+a^{(1,2)}E^{(0,3)}+a^{(1,3)}E^{(0,2)}+a^{(2,3)}E^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+\left(C'D^{(2,3)}+C''D^{(1,3)}-C'''D^{(1,2)}-c^{(1,2)}D^{(0,3)}-c^{(1,3)}D^{(0,2)}-c^{(2,3)}D^{(0,1)}\right.$$

$$\left.+A'F^{(2,3)}+A''F^{(1,3)}-A'''F^{(1,2)}-a^{(1,2)}F^{(0,3)}-a^{(1,3)}F^{(0,2)}-a^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+\left(-C'E^{(2,3)}-C''E^{(1,3)}+C'''E^{(1,2)}+c^{(1,2)}E^{(0,3)}+c^{(1,3)}E^{(0,2)}+c^{(2,3)}E^{(0,1)}\right.$$

$$\left.-B'F^{(2,3)}-B''F^{(1,3)}+B'''F^{(1,2)}+b^{(1,2)}F^{(0,3)}+b^{(1,3)}F^{(0,2)}+b^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+\left(-A'A^{(2,3)}-A''A^{(1,3)}+A'''A^{(1,2)}+a^{(1,2)}A^{(0,3)}+a^{(1,3)}A^{(0,2)}+a^{(2,3)}A^{(0,1)}\right.$$

$$\left.-D'D^{(2,3)}+D''D^{(1,3)}-D'''D^{(1,2)}-d^{(1,2)}D^{(0,3)}-d^{(1,3)}D^{(0,2)}-d^{(2,3)}D^{(0,1)}\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right)$$

Digitized by Google

$$+\left(-B'A^{(2,3)}-B''A^{(1,3)}+B'''A^{(1,2)}+b^{(1,2)}A^{(0,3)}+b^{(1,3)}A^{(0,2)}+b^{(2,3)}A^{(0,1)}\right.$$
$$\left.-D'E^{(2,3)}-D''E^{(1,3)}+D'''E^{(1,2)}+d^{(1,2)}E^{(0,3)}+d^{(1,3)}E^{(0,2)}+d^{(2,3)}E^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+\left(A'B^{(2,3)}+A''B^{(1,3)}-A'''B^{(1,2)}-a^{(1,2)}B^{(0,3)}-a^{(1,3)}B^{(0,2)}-a^{(2,3)}B^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+E'D^{(2,3)}+E''D^{(1,3)}-E'''D^{(1,2)}-e^{(1,2)}D^{(0,3)}-e^{(1,3)}D^{(0,2)}-e^{(2,3)}D^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\right)$$

$$+\left(-A'C^{(2,3)}-A''C^{(1,3)}+A'''C^{(1,2)}+a^{(1,2)}C^{(0,3)}+a^{(1,3)}C^{(0,2)}+a^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+F'D^{(2,3)}+F''D^{(1,3)}-F'''D^{(1,2)}+f^{(1,2)}D^{(0,3)}+f^{(1,3)}D^{(0,2)}+f^{(2,3)}D^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-B'C^{(2,3)}-B''C^{(1,3)}+B'''C^{(1,2)}+b^{(1,2)}C^{(0,3)}+b^{(1,3)}C^{(0,2)}+b^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$
$$\left.-F'E^{(2,3)}-F''E^{(1,3)}+F'''E^{(1,2)}+f^{(1,2)}E^{(0,3)}+f^{(1,3)}E^{(0,2)}+f^{(2,3)}E^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-C'B^{(2,3)}-C''B^{(1,3)}+C'''B^{(1,2)}+c^{(1,2)}B^{(0,3)}+c^{(1,3)}B^{(0,2)}+c^{(2,3)}B^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+E'F^{(2,3)}+E''F^{(1,3)}-E'''F^{(1,2)}-e^{(1,2)}F^{(0,3)}-e^{(1,3)}F^{(0,2)}-e^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)$$

$$+\left(-C'C^{(2,3)}-C''C^{(1,3)}+C'''C^{(1,2)}+c^{(1,2)}C^{(0,3)}+c^{(1,3)}C^{(0,2)}+c^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+F'F^{(2,3)}+F''F^{(1,3)}-F'''F^{(1,2)}-f^{(1,2)}F^{(0,3)}-f^{(1,3)}F^{(0,2)}-f^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-B'B^{(2,3)}-B''B^{(1,3)}+B'''B^{(1,2)}+b^{(1,2)}B^{(0,3)}+b^{(1,3)}B^{(0,2)}+b^{(2,3)}B^{(0,1)}\right.$$
$$\left.-E'E^{(2,3)}-E''E^{(1,3)}+E'''E^{(1,2)}+e^{(1,2)}E^{(0,3)}+e^{(1,3)}E^{(0,2)}+e^{(2,3)}E^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right)$$

$$+\left(-C'A^{(2,3)}-C''A^{(1,3)}+C'''A^{(1,2)}+c^{(1,2)}A^{(0,3)}+c^{(1,3)}A^{(0,2)}+c^{(2,3)}A^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+D'F^{(2,3)}+D''F^{(1,3)}-D'''F^{(1,2)}-d^{(1,2)}F^{(0,3)}-d^{(1,3)}F^{(0,2)}-d^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)$$

Digitized by Google

$$+ \left[- \left(k'' A^{(0,1)} + k' A^{(0,2)} + k A^{(1,2)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p} \right) \right.$$

$$+ \left(k''' A^{(0,1)} - k' A^{(0,3)} + k A^{(1,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p} \right)$$

$$+ \left(k''' A^{(0,2)} + k'' A^{(0,3)} + k A^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right)$$

$$\left. + \left(k''' A^{(1,2)} - k'' A^{(1,3)} - k' A^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right] \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

$$+ \left[- \left(k'' A^{(0,1)} + k' A^{(0,2)} + k A^{(1,2)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q} \right) \right.$$

$$+ \left(k''' A^{(0,1)} - k' A^{(0,3)} + k A^{(1,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q} \right)$$

$$+ \left(k''' A^{(0,2)} + k'' A^{(0,3)} + k A^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q} \right)$$

$$+ \left(k''' A^{(1,2)} - k'' A^{(1,3)} - k' A^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} \right)$$

$$- \left(k'' B^{(0,1)} + k' B^{(0,2)} + k B^{(1,2)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p} \right)$$

$$+ \left(k''' B^{(0,1)} - k' B^{(0,3)} + k B^{(1,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p} \right)$$

$$+ \left(k''' B^{(0,2)} + k'' B^{(0,3)} + k B^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right)$$

$$\left. + \left(k''' B^{(1,2)} - k'' B^{(1,3)} - k' B^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right] \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

$$+ \left[\left(- k'' C^{(0,1)} + k' C^{(0,2)} + k C^{(1,2)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p} \right) \right.$$

$$+ \left(k''' C^{(0,1)} - k' C^{(0,3)} + k C^{(1,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p} \right)$$

$$+ \left(k''' C^{(0,2)} + k'' C^{(0,3)} + k C^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right)$$

$$+ \left(k''' C^{(1,2)} - k'' C^{(1,3)} - k' C^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)$$

$$- \left(k'' A^{(0,1)} + k' A^{(0,2)} + k A^{(1,2)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial r} \right)$$

$$+ \left(k''' A^{(0,1)} - k' A^{(0,3)} + k A^{(1,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r} \right)$$

$$+ \left(k''' A^{(0,2)} + k'' A^{(0,3)} + k A^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right)$$

$$\left. + \left(k''' A^{(1,2)} - k'' A^{(1,3)} - k' A^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

$$+ \left[\left(n A^{(1,2)} + m B^{(1,2)} + l C^{(1,2)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial p} \right) \right.$$

$$- \left(n A^{(1,3)} + m B^{(1,3)} + l C^{(1,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial p} \right)$$

$$- \left(n A^{(2,3)} + m B^{(2,3)} + l C^{(2,3)} \right) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right)$$

$$- \left(n''' A^{(1,2)} + m''' B^{(1,2)} + l''' C^{(1,2)} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)$$

Digitized by Google

$$-(k''A^{(0,1)}+k'A^{(0,2)}+k\,A^{(1,2)})\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)$$
$$+(k'''A^{(0,1)}-k'A^{(0,3)}+k\,A^{(1,3)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)$$
$$+(k'''A^{(0,2)}+k''A^{(0,3)}+k\,A^{(2,3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)$$
$$+(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)]\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)$$
$$+[-(k''B^{(0,1)}+k'B^{(0,2)}+k\,B^{(1,2)})\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)$$
$$+(k'''B^{(0,1)}-k'B^{(0,3)}+k\,B^{(1,3)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)$$
$$+(k'''B^{(0,2)}+k''B^{(0,3)}+k\,B^{(2,3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)$$
$$+(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)]\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$
$$+[(-k''B^{(0,1)}+k'B^{(0,2)}+k\,B^{(1,2)})\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)$$
$$+(k'''B^{(0,1)}-k'B^{(0,3)}+k\,B^{(1,3)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)$$
$$+(k'''B^{(0,2)}+k''B^{(0,3)}+k\,B^{(2,3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)$$
$$+(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$
$$-(k''C^{(0,1)}+k'C^{(0,2)}+k\,C^{(1,2)})\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)$$
$$+(k'''C^{(0,1)}-k'C^{(0,3)}+k\,C^{(1,3)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)$$
$$+(k'''C^{(0,2)}+k''C^{(0,3)}+k\,C^{(2,3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)$$
$$+(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)]\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)$$
$$+[(n\,A^{(1,2)}+m\,B^{(1,2)}+l\,C^{(1,2)})\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)$$
$$-(n\,A^{(1,3)}+m\,B^{(1,3)}+l\,C^{(1,3)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)$$
$$-(n\,A^{(2,3)}+m\,B^{(2,3)}+l\,C^{(2,3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)$$
$$-(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-(k''B^{(0,1)}+k'B^{(0,2)}+k\,B^{(1,2)})\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)$$
$$+(k'''B^{(0,1)}-k'B^{(0,3)}+k\,B^{(1,3)})\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)$$
$$+(k'''B^{(0,2)}+k''B^{(0,3)}+k\,B^{(2,3)})\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)$$
$$+(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)]+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[-(k''\,C^{(0,1)} + k'\,C^{(0,2)} + k\,C^{(1,2)})\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\\
&\quad+(k'''C^{(0,1)} - k'\,C^{(0,3)} + k\,C^{(1,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\\
&\quad+(k'''C^{(0,2)} + k''C^{(0,3)} + k\,C^{(2,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\\
&\quad+(k'''C^{(1,2)} - k''C^{(1,3)} - k'C^{(2,3)})\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\Big]\left(\tfrac{\partial r}{\partial v}\right)\\
&+\Big[(n\;A^{(1,2)} + m\,B^{(1,2)} + l\,C^{(1,2)})\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\\
&\quad-(n\;A^{(1,3)} + m\,B^{(1,3)} + l\,C^{(1,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\\
&\quad-(n\;A^{(2,3)} + m\,B^{(2,3)} + l\,C^{(2,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\\
&\quad-(n'''A^{(1,2)} + m'''B^{(1,2)} + l'''C^{(1,2)})\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\\
&\quad-(k''\,C^{(0,1)} + k'\,C^{(0,2)} + k\,C^{(1,2)})\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\\
&\quad+(k'''C^{(0,1)} - k'\,C^{(0,3)} + k\,C^{(1,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\\
&\quad+(k'''C^{(0,2)} + k''C^{(0,3)} + k\,C^{(2,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\\
&\quad+(k'''C^{(1,2)} - k''C^{(1,3)} - k'C^{(2,3)})\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\Big]\left(\tfrac{\partial r}{\partial w}\right).\\
&+\Big[(n\;A^{(1,2)} + m\,B^{(1,2)} + l\,C^{(1,2)})\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\\
&\quad-(n\;A^{(1,3)} + m\,B^{(1,3)} + l\,C^{(1,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\\
&\quad-(n\;A^{(2,3)} + m\,B^{(2,3)} + l\,C^{(2,3)})\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\\
&\quad+(n'''A^{(1,2)} + m'''B^{(1,2)} + l'''C^{(1,2)})\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\Big]\left(\tfrac{\partial t}{\partial w}\right)\\
&+n(k'''A^{(1,2)} - k''A^{(1,3)} - k'A^{(2,3)}) + m(k'''B^{(1,2)} - k''B^{(1,3)} - k'B^{(2,3)})\\
&+l(k'''C^{(1,2)} - k''C^{(1,3)} - k'C^{(2,3)}) - k(n'''A^{(1,2)} + m'''B^{(1,2)} + l'''C^{(1,2)}) = 0.
\end{aligned}
$$

§. 16. On a maintenant $A^{(p,q,r)}B^{(p,q,t)} - A^{(p,q,t)}B^{(p,q,r)}$

$$
\begin{aligned}
&= A'A'''\left(\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right) + A''A'''\left(\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)\\
&+ A'''^2\left(\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right) + A'\,a^{(2,3)}\left(\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\right)\\
&+ A''a^{(1,3)}\left(\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right) + A'''a^{(2,3)}\left(\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)\\
&\qquad + A'''a^{(1,3)}\left(\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= -A'A'''f^{(2,3)} + A''A'''f^{(1,3)} - A'''^2 f^{(1,2)}$$
$$+ F'''A'a^{(2,3)} - F'A'''a^{(2,3)} - F'''A''a^{(1,3)} + F''A'''a^{(1,3)}$$
$$= A'''(-A'f^{(2,3)} + A''f^{(1,3)} - A'''f^{(1,2)} - F'a^{(2,3)} + F''a^{(1,3)})$$
$$+ F'''(A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)})$$
$= (\text{en faisant } N = A'f^{(2,3)} - A''f^{(1,3)} + A'''f^{(1,2)}$
$$+ F'a^{(2,3)} - F''a^{(1,3)} + F'''a^{(1,2)})$$
$$-A'''N + F'''(A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)} + A'''a^{(1,2)}) = -A'''N,$$
puisque $A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)} + A'''a^{(1,2)} = 0$.

§. 17. On aura de même: $A^{(p,q,r)}C^{(p,q,t)} - A^{(p,q,t)}C^{(p,q,r)}$
$$= A'A''\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right) + A''^2\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ A''A'''\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right) + A'a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right)$$
$$+ A''a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right) + A''a^{(1,2)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ A'''a^{(1,2)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right)$$
$$= -A'A''f^{(2,3)} + A''^2 f^{(1,3)} - A''A'''f^{(1,2)}$$
$$+ A'F''a^{(2,3)} - A''F'a^{(2,3)} - A''F'''a^{(1,2)} + A'''F''a^{(1,2)}$$
$$= A''(-A'f^{(2,3)} + A''f^{(1,3)} - A'''f^{(1,2)} - F'a^{(2,3)} - F'''a^{(1,2)})$$
$$+ F''(A'a^{(2,3)} + A'''a^{(1,2)})$$
$$= -A''N + F''(A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)} + A'''a^{(1,2)}) = -A''N.$$

§. 18. On a enfin $A^{(p,q,r)}D^{(p,q,t)} - A^{(p,q,t)}D^{(p,q,r)}$
$$= A'''a^{(1,2)}\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right) + A''a^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ A''a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right) + A'''a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ a^{(1,2)}a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\right) + a^{(1,3)}a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ a^{(2,3)2}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$

$$= -A''' a^{(1,2)} f^{(2,3)} + A'' a^{(1,3)} f^{(2,3)} - A'' a^{(2,3)} f^{(1,3)}$$
$$+ A''' a^{(2,3)} f^{(1,2)} + F''' a^{(1,2)} a^{(2,3)} - F'' a^{(1,3)} a^{(2,3)} + F' a^{(2,3)2}$$
$$= a^{(2,3)} (-A'' f^{(1,3)} + A''' f^{(1,2)} + F''' a^{(1,2)} - F'' a^{(1,3)} + F' a^{(2,3)})$$
$$+ f^{(2,3)} (-A''' a^{(1,2)} + A'' a^{(1,3)})$$
$$= N a^{(2,3)} - f^{(2,3)} (A' a^{(2,3)} - A'' a^{(1,3)} + A''' a^{(1,2)}) = N a^{(2,3)}.$$

§. 19. Maintenant on remarquera qu'on a:

$$A^{(p,q,r)} = B''' \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - B'' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right) - b^{(2,3)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right);$$
$$B^{(p,q,r)} = B''' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right) - B' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right) - b^{(1,3)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right);$$
$$C^{(p,q,r)} = B'' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right) - B' \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - b^{(1,2)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right);$$
$$D^{(p,q,r)} = b^{(1,2)} \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right) + b^{(1,3)} \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - b^{(2,3)} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right).$$

D'après ces valeurs, on a $A^{(p,q,r)} B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)} B^{(p,q,r)}$

$$= B' B''' \left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\right) + B'''^2 \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\right)$$
$$+ B'' B''' \left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\right) + B' b^{(2,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ B''' b^{(2,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\right) + B''' b^{(1,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ B'' b^{(1,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\right)$$
$$= B' B''' e^{(2,3)} - B' E''' b^{(2,3)} + B'''^2 e^{(1,2)} - B'' B''' e^{(1,3)}$$
$$+ B''' E' b^{(2,3)} - B''' E'' b^{(1,3)} + B'' E''' b^{(1,3)}$$
$$= B''' (B' e^{(2,3)} - B'' e^{(1,3)} + B''' e^{(1,2)} + E' b^{(2,3)} - E'' b^{(1,3)})$$
$$+ E''' (-B' b^{(2,3)} + B'' b^{(1,3)})$$
$$= B''' (B' e^{(2,3)} - B'' e^{(1,3)} + B''' e^{(1,2)} + E' b^{(2,3)} - E'' b^{(1,3)} + E''' b^{(1,2)})$$
$$- E''' (B' b^{(2,3)} - B'' b^{(1,3)} + B''' b^{(1,2)}) = - B''' N,$$

parceque $B' e^{(2,3)} - B'' e^{(1,3)} + B''' e^{(1,2)} + E' b^{(2,3)} - E'' b^{(1,3)} + E''' b^{(1,2)}$
$= -(A' f^{(2,3)} - A'' f^{(1,3)} + A''' f^{(1,2)} + F' a^{(2,3)} - F'' a^{(1,3)} + F''' a^{(1,2)})$
et $B' b^{(2,3)} - B'' b^{(1,3)} + B''' b^{(1,2)} = 0.$

Digitized by Google

§. 20. On trouvera en procédant précisement de même:

$$A^{(p,q,r)}\,C^{(p,r,t)} - C^{(p,q,r)}\,A^{(p,r,t)} = -B''N,$$

$$A^{(p,q,r)}\,D^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}\,D^{(p,q,r)} = b^{(2,3)}\,N.$$

§. 21. On remarquera enfin qu'on a:

$$A^{(p,q,r)} = C''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - C'''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$

$$B^{(p,q,r)} = C'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - C'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) + c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$

$$C^{(p,q,r)} = C'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) - C''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) + c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$

$$D^{(p,q,r)} = c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right).$$

D'après ces valeurs, on a $A^{(p,q,r)}\,B^{(q,r,t)} - A^{(q,r,t)}\,B^{(p,q,r)}$

$$= C'C'''\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right) + C''C'''\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$

$$+ C'''^2\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\right) + C'c^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)\right)$$

$$+ C'''c^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right) + C''c^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right)$$

$$+ C'''c^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)$$

$$= -C'C'''d^{(2,3)} + C''C'''d^{(1,3)} - C'''^2d^{(1,2)} + C'D'''c^{(2,3)}$$

$$- C'''D'c^{(2,3)} - C''D'''c^{(1,3)} + C'''D''c^{(1,3)}$$

$$= C'''(-C'd^{(2,3)} + C''d^{(1,3)} - C'''d^{(1,2)} - D'c^{(2,3)} + D''c^{(1,3)})$$

$$+ C'D'''c^{(2,3)} - C''D'''c^{(1,3)}$$

$$= C'''(-C'd^{(2,3)} + C''d^{(1,3)} - C'''d^{(1,2)} - D'c^{(2,3)} + D''c^{(1,3)} - D'''c^{(1,2)})$$

$$+ D'''(C'c^{(2,3)} - C''c^{(1,3)} + C'''c^{(1,2)}) = -C'''N,$$

parceque:

$$C'd^{(2,3)} - C''d^{(1,3)} + C'''d^{(1,2)} + D'c^{(2,3)} - D''c^{(1,3)} + D'''c^{(1,2)}$$

$$= B'f^{(2,3)} - B''f^{(1,3)} + B'''f^{(1,2)} + F'b^{(2,3)} - F''b^{(1,3)} + F'''b^{(1,2)}$$

et $C'c^{(2,3)} - C''c^{(1,3)} + C'''c^{(1,2)} = 0.$

$$+ (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial u})$$

$$- (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial x}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial x})$$

$$+ (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial v})$$

$$- (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial x}) + (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial x})]$$

$$+ (A^{(p,r,t)} m' - B^{(p,r,t)} m'' + C^{(p,r,t)} m''' - D^{(p,r,t)} m) \times$$

$$\times [(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial u}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial x})$$

$$+ (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial x})]$$

$$+ (A^{(q,r,t)} n' - B^{(q,r,t)} n'' + C^{(q,r,t)} n''' - D^{(q,r,t)} n) \times$$

$$\times [(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial v}) - (\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial u}) + (\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial y})$$

$$+ (\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial v}) - (\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial y})]$$

$$+ (A^{(p,q,t)} l' - B^{(p,q,t)} l'' + C^{(p,q,t)} l''' - D^{(p,q,t)} l) \times$$

$$\times [(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial y}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial u}) + (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial x})$$

$$+ (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial u})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial x})]$$

$$+ (A^{(p,q,r)} k' - B^{(p,q,r)} k'' + C^{(p,q,r)} k''' - D^{(p,q,r)} k) \times$$

$$\times [-(\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial v}) + (\frac{\partial p}{\partial x})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v}) - (\frac{\partial p}{\partial y})(\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x})$$

$$- (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y}) + (\frac{\partial p}{\partial v})(\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x})]$$

$$+ (A^{(q,r,t)} m' - B^{(q,r,t)} m'' + C^{(q,r,t)} m''' - D^{(q,r,t)} m$$

$$- A^{(p,r,t)} n' + B^{(p,r,t)} n'' - C^{(p,r,t)} n''' + D^{(p,r,t)} n) \times$$

$$\times [-(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial u}) + (\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial v}) + (\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial q}{\partial v})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial x})$$

$$- (\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial v}) + (\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial v})(\frac{\partial t}{\partial x})]$$

$$+ (-A^{(q,r,t)} l' + B^{(q,r,t)} l'' - C^{(q,r,t)} l''' + D^{(q,r,t)} l$$

$$- A^{(p,q,t)} n' + B^{(p,q,t)} n'' - C^{(p,q,t)} n''' + D^{(p,q,t)} n) \times$$

$$\times [(\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial u}) - (\frac{\partial q}{\partial x})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial y}) - (\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial u}) + (\frac{\partial q}{\partial y})(\frac{\partial r}{\partial u})(\frac{\partial t}{\partial x})$$

$$+ (\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial t}{\partial y}) - (\frac{\partial q}{\partial u})(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial t}{\partial x})]$$

Digitized by Google

$$+ (A^{(p,r,t)} l' - B^{(p,r,t)} l'' + C^{(p,r,t)} l''' - D^{(p,r,t)} l$$

$$- A^{(p,q,t)} m' + B^{(p,q,t)} m'' - C^{(p,q,t)} m''' + D^{(p,q,t)} m) \times$$

$$\times [- \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)]$$

$$+ (A^{(p,q,r)} l' - B^{(p,q,r)} l'' + C^{(p,q,r)} l''' - D^{(p,q,r)} l$$

$$- A^{(p,q,t)} k' + B^{(p,q,t)} k'' - C^{(p,q,t)} k''' + D^{(p,q,t)} k) \times$$

$$\times [\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)]$$

$$+ (A^{(p,q,r)} m' - B^{(p,q,r)} m'' + C^{(p,q,r)} m''' - D^{(p,q,r)} m$$

$$+ A^{(p,r,t)} k' - B^{(p,r,t)} k'' + C^{(p,r,t)} k''' - D^{(p,r,t)} k) \times$$

$$\times [- \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)]$$

$$+ (A^{(p,q,r)} n' - B^{(p,q,r)} n'' + C^{(p,q,r)} n''' - D^{(p,q,r)} n$$

$$- A^{(q,r,t)} k' + B^{(q,r,t)} k'' - C^{(q,r,t)} k''' + D^{(q,r,t)} k) \times$$

$$\times [\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)]$$

$$+ (A' D^{(2,3)} + A'' D^{(1,3)} - A''' D^{(1,2)} - a^{(1,2)} D^{(0,3)} - a^{(1,3)} D^{(0,2)} - a^{(2,3)} D^{(0,1)})$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ (- B' E^{(2,3)} - B'' E^{(1,3)} + B''' E^{(1,2)} + b^{(1,2)} E^{(0,3)} + b^{(1,3)} E^{(0,2)} + b^{(2,3)} E^{(0,1)})$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ (C' F^{(2,3)} + C'' F^{(1,3)} - C''' F^{(1,2)} - c^{(1,2)} F^{(0,3)} - c^{(1,3)} F^{(0,2)} - c^{(2,3)} F^{(0,1)})$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)$$

$$+ (- D' A^{(2,3)} - D'' A^{(1,3)} + D''' A^{(1,2)} + d^{(1,2)} A^{(0,3)} + d^{(1,3)} A^{(0,2)} + d^{(2,3)} A^{(0,1)})$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ (-E'B^{(2,3)} - E''B^{(1,3)} + E'''B^{(1,2)} + e^{(1,2)}B^{(0,3)} + e^{(1,3)}B^{(0,2)} + e^{(2,3)}B^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)$$

$$+ (-F'C^{(2,3)} - F''C^{(1,3)} + F'''C^{(1,2)} + f^{(1,2)}C^{(0,3)} + f^{(1,3)}C^{(0,2)} + f^{(2,3)}C^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right)$$

$$+ (-D'B^{(2,3)} - D''B^{(1,3)} + D'''B^{(1,2)} + d^{(1,2)}B^{(0,3)} + d^{(1,3)}B^{(0,2)} + d^{(2,3)}B^{(0,1)}$$
$$-E'A^{(2,3)} - E''A^{(1,3)} + E'''A^{(1,2)} + e^{(1,2)}A^{(0,3)} + e^{(1,3)}A^{(0,2)} + e^{(2,3)}A^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)$$

$$+ (-D'C^{(2,3)} - D''C^{(1,3)} + D'''C^{(1,2)} + d^{(1,2)}C^{(0,3)} + d^{(1,3)}C^{(0,2)} + d^{(2,3)}C^{(0,1)}$$
$$-F'A^{(2,3)} - F''A^{(1,3)} + F'''A^{(1,2)} + f^{(1,2)}A^{(0,3)} + f^{(1,3)}A^{(0,2)} + f^{(2,3)}A^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right)$$

$$+ (-E'C^{(2,3)} - E''C^{(1,3)} + E'''C^{(1,2)} + e^{(1,2)}C^{(0,3)} + e^{(1,3)}C^{(0,2)} + e^{(2,3)}C^{(0,1)}$$
$$-F'B^{(2,3)} - F''B^{(1,3)} + F'''B^{(1,2)} + f^{(1,2)}B^{(0,3)} + f^{(1,3)}B^{(0,2)} + f^{(2,3)}B^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)\right)$$

$$+ (B'D^{(2,3)} + B''D^{(1,3)} - B'''D^{(1,2)} - b^{(1,2)}D^{(0,3)} - b^{(1,3)}D^{(0,2)} - b^{(2,3)}D^{(0,1)}$$
$$- A'E^{(2,3)} - A''E^{(1,3)} + A'''E^{(1,2)} + a^{(1,2)}E^{(0,3)} + a^{(1,3)}E^{(0,2)} + a^{(2,3)}E^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ (C'D^{(2,3)} + C''D^{(1,3)} - C'''D^{(1,2)} - c^{(1,2)}D^{(0,3)} - c^{(1,3)}D^{(0,2)} - c^{(2,3)}D^{(0,1)}$$
$$+ A'F^{(2,3)} + A''F^{(1,3)} - A'''F^{(1,2)} - a^{(1,2)}F^{(0,3)} - a^{(1,3)}F^{(0,2)} - a^{(2,3)}F^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ (-C'E^{(2,3)} - C''E^{(1,3)} + C'''E^{(1,2)} + c^{(1,2)}E^{(0,3)} + c^{(1,3)}E^{(0,2)} + c^{(2,3)}E^{(0,1)}$$
$$-B'F^{(2,3)} - B''F^{(1,3)} + B'''F^{(1,2)} + b^{(1,2)}F^{(0,3)} + b^{(1,3)}F^{(0,2)} + b^{(2,3)}F^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ (-A'A^{(2,3)} - A''A^{(1,3)} + A'''A^{(1,2)} + a^{(1,2)}A^{(0,3)} + a^{(1,3)}A^{(0,2)} + a^{(2,3)}A^{(0,1)}$$
$$-D'D^{(2,1)} + D''D^{(1,3)} - D'''D^{(1,2)} - d^{(1,2)}D^{(0,3)} - d^{(1,3)}D^{(0,2)} - d^{(2,3)}D^{(0,1)})$$
$$\times \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right)$$

Digitized by Google

$$+\left(-B'A^{(2,3)}-B''A^{(1,3)}+B'''A^{(1,2)}+b^{(1,2)}A^{(0,3)}+b^{(1,3)}A^{(0,2)}+b^{(2,3)}A^{(0,1)}\right.$$
$$\left.-D'E^{(2,3)}-D''E^{(1,3)}+D'''E^{(1,2)}+d^{(1,2)}E^{(0,3)}+d^{(1,3)}E^{(0,2)}+d^{(2,3)}E^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)$$

$$+\left(A'B^{(2,3)}+A''B^{(1,3)}-A'''B^{(1,2)}-a^{(1,2)}B^{(0,3)}-a^{(1,3)}B^{(0,2)}-a^{(2,3)}B^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+E'D^{(2,3)}+E''D^{(1,3)}-E'''D^{(1,2)}-e^{(1,2)}D^{(0,3)}-e^{(1,3)}D^{(0,2)}-e^{(2,3)}D^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\right)$$

$$+\left(-A'C^{(2,3)}-A''C^{(1,3)}+A'''C^{(1,2)}+a^{(1,2)}C^{(0,3)}+a^{(1,3)}C^{(0,2)}+a^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+F'D^{(2,3)}+F''D^{(1,3)}-F'''D^{(1,2)}+f^{(1,2)}D^{(0,3)}+f^{(1,3)}D^{(0,2)}+f^{(2,3)}D^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-B'C^{(2,3)}-B''C^{(1,3)}+B'''C^{(1,2)}+b^{(1,2)}C^{(0,3)}+b^{(1,3)}C^{(0,2)}+b^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$
$$\left.-F'E^{(2,3)}-F''E^{(1,3)}+F'''E^{(1,2)}+f^{(1,2)}E^{(0,3)}+f^{(1,3)}E^{(0,2)}+f^{(2,3)}E^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-C'B^{(2,3)}-C''B^{(1,3)}+C'''B^{(1,2)}+c^{(1,2)}B^{(0,3)}+c^{(1,3)}B^{(0,2)}+c^{(2,3)}B^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+E'F^{(2,3)}+E''F^{(1,3)}-E'''F^{(1,2)}-e^{(1,2)}F^{(0,3)}-e^{(1,3)}F^{(0,2)}-e^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)$$

$$+\left(-C'C^{(2,3)}-C''C^{(1,3)}+C'''C^{(1,2)}+c^{(1,2)}C^{(0,3)}+c^{(1,3)}C^{(0,2)}+c^{(2,3)}C^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+F'F^{(2,3)}+F''F^{(1,3)}-F'''F^{(1,2)}-f^{(1,2)}F^{(0,3)}-f^{(1,3)}F^{(0,2)}-f^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\right)$$

$$+\left(-B'B^{(2,3)}-B''B^{(1,3)}+B'''B^{(1,2)}+b^{(1,2)}B^{(0,3)}+b^{(1,3)}B^{(0,2)}+b^{(2,3)}B^{(0,1)}\right.$$
$$\left.-E'E^{(2,3)}-E''E^{(1,3)}+E'''E^{(1,2)}+e^{(1,2)}E^{(0,3)}+e^{(1,3)}E^{(0,2)}+e^{(2,3)}E^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right)$$

$$+\left(-C'A^{(2,3)}-C''A^{(1,3)}+C'''A^{(1,2)}+c^{(1,2)}A^{(0,3)}+c^{(1,3)}A^{(0,2)}+c^{(2,3)}A^{(0,1)}\right.$$
$$\left.+D'F^{(2,3)}+D''F^{(1,3)}-D'''F^{(1,2)}-d^{(1,2)}F^{(0,3)}-d^{(1,3)}F^{(0,2)}-d^{(2,3)}F^{(0,1)}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&+ [-(k'' A^{(0,1)} + k' A^{(0,2)} + k\, A^{(1,2)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'''}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(0,1)} - k' A^{(0,3)} + k\, A^{(1,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi''}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(0,2)} + k'' A^{(0,3)} + k\, A^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(1,2)} - k'' A^{(1,3)} - k' A^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \psi}{\partial p}\right)] \left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right) \\
&+ [-(k'' A^{(0,1)} + k' A^{(0,2)} + k\, A^{(1,2)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'''}{\partial q}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(0,1)} - k' A^{(0,3)} + k\, A^{(1,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi''}{\partial q}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(0,2)} + k'' A^{(0,3)} + k\, A^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'}{\partial q}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(1,2)} - k'' A^{(1,3)} - k' A^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \psi}{\partial q}\right) \\
&\quad - (k'' B^{(0,1)} + k' B^{(0,2)} + k\, B^{(1,2)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'''}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' B^{(0,1)} - k' B^{(0,3)} + k\, B^{(1,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi''}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' B^{(0,2)} + k'' B^{(0,3)} + k\, B^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' B^{(1,2)} - k'' B^{(1,3)} - k' B^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \psi}{\partial p}\right)] \left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right) \\
&+ [(-k'' C^{(0,1)} + k' C^{(0,2)} + k\, C^{(1,2)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'''}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' C^{(0,1)} - k' C^{(0,3)} + k\, C^{(1,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi''}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' C^{(0,2)} + k'' C^{(0,3)} + k\, C^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'}{\partial p}\right) \\
&\quad + (k''' C^{(1,2)} - k'' C^{(1,3)} - k' C^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \psi}{\partial p}\right) \\
&\quad - (k'' A^{(0,1)} + k' A^{(0,2)} + k\, A^{(1,2)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'''}{\partial r}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(0,1)} - k' A^{(0,3)} + k\, A^{(1,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi''}{\partial r}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(0,2)} + k'' A^{(0,3)} + k\, A^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'}{\partial r}\right) \\
&\quad + (k''' A^{(1,2)} - k'' A^{(1,3)} - k' A^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \psi}{\partial r}\right)] \left(\tfrac{\partial p}{\partial z}\right) \\
&+ [(n\, A^{(1,2)} + m\, B^{(1,2)} + l\, C^{(1,2)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'''}{\partial p}\right) \\
&\quad - (n\, A^{(1,3)} + m\, B^{(1,3)} + l\, C^{(1,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi''}{\partial p}\right) \\
&\quad - (n\, A^{(2,3)} + m\, B^{(2,3)} + l\, C^{(2,3)}) \left(\tfrac{\partial \varphi'}{\partial p}\right) \\
&\quad - (n''' A^{(1,2)} + m''' B^{(1,2)} + l''' C^{(1,2)}) \left(\tfrac{\partial \psi}{\partial p}\right)
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$-(k'' A^{(0,1)} + k' A^{(0,2)} + k A^{(1,2)}) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)$$
$$+(k''' A^{(0,1)} - k' A^{(0,3)} + k A^{(1,3)}) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)$$
$$+(k''' A^{(0,2)} + k'' A^{(0,3)} + k A^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)$$
$$+(k''' A^{(1,2)} - k'' A^{(1,3)} - k' A^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)] \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)$$
$$+[-(k'' B^{(0,1)} + k' B^{(0,2)} + k B^{(1,2)}) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)$$
$$+(k''' B^{(0,1)} - k' B^{(0,3)} + k B^{(1,3)}) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)$$
$$+(k''' B^{(0,2)} + k'' B^{(0,3)} + k B^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)$$
$$+(k''' B^{(1,2)} - k'' B^{(1,3)} - k' B^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)] \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$
$$+[(-k'' B^{(0,1)} + k' B^{(0,2)} + k B^{(1,2)}) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial r}\right)$$
$$+(k''' B^{(0,1)} - k' B^{(0,3)} + k B^{(1,3)}) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial r}\right)$$
$$+(k''' B^{(0,2)} + k'' B^{(0,3)} + k B^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right)$$
$$+(k''' B^{(1,2)} - k'' B^{(1,3)} - k' B^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)$$
$$-(k'' C^{(0,1)} + k' C^{(0,2)} + k C^{(1,2)}) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)$$
$$+(k''' C^{(0,1)} - k' C^{(0,3)} + k C^{(1,3)}) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)$$
$$+(k''' C^{(0,2)} + k'' C^{(0,3)} + k C^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)$$
$$+(k''' C^{(1,2)} - k'' C^{(1,3)} - k' C^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)] \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)$$
$$+[(n A^{(1,2)} + m B^{(1,2)} + l C^{(1,2)}) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)$$
$$-(n A^{(1,3)} + m B^{(1,3)} + l C^{(1,3)}) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)$$
$$-(n A^{(2,3)} + m B^{(2,3)} + l C^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)$$
$$-(n''' A^{(1,2)} + m''' B^{(1,2)} + l''' C^{(1,2)}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)$$
$$-(k'' B^{(0,1)} + k' B^{(0,2)} + k B^{(1,2)}) \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)$$
$$+(k''' B^{(0,1)} - k' B^{(0,3)} + k B^{(1,3)}) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)$$
$$+(k''' B^{(0,2)} + k'' B^{(0,3)} + k B^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)$$
$$+(k''' B^{(1,2)} - k'' B^{(1,3)} - k' B^{(2,3)}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)] \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)$$

$$+\left[-\left(k''\,C^{(0,1)}+k'\,C^{(0,2)}+k\,C^{(1,2)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\right.$$
$$+\left(k'''C^{(0,1)}-k'\,C^{(0,3)}+k\,C^{(1,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)$$
$$+\left(k'''C^{(0,2)}+k''C^{(0,3)}+k\,C^{(2,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)$$
$$\left.+\left(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right]\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)$$
$$+\left[\left(n\;A^{(1,2)}+m\,B^{(1,2)}+l\,C^{(1,2)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\right.$$
$$-\left(n\;A^{(1,3)}+m\,B^{(1,3)}+l\,C^{(1,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)$$
$$-\left(n\;A^{(2,3)}+m\,B^{(2,3)}+l\,C^{(2,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)$$
$$-\left(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$
$$-\left(k''\,C^{(0,1)}+k'\,C^{(0,2)}+k\,C^{(1,2)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)$$
$$+\left(k'''C^{(0,1)}-k'\,C^{(0,3)}+k\,C^{(1,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)$$
$$+\left(k'''C^{(0,2)}+k''\,C^{(0,3)}+k\,C^{(2,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)$$
$$\left.+\left(k'''C^{(1,2)}-k''\,C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right]\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right).$$
$$+\left[\left(n\;A^{(1,2)}+mB^{(1,2)}+lC^{(1,2)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right.$$
$$-\left(n\;A^{(1,3)}+mB^{(1,3)}+lC^{(1,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)$$
$$-\left(n\;A^{(2,3)}+mB^{(2,3)}+lC^{(2,3)}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)$$
$$\left.-\left(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right]\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)$$
$$+n\left(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)}\right)+m\left(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)}\right)$$
$$+l\left(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)}\right)-k\left(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)}\right)=0.$$

§. 16. On a maintenant $A^{(p,q,r)}B^{(p,q,t)}-A^{(p,q,t)}B^{(p,q,r)}$

$$=A'A'''\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right)+A''A'''\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$+A'''^{2}\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)+A'a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\right)$$
$$+A''a^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right)+A'''a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$+A'''a^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right)$$

$$= -A'A'''f^{(2,3)} + A''A'''f^{(1,3)} - A'''^2 f^{(1,2)}$$
$$+ F'''A'a^{(2,3)} - F'A'''a^{(2,3)} - F'''A''a^{(1,3)} + F''A'''a^{(1,3)}$$
$$= A'''(-A'f^{(2,3)} + A''f^{(1,3)} - A'''f^{(1,2)} - F'a^{(2,3)} + F''a^{(1,3)})$$
$$+ F'''(A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)})$$
$= $ (en faisant $N = A'f^{(2,3)} - A''f^{(1,3)} + A'''f^{(1,2)}$
$$+ F'a^{(2,3)} - F''a^{(1,3)} + F'''a^{(1,2)})$$
$$-A'''N + F'''(A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)} + A'''a^{(1,2)}) = -A'''N,$$
puisque $A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)} + A'''a^{(1,2)} = 0.$

§. 17. On aura de même: $A^{(p,q,r)}C^{(p,q,t)} - A^{(p,q,t)}C^{(p,q,r)}$

$$= A'A''\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right) + A''^2\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ A''A'''\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right) + A'a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right)$$
$$+ A''a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right) + A''a^{(1,2)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ A'''a^{(1,2)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\right)$$
$$= -A'A''f^{(2,3)} + A''^2 f^{(1,3)} - A''A'''f^{(1,2)}$$
$$+ A'F''a^{(2,3)} - A''F'a^{(2,3)} - A''F'''a^{(1,2)} + A'''F''a^{(1,2)}$$
$$= A''(-A'f^{(2,3)} + A''f^{(1,3)} - A'''f^{(1,2)} - F'a^{(2,3)} - F'''a^{(1,2)})$$
$$+ F''(A'a^{(2,3)} + A'''a^{(1,2)})$$
$$= -A''N + F''(A'a^{(2,3)} - A''a^{(1,3)} + A'''a^{(1,2)}) = -A''N.$$

§. 18. On a enfin $A^{(p,q,r)}D^{(p,q,t)} - A^{(p,q,t)}D^{(p,q,r)}$

$$= A'''a^{(1,2)}\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right) + A''a^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ A''a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right) + A'''a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ a^{(1,2)}a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)\right) + a^{(1,3)}a^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ a^{(2,3)2}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$

$$= -A''' a^{(1,2)} f^{(2,3)} + A'' a^{(1,3)} f^{(2,3)} - A'' a^{(2,3)} f^{(1,3)}$$

$$+ A''' a^{(2,3)} f^{(1,2)} + F''' a^{(1,2)} a^{(2,3)} - F'' a^{(1,3)} a^{(2,3)} + F' a^{(2,3)2}$$

$$= a^{(2,3)}(-A'' f^{(1,3)} + A''' f^{(1,2)} + F''' a^{(1,2)} - F'' a^{(1,3)} + F' a^{(2,3)})$$

$$+ f^{(2,3)}(-A''' a^{(1,2)} + A'' a^{(1,3)})$$

$$= N a^{(2,3)} - f^{(2,3)}(A' a^{(2,3)} - A'' a^{(1,3)} + A''' a^{(1,2)}) = N a^{(2,3)}.$$

§. 19. Maintenant on remarquera qu'on a :

$$A^{(p,q,r)} = B''' \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - B'' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right) - b^{(2,3)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right);$$

$$B^{(p,q,r)} = B''' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right) - B' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right) - b^{(1,3)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right);$$

$$C^{(p,q,r)} = B'' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right) - B' \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - b^{(1,2)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right);$$

$$D^{(p,q,r)} = b^{(1,2)} \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right) + b^{(1,3)} \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - b^{(2,3)} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right),$$

D'après ces valeurs, on a $A^{(p,q,r)} B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)} B^{(p,q,r)}$

$$= B' B''' \left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\right) + B'''^2 \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right)\right)$$

$$+ B'' B''' \left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\right) + B' b^{(2,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\right)$$

$$+ B''' b^{(2,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial q}\right)\right) + B''' b^{(1,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial t}\right)\right)$$

$$+ B'' b^{(1,3)} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial q}\right)\right)$$

$$= B' B''' e^{(2,3)} - B' E''' b^{(2,3)} + B'''^2 e^{(1,2)} - B'' B''' e^{(1,3)}$$

$$+ B''' E' b^{(2,3)} - B''' E'' b^{(1,3)} + B'' E''' b^{(1,3)}$$

$$= B''' (B' e^{(2,3)} - B'' e^{(1,3)} + B''' e^{(1,2)} + E' b^{(2,3)} - E'' b^{(1,3)})$$

$$+ E''' (-B' b^{(2,3)} + B'' b^{(1,3)})$$

$$= B''' (B' e^{(2,3)} - B'' e^{(1,3)} + B''' e^{(1,2)} + E' b^{(2,3)} - E'' b^{(1,3)} + E''' b^{(1,2)})$$

$$- E''' (B' b^{(2,3)} - B'' b^{(1,3)} + B''' b^{(1,2)}) = -B''' N,$$

parceque $B' e^{(2,3)} - B'' e^{(1,3)} + B''' e^{(1,2)} + E' b^{(2,3)} - E'' b^{(1,3)} + E''' b^{(1,2)}$

$$= -(A' f^{(2,3)} - A'' f^{(1,3)} + A''' f^{(1,2)} + F' a^{(2,3)} - F'' a^{(1,3)} + F''' a^{(1,2)})$$

et $B' b^{(2,3)} - B'' b^{(1,3)} + B''' b^{(1,2)} = 0.$

Digitized by Google

§. 20. On trouvera en procédant précisement de même:

$$A^{(p,q,r)}\,C^{(p,r,t)} - C^{(p,q,r)}\,A^{(p,r,t)} = -B''N,$$
$$A^{(p,q,r)}\,D^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}\,D^{(p,q,r)} = b^{(2,3)}\,N.$$

§. 21. On remarquera enfin qu'on a:

$$A^{(p,q,r)} = C''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - C'''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$
$$B^{(p,q,r)} = C'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - C'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) + c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$
$$C^{(p,q,r)} = C'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) - C''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) + c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$
$$D^{(p,q,r)} = c^{(1,2)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - c^{(1,3)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right) + c^{(2,3)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right).$$

D'aprés ces valeurs, on a $A^{(p,q,r)}\,B^{(q,r,t)} - A^{(q,r,t)}\,B^{(p,q,r)}$

$$= C'C'''\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right) + C''C'''\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ C'''^2\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)\right) + C'c^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)\right)$$
$$+ C'''c^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right) + C''c^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ C'''c^{(1,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)\right)$$
$$= -C'C'''d^{(2,3)} + C''C'''d^{(1,3)} - C'''^2d^{(1,2)} + C'D'''c^{(2,3)}$$
$$- C'''D'c^{(2,3)} - C''D'''c^{(1,3)} + C'''D''c^{(1,3)}$$
$$= C'''(-C'd^{(2,3)} + C''d^{(1,3)} - C'''d^{(1,2)} - D'c^{(2,3)} + D''c^{(1,3)})$$
$$+ C'D'''c^{(2,3)} - C''D'''c^{(1,3)}$$
$$= C'''(-C'd^{(2,3)} + C''d^{(1,3)} - C'''d^{(1,2)} - D'c^{(2,3)} + D''c^{(1,3)} - D'''c^{(1,2)})$$
$$+ D'''(C'c^{(2,3)} - C''c^{(1,3)} + C'''c^{(1,2)}) = -C'''N,$$

parceque:

$$C'd^{(2,3)} - C''d^{(1,3)} + C'''d^{(1,2)} + D'c^{(2,3)} - D''c^{(1,3)} + D'''c^{(1,2)}$$
$$= B'f^{(2,3)} - B''f^{(1,3)} + B'''f^{(1,2)} + F'b^{(2,3)} - F''b^{(1,3)} + F'''b^{(1,2)}$$

et $C'c^{(2,3)} - C''c^{(1,3)} + C'''c^{(1,2)} = 0.$

§. 22. On trouvera en procédant précisement de la même manière :

$$A^{(p,q,r)}\,C^{(q,r,t)} - A^{(q,r,t)}\,C^{(p,q,r)} = - C''\,N,$$

$$A^{(p,q,r)}\,D^{(q,r,t)} - A^{(q,r,t)}\,D^{(p,q,r)} = c^{(2,3)}\,N.$$

§. 23. On a donc ainsi :

$$B^{(p,q,t)} = \frac{A^{(p,q,t)}\,B^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}} - \frac{A'''\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$C^{(p,q,t)} = \frac{A^{(p,q,t)}\,C^{(p,q,r)} - A''\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$D^{(p,q,t)} = \frac{A^{(p,q,t)}\,D^{(p,q,r)} + a^{(2,3)}\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$B^{(p,r,t)} = \frac{A^{(p,r,t)}\,B^{(p,q,r)} - B'''\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$C^{(p,r,t)} = \frac{A^{(p,r,t)}\,C^{(p,q,r)} - B''\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$D^{(p,r,t)} = \frac{A^{(p,r,t)}\,D^{(p,q,r)} + b^{(2,3)}\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$B^{(q,r,t)} = \frac{A^{(q,r,t)}\,B^{(p,q,r)} - C'''\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$C^{(q,r,t)} = \frac{A^{(q,r,t)}\,C^{p,(q,r)} - C''\,N}{A^{(p,q,r)}},$$

$$D^{(q,r,t)} = \frac{A^{(q,r,t)}\,D^{(p,q,r)} + c^{(2,3)}\,N}{A^{(p,q,r)}};$$

Digitized by Google

Appellant maintenant $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$, $\alpha^{(5)}$, $\alpha^{(6)}$, $\alpha^{(7)}$, $\alpha^{(8)}$, $\alpha^{(9)}$, $\alpha^{(10)}$, les coëfficiens des termes 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e, 8^e, 9^e, 10^e, 11^e de l'équation générale, et substituant dans ces coëfficiens les valeurs trouvées ci-dessus, on a

$$A^{(p,r,t)}(A^{(p,q,r)}m' - B^{(p,q,r)}m'' + C^{(p,q,r)}m''' - D^{(p,q,r)}m)$$
$$+ N(B'''m'' - B''m''' - b^{(2,3)}m) = A^{(p,q,r)}\alpha^{(1)},$$

$$A^{(q,r,t)}(A^{(p,q,r)}n' - B^{(p,q,r)}n'' + C^{(p,q,r)}n''' - D^{(p,q,r)}n)$$
$$+ N(C'''n'' - C''n''' - c^{(2,3)}n) = A^{(p,q,r)}\alpha^{(2)},$$

$$A^{(p,q,t)}(A^{(p,q,r)}l' - B^{(p,q,r)}l'' + C^{(p,q,r)}l''' - D^{(p,q,r)}l)$$
$$+ N(A'''l'' - A''l''' - a^{(2,3)}l) = A^{(p,q,r)}\alpha^{(3)},$$

$$A^{(p,q,r)}k' - B^{(p,q,r)}k'' + C^{(p,q,r)}k''' - D^{(p,q,r)}k = \alpha^{(4)};$$

$$A^{(q,r,t)}(A^{(p,q,r)}m' - B^{(p,q,r)}m'' + C^{(p,q,r)}m''' - D^{(p,q,r)}m)$$
$$+ N(C'''m'' - C''m''' - c^{(2,3)}m)$$
$$- A^{(p,r,t)}(A^{(p,q,r)}n' - B^{(p,q,r)}n'' + C^{(p,q,r)}n''' - D^{(p,q,r)}n)$$
$$- N(B'''n'' - B''n''' - b^{(2,3)}n) = A^{(p,q,r)}\alpha^{(5)},$$

$$A^{(q,r,t)}(A^{(p,q,r)}l' - B^{(p,q,r)}l'' + C^{(p,q,r)}l''' - D^{(p,q,r)}l)$$
$$+ N(C'''l'' - C''l''' - c^{(2,3)}l)$$
$$- A^{(p,q,t)}(A^{(p,q,r)}n' - B^{(p,q,r)}n'' + C^{(p,q,r)}n''' - D^{(p,q,r)}n)$$
$$- N(A'''n'' - A''n''' - a^{(2,3)}n) = A^{(p,q,r)}\alpha^{(6)},$$

$$A^{(q,r,t)}(A^{(p,q,r)}l' - B^{(p,q,r)}l'' + C^{(p,q,r)}l''' - D^{(p,q,r)}l)$$
$$+ N(C'''l'' - C''l''' - c^{(2,3)}l)$$
$$- A^{(p,q,t)}(A^{(p,q,r)}m' - B^{(p,q,r)}m'' + C^{(p,q,r)}m''' - D^{(p,q,r)}m)$$
$$- N(A'''m'' - A''m''' - a^{(2,3)}m) = A^{(p,q,r)}\alpha^{(7)},$$

$$A^{(p,q,r)}\,l' - B^{(p,q,r)}\,l'' + C^{(p,q,r)}\,l''' - D^{(p,q,r)}\,l$$
$$- A^{(p,q,t)}\,(A^{(p,q,r)}\,k' - B^{(p,q,r)}\,k'' + C^{(p,q,r)}\,k''' - D^{(p,q,r)}\,k)$$
$$- N\,(A'''\,k'' - A''\,k''' - a^{(2,3)}\,k) = A^{(p,q,r)}\,\alpha^{(8)},$$

$$A^{(p,q,r)}\,m' - B^{(p,q,r)}\,m'' + C^{(p,q,r)}\,m''' - D^{(p,q,r)}\,m$$
$$- A^{(p,r,t)}\,(A^{(p,q,r)}\,k' - B^{(p,q,r)}\,k'' + C^{(p,q,r)}\,k''' - D^{(p,q,r)}\,k)$$
$$- N\,(B'''\,k'' - B''\,k''' - b^{(2,3)}\,k) = A^{(p,q,r)}\,\alpha^{(9)},$$

$$A^{(p,q,r)}\,n' - B^{(p,q,r)}\,n'' + C^{(p,q,r)}\,n''' - D^{(p,q,r)}\,n$$
$$- A^{(q,r,t)}\,(A^{(p,q,r)}\,k' - B^{(p,q,r)}\,k'' + C^{(p,q,r)}\,k''' - D^{(r,q,r)}\,k)$$
$$- N\,(C'''\,k'' - C''\,k''' - c^{(2,3)}\,k) = A^{(p,q,r)}\,\alpha^{(10)}.$$

§. 24. Si l'on fait $N=0$, $\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=\alpha^{(3)}\ldots=\alpha^{(10)}=0$; on aura :

$$A'f^{(2,3)} - A''f^{(1,3)} + A'''f^{(1,2)} + F'a^{(2,3)} - F''a^{(1,3)} + F'''a^{(1,2)} = 0,$$

$$B^{(p,q,t)} = \frac{A^{(p,q,t)}\,B^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}}, \quad C^{(p,q,t)} = \frac{A^{(p,q,t)}\,C^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}},$$

$$D^{(p,q,t)} = \frac{A^{(p,q,t)}\,D^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}}, \quad B^{(p,r,t)} = \frac{A^{(p,r,t)}\,B^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}},$$

$$C^{(p,r,t)} = \frac{A^{(p,r,t)}\,C^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}}, \quad D^{(p,r,t)} = \frac{A^{(p,r,t)}\,D^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}},$$

$$B^{(q,r,t)} = \frac{A^{(q,r,t)}\,B^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}}, \quad C^{(q,r,t)} = \frac{A^{(q,r,t)}\,C^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}},$$

$$D^{(q,r,t)} = \frac{A^{(q,r,t)}\,D^{(p,q,r)}}{A^{(p,q,r)}},$$

Digitized by Google

ce qui donne les quatre équations suivantes:

$$A^{(p,q,r)} m' - B^{(p,q,r)} m'' + C^{(p,q,r)} m''' - D^{(p,q,r)} m = 0,$$
$$A^{(p,q,r)} n' - B^{(p,q,r)} n'' + C^{(p,q,r)} n''' - D^{(p,q,r)} n = 0,$$
$$A^{(p,q,r)} l' - B^{(p,q,r)} l'' + C^{(p,q,r)} l''' - D^{(p,q,r)} l = 0,$$
$$A^{(p,q,r)} k' - B^{(p,q,r)} k'' + C^{(p,q,r)} k''' - D^{(p,q,r)} k = 0.$$

On tire de là $A^{(p,q,r)}$

$$= \frac{B^{(p,q,r)} m'' - C^{(p,q,r)} m''' + D^{(p,q,r)} m}{m'}$$
$$= \frac{B^{(p,q,r)} n'' - C^{(p,q,r)} n''' + D^{(p,q,r)} n}{n'}$$
$$= \frac{B^{(p,q,r)} l'' - C^{(p,q,r)} l''' + D^{(p,q,r)} l}{l'}$$
$$= \frac{B^{(p,q,r)} k'' - C^{(p,q,r)} k''' + D^{(p,q,r)} k}{k'}.$$

On tire de là ces trois équations:

$$B^{(p,q,r)}(m''n'-m'n'')-C^{(p,q,r)}(m'''n'-m'n''')+D^{(p,q,r)}(mn'-m'n)=0,$$
$$B^{(p,q,r)}(m''l'-m'l'')-C^{(p,q,r)}(m'''l'-m'l''')+D^{(p,q,r)}(ml'-m'l)=0,$$
$$B^{(p,q,r)}(m''k'-m'k'')-C^{(p,q,r)}(m'''k'-m'k''')+D^{(p,q,r)}(mk'-m'k)=0,$$

ou $B^{(p,q,r)} C^{(1,2)} - C^{(p,q,r)} C^{(1,3)} - D^{(p,q,r)} C^{(0,1)} = 0,$

$B^{(p,q,r)} A^{(1,2)} - C^{(p,q,r)} A^{(1,3)} - D^{(p,q,r)} A^{(0,1)} = 0,$

$B^{(p,q,r)} E^{(1,2)} - C^{(p,q,r)} E^{(1,3)} - D^{(p,q,r)} E^{(0,1)} = 0.$

Donc $B^{(p,q,r)} = \dfrac{C^{(p,q,r)} C^{(1,3)} + D^{(p,q,r)} C^{(0,1)}}{C^{(1,2)}}$

$$= \frac{C^{(p,q,r)} A^{(1,3)} + D^{(p,q,r)} A^{(0,1)}}{A^{(1,2)}} = \frac{C^{(p,q,r)} E^{(1,3)} + D^{(p,q,r)} E^{(0,1)}}{E^{(1,2)}},$$

d'où l'on tire les trois équations :

$$C^{(p,q,r)} (C^{(1,3)} A^{(1,2)} - A^{(1,3)} C^{(1,2)})$$
$$+ D^{(p,q,r)} (C^{(0,1)} A^{(1,2)} - C^{(1,2)} A^{(0,1)}) = 0, \quad (a)$$
$$C^{(p,q,r)} (C^{(1,3)} E^{(1,2)} - E^{(1,3)} C^{(1,2)})$$
$$+ D^{(p,q,r)} (C^{(0,1)} E^{(1,2)} - C^{(1,2)} E^{(0,1)}) = 0, \quad (b)$$
$$C^{(p,q,r)} (A^{(1,3)} E^{(1,2)} - A^{(1,2)} E^{(1,3)})$$
$$+ D^{(p,q,r)} (A^{(0,1)} E^{(1,2)} - A^{(1,2)} E^{(0,1)}) = 0 \quad (c).$$

On tire des deux premières équations l'équation finale :

$$A^{(0,1)}(C^{(1,3)} E^{(1,2)} - C^{(1,2)} E^{(1,3)}) + C^{(0,1)}(A^{(1,2)} E^{(1,3)} - A^{(1,3)} E^{(1,2)})$$
$$+ E^{(0,1)} (A^{(1,3)} C^{(1,2)} - A^{(1,2)} C^{(1,3)}) = 0,$$ parceque l'on a

$$\frac{C^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}} = \frac{C^{(0,1)} A^{(1,2)} - C^{(1,2)} A^{(0,1)}}{A^{(1,3)} C^{(1,2)} - C^{(1,3)} A^{(1,2)}} = \frac{C^{(0,1)} E^{(1,2)} - C^{(1,2)} E^{(0,1)}}{E^{(1,3)} C^{(1,2)} - C^{(1,3)} E^{(1,2)}}.$$

L'équation finale peut prendre cette forme :

$$A^{(0,1)} (- C^{(1,2)} k''' + C^{(1,3)} k'' + C^{(2,3)} k')$$
$$+ C^{(0,1)} (A^{(1,2)} k''' - A^{(1,3)} k'' - A^{(2,3)} k')$$
$$+ E^{(0,1)} (- B^{(1,2)} m''' - A^{(1,2)} n''' - C^{(1,2)} l''') = 0,$$

ou $$(m'l - ml')(k' C^{(2,3)} + k'' C^{(1,3)} - k''' C^{(1,2)})$$
$$+ (n'm - nm')(- k' A^{(2,3)} - k'' A^{(1,3)} + k''' A^{(1,2)})$$
$$+ (k'm - km')(- B^{(1,2)} m''' - A^{(1,2)} n''' - C^{(1,2)} l''') = 0,$$

ou $$m' (l (k' C^{(2,3)} + k'' C^{(1,3)} - k''' C^{(1,2)})$$
$$+ n (k' A^{(2,3)} + k'' A^{(1,3)} - k''' A^{(1,2)})$$
$$+ k (B^{(1,2)} m''' + A^{(1,2)} n''' + C^{(1,2)} l''')$$

Digitized by Google

$$+ m(-k'l'C^{(2,3)} - k'n'A^{(2,3)} - k'm'''B^{(1,2)} - k'n'''A^{(1,2)} - k'l'''C^{(1,2)}$$
$$- k''l'C^{(1,3)} - k''n'A^{(1,3)} + k'''l'C^{(1,2)} + k'''n'A^{(1,2)}) = 0,$$

ou $l\,(k'C^{(2,3)} + k''C^{(1,3)} - k'''C^{(1,2)}) + n(k'A^{(2,3)} + k''A^{(1,3)} - k'''A^{(1,2)})$
$$+ m\,(k'B^{(2,3)} + k''B^{(1,3)} - k'''B^{(1,2)})$$
$$+ k\,(B^{(1,2)}m''' + A^{(1,2)}n''' + C^{(1,2)}l''') = 0.$$

Or le premier membre de cette équation est le dernier terme de l'équation générale, ce terme est donc nul dans les suppositions présentes. Donc une équation où

$$N = \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \ldots = \alpha^{(10)} = 0,$$

et dont le dernier terme n'est pas nul, n'a point d'intégrale du premier degré de cette forme, à moins que Φ', Φ'', Φ''' ne soyent exempts de p, q, r, t. C'est le cas de l'équation $gh\,((\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}) + (\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}) + (\frac{\partial\partial\Phi}{\partial z^2})) - (\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2}) + g\,(\frac{\partial\Phi}{\partial z}) = 0$, que Mr. *de la Grange* donne (Méc. p. 502.) pour la théorie du son.

§. 25. On a de plus les trois équations:

$$l\,(kC^{(2,3)} + k''C^{(0,3)} + k'''C^{(0,2)}) + n\,(kA^{(2,3)} + k''A^{(0,3)} + k'''A^{(0,2)})$$
$$+ m\,(kB^{(2,3)} + k''B^{(0,3)} + k'''B^{(0,2)})$$
$$- k\,(B^{(0,2)}m''' + A^{(0,2)}n''' + C^{(0,2)}l''') = 0,$$

$$l(-k'C^{(0,3)} + kC^{(1,3)} + k'''C^{(0,1)}) + n\,(-k'A^{(0,3)} + kA^{(1,3)} + k'''A^{(0,1)})$$
$$+ m\,(-k'B^{(0,3)} + kB^{(1,3)} + k'''B^{(0,1)})$$
$$- k\,(B^{(0,1)}m''' + A^{(0,1)}n''' + C^{(0,1)}l''') = 0;$$

$$l\,(k'C^{(0,2)} + k''C^{(0,1)} + kC^{(1,2)}) + n\,(k'A^{(0,2)} + k''A^{(0,1)} + kA^{(1,2)})$$
$$+ m\,(k'B^{(0,2)} + k''B^{(0,1)} + kB^{(1,2)}) + k\,(B^{(1,2)}m + A^{(1,2)}n + C^{(1,2)}l) = 0.$$

Ces trois équations deviennent par le développement :

$$C^{(p,q,r)}(k'A^{(2,3)} + k''A^{(1,3)} - k'''A^{(1,2)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(kA^{(1,2)} + k'A^{(0,2)} + k''A^{(0,1)}) = 0,$$
$$C^{(p,q,r)}(k'C^{(2,3)} + k''C^{(1,3)} - k'''C^{(1,2)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(kC^{(1,2)} + k'C^{(0,2)} + k''C^{(0,1)}) = 0,$$
$$C^{(p,q,r)}(n'''A^{(1,2)} + m'''B^{(1,2)} + l'''C^{(1,2)})$$
$$- D^{(p,q,r)}(nA^{(1,2)} + mB^{(1,2)} + lC^{(1,2)}) = 0.$$

On trouvera en opérant de même :

$$B^{(p,q,r)}(-k'A^{(2,3)} + k'''A^{(1,2)} - k''A^{(1,3)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(kA^{(1,3)} + k'A^{(0,3)} + k'''A^{(0,1)}) = 0,$$
$$B^{(p,q,r)}(-k'C^{(2,3)} + k'''C^{(1,2)} - k''C^{(1,3)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(kC^{(1,3)} - k'C^{(0,3)} + k'''C^{(0,1)}) = 0,$$
$$B^{(p,q,r)}(n'''A^{(1,2)} + m'''B^{(1,2)} + l'''C^{(1,2)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(nA^{(1,3)} + mB^{(1,3)} + lC^{(1,3)}) = 0,$$
$$A^{(p,q,r)}(k'''A^{(1,2)} - k''A^{(1,3)} - k'A^{(2,3)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(kA^{(2,3)} + k'''A^{(0,2)} + k''A^{(0,3)}) = 0,$$
$$A^{(p,q,r)}(k'''C^{(1,2)} - k''C^{(1,3)} - k'C^{(2,3)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(kC^{(2,3)} + k'''C^{(0,2)} + k''C^{(0,3)}) = 0,$$
$$A^{(p,q,r)}(n'''A^{(1,2)} + m'''B^{(1,2)} + l'''C^{(1,2)})$$
$$+ D^{(p,q,r)}(nA^{(2,3)} + mB^{(2,3)} + lC^{(2,3)}) = 0.$$

On tire aussi des premières équations les deux suivantes :

$$B^{(p,q,r)}(n''l' - n'l'') - C^{(p,q,r)}(n'''l' - n'l''') + D^{(p,q,r)}(nl' - n'l) = 0,$$
$$B^{(p,q,r)}(n''k' - n'k'') - C^{(p,q,r)}(n'''k' - n'k''') + D^{(p,q,r)}(nk' - n'k) = 0,$$

Digitized by Google

ou $-B^{(p,q,r)}B^{(1,2)}+C^{(p,q,r)}B^{(1,3)}+D^{(p,q,r)}B^{(0,1)}=0,$

$-B^{(p,q,r)}F^{(1,2)}+C^{(p,q,r)}F^{(1,3)}+D^{(p,q,r)}F^{(0,1)}=0.$

Donc $B^{(p,q,r)}=\frac{C^{(p,q,r)}B^{(1,3)}+D^{(p,q,r)}B^{(0,1)}}{B^{(1,2)}}=\frac{C^{(p,q,r)}F^{(1,3)}+D^{(p,q,r)}F^{(0,1)}}{F^{(1,2)}}.$

Donc $C^{(p,q,r)}(B^{(1,3)}F^{(1,2)}-B^{(1,2)}F^{(1,3)})$

$+D^{(p,q,r)}(B^{(0,1)}F^{(1,2)}-B^{(1,2)}F^{(0,1)})=0,$

ou $C^{(p,q,r)}(k'B^{(2,3)}+k''B^{(1,3)}-k'''B^{(1,2)})$

$D^{(p,q,r)}(k\,B^{(1,2)}+k'B^{(0,2)}+k''B^{(0,1)})=0.$

On trouvera en opérant de même :

$B^{(p,q,r)}(-k'B^{(2,3)}+k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)})$

$+D^{(p,q,r)}(k\,B^{(1,3)}-k'B^{(0,3)}+k'''B^{(0,1)})=0,$

$A^{(p,q,r)}(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})$

$+D^{(p,q,r)}(k\,B^{(2,3)}+k'''B^{(0,2)}+k''B^{(0,3)})=0.$

Donc

$k''A^{(0,1)}+k'A^{(0,2)}+kA^{(1,2)}=\frac{C^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)});$

$k'''A^{(0,1)}-k'A^{(0,3)}+kA^{(1,3)}=\frac{B^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)});$

$k'''A^{(0,2)}+k''A^{(0,3)}+kA^{(2,3)}=-\frac{A^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)});$

$k''B^{(0,1)}+k'B^{(0,2)}+kB^{(1,2)}=\frac{C^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)});$

$k'''B^{(0,1)}-k'B^{(0,3)}+kB^{(1,3)}=\frac{B^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)});$

$k'''B^{(0,2)}+k''B^{(0,3)}+kB^{(2,3)}=-\frac{A^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)});$

$k''C^{(0,1)}+k'C^{(0,2)}+kC^{(1,2)}=\frac{C^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)});$

$$k'''C^{(0,1)}-k'C^{(0,3)}+kC^{(1,3)}=\frac{B^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)});$$

$$k'''C^{(0,2)}+k''C^{(0,3)}+kC^{(2,3)}=-\frac{A^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)});$$

$$nA^{(1,2)}+mB^{(1,2)}+lC^{(1,2)}=\frac{C^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)});$$

$$nA^{(1,3)}+mB^{(1,3)}+lC^{(1,3)}=\frac{B^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)});$$

$$nA^{(2,3)}+mB^{(2,3)}+lC^{(2,3)}=-\frac{A^{(p,q,r)}}{D^{(p,q,r)}}(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)}).$$

§. 26. On aura maintenant en substituant les valeurs, et appellant respectivement $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$, $\gamma^{(4)}$, $\gamma^{(5)}$, $\gamma^{(6)}$, $\gamma^{(7)}$, $\gamma^{(8)}$, $\gamma^{(9)}$, $\gamma^{(10)}$ les coëfficiens de $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)$, on aura, dis-je :

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(1)}=(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(2)}=(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)$$
$$+(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(3)}=(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$
$$+(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(4)}=(k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$-(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)})$$

Digitized by Google

$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(5)}=(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(6)}=(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$
$$+(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(7)}=(k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$-(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(8)}=(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(9)}=(k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right)$$
$$-n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right);$$

$$D^{(p,q,r)}\gamma^{(10)}=-(n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)})$$
$$\times\left(D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)\right).$$

§. 27. Or

$$D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial p}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial p}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)=0,$$
$$D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial q}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial q}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)=0,$$
$$D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial r}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial r}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)=0,$$
$$D^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-C^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)+B^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)-A^{(p,q,r)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)=0.$$

Les trois premières équations se démontrent directement par la substitution des valeurs $D^{(p,q,r)}$, $C^{(p,q,r)}$, $B^{(p,q,r)}$, $A^{(p,q,r)}$. Quant à la quatrième, on peut le mettre sous cette forme :

$$D^{(p,q,t)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-C^{(p,q,t)}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial t}\right)+B^{(p,q,t)}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial t}\right)-A^{(p,q,t)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right)=0,$$

et celle-ci se démontre par la substitution des valeurs $D^{(p,q,t)}$, $C^{(p,q,t)}$, $B^{(p,q,t)}$, $A^{(p,q,t)}$. On a donc :

$$\gamma^{(1)}=\gamma^{(2)}=\gamma^{(3)}=\gamma^{(4)}=\gamma^{(5)}=\gamma^{(6)}=\gamma^{(7)}=\gamma^{(8)}=\gamma^{(9)}=\gamma^{(10)}=0.$$

Il suit de là que les équations de la forme :

$$\gamma^{(1)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+\gamma^{(2)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)+\gamma^{(3)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}\right)+\gamma^{(4)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial u}\right)+\gamma^{(5)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+\gamma^{(6)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right)$$
$$+\gamma^{(7)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial u}\right)+\gamma^{(8)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)+\gamma^{(9)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v\partial u}\right)+\gamma^{(10)}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right)+\omega=0,$$

n'ont point d'Intégrale première de la forme $\psi=F:(\Phi',\Phi'')$ où Φ', Φ'', Φ''' contiennent p, q, r, t.

§. 28. Soyent respectivement $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}\ldots\beta^{(21)}$, les coëfficiens des 21 termes de l'équation générale qui vont depuis le 12^e jusqu'au 32^e inclusivement, on a :

$$\beta^{(1)}=A'D^{(2,3)}+A''D^{(1,3)}-A'''D^{(1,2)}$$
$$-a^{(1,2)}D^{(0,3)}-a^{(1,3)}D^{(0,2)}-a^{(2,3)}D^{(0,1)}.$$

Or on tire des équations générales du §. 24 l'équation:

$$B^{(p,q,r)}D^{(1,2)}-C^{(p,q,r)}D^{(1,3)}-D^{(p,q,r)}D^{(0,1)}=0,$$

ce qui donne: $D^{(1,3)}=\dfrac{B^{(p,q,r)}D^{(1,2)}-D^{(p,q,r)}D^{(0,1)}}{C^{(p,q,r)}}$, ce qui substitué dans la valeur $\beta^{(1)}$ donne:

Digitized by Google

$$\beta^{(1)} = A' D^{(2,3)} + \frac{(A'' B^{(p,q,r)} - A''' C^{(p,q,r)})}{C^{(p,q,r)}} D^{(1,2)}$$

$$- a^{(1,2)} D^{(0,3)} - a^{(1,3)} D^{(0,2)} - \frac{(a^{(2,3)} C^{(p,q,r)} + A'' D^{(p,q,r)})}{C^{(p,q,r)}} D^{(0,1)}$$

$$= A' D^{(2,3)} + \frac{A' A^{(p,q,r)} D^{(1,2)}}{C^{(p,q,r)}} - a^{(1,2)} D^{(0,3)} - a^{(1,3)} D^{(0,2)} + \frac{a^{(1,2)} A^{(p,q,r)} D^{(0,1)}}{C^{(p,q,r)}}.$$

Je tire encore des mêmes équations du §. 24:

$$A^{(p,q,r)} D^{(1,2)} + C^{(p,q,r)} D^{(2,3)} + D^{(p,q,r)} D^{(0,2)} = 0,$$

ce qui donne $D^{(2,3)} = - \frac{A^{(p,q,r)} D^{(1,2)} - D^{(p,q,r)} D^{(0,2)}}{C^{(p,q,r)}}$, ce qui étant substitué dans la valeur de $\beta^{(1)}$ donne:

$$\beta^{(1)} = - \frac{A' D^{(p,q,r)} D^{(0,2)}}{C^{(p,q,r)}} - a^{(1,2)} D^{(0,3)} - a^{(1,3)} D^{(0,2)}$$

$$+ \frac{a^{(1,2)} A^{(p,q,r)} D^{(0,1)}}{C^{(p,q,r)}}.$$

On tire encore des mêmes expressions du §. 24:

$$A^{(p,q,r)} D^{(0,1)} + B^{(p,q,r)} D^{(0,2)} + C^{(p,q,r)} D^{(0,3)} = 0,$$

ce qui donne: $D^{(0,3)} = \frac{A^{(p,q,r)} D^{(0,1)} - B^{(p,q,r)} D^{(0,2)}}{C^{(p,q,r)}}$.

On a en substituant:

$$\beta^{(1)} = - A' D^{(p,q,r)} - a^{(1,3)} C^{(p,q,r)} + a^{(1,2)} B^{(p,q,r)}$$

$$= A' a^{(2,3)} - A'' a^{(1,3)} + A''' A^{(1,2)} = 0.$$

On prouvera précisement de même que tous les autres

coëfficiens $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$ . . . . . $\beta^{(21)}$ sont nuls. Si donc dans l'équation générale proposée, on a $N = o$, $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \ldots = \alpha^{(10)} = o$, les coëfficiens de tous les autres termes seront nuls, et par conséquent l'équation sera identiquement nulle. Cette conclusion est précisement la même que celle que nous avons trouvée §. 4 pour le cas précédent $\psi = F : (\Phi', \Phi'')$.

§. 29. Multiplions maintenant les équations en $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$, $\alpha^{(5)}$, $\alpha^{(6)}$, $\alpha^{(7)}$, $\alpha^{(8)}$, $\alpha^{(9)}$, $\alpha^{(10)}$ respectivement par $B^{(I)}$, $B^{(II)}$, $B^{(III)}$, $B^{(IV)}$, $B^{(V)}$, $B^{(VI)}$, $B^{(VII)}$, $B^{(VIII)}$, $B^{(IX)}$, $B^{(X)}$; ajoutant ensemble ces équations, et égalant séparément à zéro les coëfficiens de m', m'', m'''; n', n'', n'''; l', l'', l'''; k', k'', k''', on aura l'équation principale :

$$\begin{aligned}
&(-B^{(I)} D^{(p,r,t)} - B^{(V)} D^{(q,r,t)} + B^{(VII)} D^{(p,q,t)} - B^{(IX)} D^{(p,q,r)})\, m \\
&+ (-B^{(II)} D^{(q,r,t)} + B^{(V)} D^{(p,r,t)} + B^{(VI)} D^{(p,q,t)} - B^{(X)} D^{(p,q,r)})\, n \\
&+ (-B^{(III)} D^{(p,q,t)} + B^{(VI)} D^{(q,r,t)} - B^{(VII)} D^{(p,r,t)} - B^{(VIII)} D^{(p,q,r)})\, l \\
&+ (-B^{(IV)} D^{(p,q,r)} + B^{(VIII)} D^{(p,q,t)} - B^{(IX)} D^{(p,r,t)} + B^{(X)} D^{(q,r,t)})\, k \\
&= B^{(I)} \alpha^{(1)} + B^{(II)} \alpha^{(2)} + B^{(III)} \alpha^{(3)} + B^{(IV)} \alpha^{(4)} + B^{(V)} \alpha^{(5)} + B^{(VI)} \alpha^{(6)} \\
&\quad + B^{(VII)} \alpha^{(7)} + B^{(VIII)} \alpha^{(8)} + B^{(IX)} \alpha^{(9)} + B^{(X)} \alpha^{(10)},
\end{aligned}$$

et les équations de condition suivantes :

$$B^{(I)} A^{(p,r,t)} + B^{(V)} A^{(q,r,t)} - B^{(VII)} A^{(p,q,t)} + B^{(IX)} A^{(p,q,r)} = o,$$

$$- B^{(I)} B^{(p,r,t)} - B^{(V)} B^{(q,r,t)} + B^{(VII)} B^{(p,q,t)} - B^{(IX)} B^{(p,q,r)} = o,$$

$$B^{(I)} C^{(p,r,t)} + B^{(V)} C^{(q,r,t)} - B^{(VII)} C^{(p,q,t)} + B^{(IX)} C^{(p,q,r)} = o,$$

Digitized by Google

$$B^{(II)} A^{(q,r,t)} - B^{(V)} A^{(p,r,t)} - B^{(VI)} A^{(p,q,t)} + B^{(X)} A^{(p,q,r)} = 0,$$
$$- B^{(II)} B^{(q,r,t)} + B^{(V)} B^{(p,r,t)} + B^{(VI)} B^{(p,q,t)} - B^{(X)} B^{(p,q,r)} = 0,$$
$$B^{(II)} C^{(q,r,t)} - B^{(V)} C^{(p,r,t)} - B^{(VI)} C^{(p,q,t)} + B^{(X)} C^{(p,q,r)} = 0,$$

$$B^{(III)} A^{(p,q,t)} - B^{(VI)} A^{(q,r,t)} + B^{(VII)} A^{(p,r,t)} + B^{(VIII)} A^{(p,q,r)} = 0,$$
$$- B^{(III)} B^{(p,q,t)} + B^{(VI)} B^{(q,r,t)} - B^{(VII)} B^{(p,r,t)} - B^{(VIII)} B^{(p,q,r)} = 0,$$
$$B^{(III)} C^{(p,q,t)} - B^{(VI)} C^{(q,r,t)} + B^{(VII)} C^{(p,r,t)} + B^{(VIII)} C^{(p,q,r)} = 0,$$

$$B^{(IV)} A^{(r,q,r)} - B^{(VIII)} A^{(p,q,t)} + B^{(IX)} A^{(p,r,t)} - B^{(X)} A^{(q,r,t)} = 0,$$
$$- B^{(IV)} B^{(p,q,r)} + B^{(VIII)} B^{(p,q,t)} - B^{(IX)} B^{(p,r,t)} + B^{(X)} B^{(q,r,t)} = 0,$$
$$B^{(IV)} C^{(p,q,r)} - B^{(VIII)} C^{(p,q,t)} + B^{(IX)} C^{(p,r,t)} - B^{(X)} C^{(q,r,t)} = 0.$$

---

§. 30. On tire des trois premières équations de condition les deux suivantes:

$$\begin{aligned}
& B^{(V)} \left(A^{(q,r,t)} B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)} B^{(q,r,t)}\right) \\
- & B^{(VII)} \left(A^{(p,q,t)} B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)} B^{(p,q,t)}\right) \\
+ & B^{(IX)} \left(A^{(p,q,r)} B^{(p,r,t)} - B^{(p,q,r)} A^{(p,r,t)}\right) = 0; \\
- & B^{(V)} \left(B^{(q,r,t)} C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)} C^{(q,r,t)}\right) \\
+ & B^{(VII)} \left(B^{(p,q,t)} C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)} C^{(p,q,t)}\right) \\
- & B^{(IX)} \left(B^{(p,q,r)} C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)} C^{(p,q,r)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

ou en substituant les valeurs et réduisant:

$$B^{(V)} F''' + B^{(VII)} D''' - B^{(IX)} B''' = 0;$$
$$B^{(IV)} F' + B^{(VII)} D' - B^{(IX)} B' = 0.$$

Digitized by Google

On tire de ces deux équations l'équation suivante :

$$B^{(VII)}(D'''F' - D'F''') - B^{(IX)}(B'''F' - B'F''') = 0,$$

ou en substituant les valeurs et réduisant :

$$B^{(VII)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - B^{(IX)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0.$$

Donc $B^{(VII)} = \dfrac{B^{(IX)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(V)} = -\dfrac{B^{(IX)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(I)} = \dfrac{B^{(IX)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$.

§. 31. On tire des trois équations de condition qui suivent :

$$\begin{aligned}
&B^{(II)}(A^{(q,r,t)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(q,r,t)}) \\
-\;&B^{(VI)}(A^{(p,q,t)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(p,q,t)}) \\
+\;&B^{(X)}(A^{(p,q,r)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(p,q,r)}) = 0, \\
-\;&B^{(II)}(B^{(q,r,t)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(q,r,t)}) \\
+\;&B^{(VI)}(B^{(p,q,t)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(p,q,t)}) \\
-\;&B^{(X)}(B^{(p,q,r)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(p,q,r)}) = 0,
\end{aligned}$$

ou en substituant les valeurs et réduisant :

$$-B^{(X)}B''' + B^{(VI)}D''' + B^{(II)}F''' = 0;$$

$$-B^{(X)}B' + B^{(VI)}D' + B^{(II)}F' = 0.$$

On tire de ces deux équations l'équation suivante :

$$-B^{(X)}(B'''F' - B'F''') + B^{(VI)}(D'''F' - D'F''') = 0,$$

ou en substituant les valeurs et réduisant :

$$-B^{(X)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + B^{(VI)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0.$$

Donc $B^{(VI)} = \dfrac{B^{(X)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(II)} = -\dfrac{B^{(X)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(V)} = -\dfrac{B^{(X)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$.

Digitized by Google

§. 32. On tire des trois équations qui suivent :

$$\begin{aligned}
& B^{(III)}\left(A^{(p,q,t)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(p,q,t)}\right) \\
- & B^{(VI)}\left(A^{(q,r,t)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(q,r,t)}\right) \\
+ & B^{(VIII)}\left(A^{(p,q,r)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(p,q,r)}\right) = o, \\
- & B^{(III)}\left(B^{(p,q,t)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(p,q,t)}\right) \\
+ & B^{(VI)}\left(B^{(q,r,t)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(q,r,t)}\right) \\
- & B^{(VIII)}\left(B^{(p,q,r)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(p,q,r)}\right) = o,
\end{aligned}$$

ou en substituant les valeurs et réduisant :

$$- B^{(III)}D''' - B^{(VI)}F''' - B^{(VIII)}B''' = o;$$
$$- B^{(III)}D' - B^{(VI)}F' - B^{(VIII)}B' = o.$$

On tire de ces deux équations l'équation suivante :

$$- B^{(III)}(D'''F' - D'F''') - B^{(VIII)}(B'''F' - B'F''') = o,$$

ou en substituant les valeurs et réduisant :

$$- B^{(III)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - B^{(VIII)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = o.$$

Donc $B^{(III)} = -\dfrac{B^{(VIII)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(VI)} = \dfrac{B^{(VIII)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(VII)} = \dfrac{B^{(VIII)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$.

§. 33. On tire des trois dernières équations :

$$\begin{aligned}
& B^{(IV)}\left(A^{(p,q,r)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(p,q,r)}\right) \\
- & B^{(VIII)}\left(A^{(p,q,t)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(p,q,t)}\right) \\
- & B^{(X)}\left(A^{(q,r,t)}B^{(p,r,t)} - A^{(p,r,t)}B^{(q,r,t)}\right) = o, \\
- & B^{(IV)}\left(B^{(p,q,r)}C^{(p,(r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(p,q,r)}\right) \\
+ & B^{(VIII)}\left(B^{(p,q,t)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(p,q,t)}\right) \\
+ & B^{(X)}\left(B^{(q,r,t)}C^{(p,r,t)} - B^{(p,r,t)}C^{(q,r,t)}\right) = o;
\end{aligned}$$

ou en substituant les valeurs et réduisant :

$$-B^{(IV)}B''' + B^{(VIII)}D''' - B^{(X)}F''' = 0,$$
$$-B^{(IV)}B' + B^{(VIII)}D' - B^{(X)}F' = 0.$$

On tire de ces deux équations l'équation suivante :

$$-B^{(IV)}(B'''F' - B'F''') + B^{(VIII)}(D'''F' - D'F''') = 0,$$

ou en substituant les valeurs et réduisant :

$$-B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + B^{(VIII)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0.$$

Donc $B^{(VIII)} = \dfrac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(X)} = \dfrac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$, $B^{(IX)} = \dfrac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$.

§. 34. On a donc en rassemblant les valeurs dés 4 §. précédens :

$$B^{(I)} = \frac{B^{(IX)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(II)} = -\frac{B^{(X)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(III)} = -\frac{B^{(VIII)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},$$

$$B^{(V)} = -\frac{B^{(IX)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(VI)} = \frac{B^{(X)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(VII)} = \frac{B^{(IX)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},$$

$$B^{(VIII)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(IX)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(X)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}.$$

§. 35. Ces valeurs deviennent en substituant les valeurs de $B^{(VIII)}$, $B^{(IX)}$ et $B^{(X)}$,

$$B^{(I)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2},\quad B^{(II)} = -\frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2},\quad B^{(III)} = -\frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2},$$

$$B^{(V)} = -\frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2},\quad B^{(VI)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2},\quad B^{(VII)} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2},$$

Digitized by Google

$$B^{(VIII)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(IX)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad B^{(X)} = \frac{B^{(IV)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}.$$

Faisons $B^{(IV)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$, nous aurons: $B^{(I)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2$, $B^{(II)} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2$, $B^{(III)} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2$, $B^{(IV)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$, $B^{(V)} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $B^{(VI)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $B^{(VII)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $B^{(VIII)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, $B^{(IX)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, $B^{(X)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$.

§. 36. On a maintenant:

$$-B^{(I)}D^{(p,r,t)} - B^{(V)}D^{(q,r,t)} + B^{(VII)}D^{(p,q,t)} - B^{(IX)}D^{(p,q,r)} =$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)D^{(p,r,t)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)D^{(q,r,t)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)D^{(p,q,t)} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)D^{(p,q,r)}\right);$$
$$-B^{(II)}D^{(q,r,t)} + B^{(V)}D^{(p,r,t)} + B^{(VI)}D^{(p,q,t)} - B^{(X)}D^{(p,q,r)} =$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)D^{(q,r,t)} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)D^{(p,r,t)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)D^{(p,q,t)} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)D^{(p,q,r)}\right);$$
$$-B^{(III)}D^{(p,q,t)} + B^{(VI)}D^{(q,r,t)} - B^{(VII)}D^{(p,r,t)} - B^{(VIII)}D^{(p,q,r)} =$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)D^{(p,q,t)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)D^{(q,r,t)} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)D^{(p,r,t)} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)D^{(p,q,r)}\right);$$
$$-B^{(IV)}D^{(p,q,r)} + B^{(VIII)}D^{(p,q,t)} - B^{(IX)}D^{(p,r,t)} + B^{(X)}D^{(q,r,t)} =$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)D^{(p,q,r)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)D^{(p,q,t)} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)D^{(p,r,t)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)D^{(q,r,t)}\right).$$

Or $-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)D^{(p,r,t)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)D^{(q,r,t)} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)D^{(p,q,t)} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)D^{(p,q,r)}$

$$= f^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right) + d^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right)$$
$$+ b^{(2,3)}\left(-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)\right) + e^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$
$$+ c^{(2,3)}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)\right) + \left(a^{(2,3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right)\right)$$

= (en développant et réduisant)

$$A'f^{(2,3)} - A''f^{(1,3)} + A'''f^{(1,2)} + F'a^{(2,3)} - F''a^{(1,3)} + F'''a^{(1,2)} = N.$$

L'équation principale sera donc:

$$N\left(m\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + n\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + k\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right.$$

$$+\alpha^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2+\alpha^{(2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2+\alpha^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\alpha^{(4)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+\alpha^{(5)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-\alpha^{(6)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\alpha^{(7)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\alpha^{(8)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$-\alpha^{(9)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\alpha^{(10)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0.$$

§. 37. On a maintenant l'équation:

$$n^2\gamma^{(1)}+mn\gamma^{(2)}+nl\gamma^{(3)}+nk\gamma^{(4)}+m^2\gamma^{(5)}+ml\gamma^{(6)}+mk\gamma^{(7)}+l^2\gamma^{(8)}$$
$$+lk\gamma^{(9)}+k^2\gamma^{(10)}-\omega\left(m\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+n\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+l\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+k\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right)=0.$$

On parvient à cette équation d'une manière analogue à celle par laquelle nous sommes parvenus à la précédente; je supprime le calcul parcequ'il est fort long, et ne renferme aucune difficulté; d'ailleurs on démontre immédiatement cette équation en y substituant les valeurs de $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, ... $\gamma^{(10)}$, ω. On voit que ces équations sont entièrement semblables à celles des §. 5 et 6 que nous avons obtenues pour le cas précédent, et l'analogie est telle qu'il est aisé d'en obtenir de semblables pour les cas qui suivent, et cela à l'infini.

§. 38. On opérera maintenant sur ces deux équations comme on a opéré sur les équations des §. 7 et 8, et l'on obtiendra des résultats analogues. Je n'entre pas ici dans ces calculs dont la nature est suffisamment indiquée par ceux du cas précédent, ils allongeraient trop ce Mémoire, et d'ailleurs leur utilité ne parait pas assez grande pour qu'il vaille la peine de s'y livrer. La même

Digitized by Google

méthode peut s'étendre aux cas suivans, mais les calculs deviennent intraitables par leur longueur. Cette longueur, indépendamment des autres obstacles, mettra nécessairement des bornes assès étroites aux progrès de l'Analyse, quelque notation qu'on employe. On a vu dans ce Mémoire que sans la notation que nous avons mise en usage les calculs seraient devenus intolérables. Mais les avantages d'une notation quelconque sont limités, au lieu que la progression des calculs rélativement à leur longueur croit si rapidement qu'elle écrase bientôt les facultés du calculateur le plus intrépide.

§. 39. Si dans le §. 1, au lieu de prendre $\psi = F:(\phi', \phi'')$, on prend seulement $\psi = F:\phi$, on n'aura que les deux équations :

$$(n + \text{etc.}) + \alpha\,(m + \text{etc.}) + \beta\,(l + \text{etc.}) = 0\,;$$
$$(n' + \text{etc.}) + \alpha\,(m' + \text{etc.}) + \beta\,(l' + \text{etc.}) = 0.$$

d'où éliminant α on obtient l'équation :

$$(n + \text{etc.})\,(m' + \text{etc.}) - (n' + \text{etc.})\,(m + \text{etc.})$$
$$+ \beta\,((l + \text{etc.})\,(m' + \text{etc.}) - (l' + \text{etc.})\,(m + \text{etc.})) = 0,$$

la quantité β reste indéterminée. On a donc en développant :

$$A'\,\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)^2\right) + B'\,\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v}\right)\right)$$
$$- \beta C'\,\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v}\right)^2\right) + (\beta A' - C')\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v}\right)\right)$$
$$- \beta B'\,\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial v}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial v}\right)\right) + \left(m'\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) - m\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$$

$$+\left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+n\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)-\beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\beta l\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+\left(n\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-\beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\beta l\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+\left(\left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\beta m\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}\right)+\left(\beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\beta m\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)\right.$$
$$+\left(n\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\beta l\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-\beta m\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right)$$
$$+nm'-n'm+\beta lm'-\beta ml'=0,$$

en faisant $A'=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)$, $B'=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)$, $C'=\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)$.

§. 40. Soyent maintenant $A'=B'=C'=0$;

$$m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+n\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)-\beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\beta l\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)=0;$$
$$m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\beta m\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)=0;$$
$$n\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\beta l\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-\beta m\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)=0;$$
$$nm'-n'm+\beta(lm'-ml')=0;$$

l'équation se réduit à celle-ci:

$$\left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+\left(n\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-\beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\beta l\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+\left(\beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\beta m\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)=0.$$

Or on a $\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)=\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}$, $\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}$. Substituant ces valeurs dans trois des équations de condition, on a:

$$\left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}-\left(n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-n\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)-\beta\left(l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-l\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)=0,$$
$$\left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}+\beta\left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-m\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)=0,$$

Digitized by Google

$$-\left(n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-n\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\right)\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}-\frac{\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}\left(l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-l\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\right)$$

$$+\frac{\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}\left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\right)=0.$$

Donc par la 2^e^ équation $\beta=-\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}$, et par conséquent, en faisant pour abréger $m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)=a'$, $n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-n\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)=b'$, $l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-l\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)=c'$ et substituant la valeur de β:
$a'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-b'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0$, $-b'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+c'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-a'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0$.
Retranchant ces équations l'une de l'autre, on a $2a'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0$. On ne peut pas faire $a'=0$, parceque cela fait disparaitre dans l'équation le terme $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$, donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0$, donc $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)=0$, ce qui fait disparaitre dans l'équation le terme $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$. Donc l'équation $e'\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+e''\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+e'''\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)=0$, n'a pas d'intégrale première de la forme $\psi=F:\Phi$, ce qui est le cas de l'équation de Mr. *de la Grange* rapportée §. 4. Ce théorème est sujet à la même exception dont nous avons parlé §. 4, et nous traiterons plus bas de cette exception (voyez le §. 49).

§. 41. Enfin si dans le §. 1 on se contente de prendre une intégrale particulière $\psi=$ Const. on aura
$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial v+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\partial r=0$.
Comparant cette équation avec celle-ci:

$$P\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + R\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) = 0,$$

on aura $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial v + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z = 0$, ce qui réduit l'équation à : $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\partial r = 0$, ou

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\ + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\ + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right\} = 0.$$

On a donc les équations de condition $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, et l'équation deviendra : $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) = 0$. Mais si l'on multiplie la première équation de condition par $\frac{\partial v}{\partial x}$ et qu'on en retranche la seconde multipliée par $\frac{\partial y}{\partial x}$, on aura $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Cette équation ajoutée à la troisième donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, et parconséquent $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$. L'équation en question devient donc identiquement nulle. Ainsi l'équation de Mr. *de la Grange* rapportée §. 4 n'a point non plus d'intégrale première de la forme $\psi = C$.

---

§. 42. Si dans le cas du §. 4 on a $A' = B' = C' = 0$, les valeurs de η, λ, ν sont $= \frac{0}{0}$. Ce cas a lieu si Φ', Φ'' sont des fonctions de x, y, z, v sans p, q, r; l'équation différentielle devient alors :

$\eta\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \theta\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \kappa\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) + \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \nu\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \omega = 0$, où $\eta = a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, $\theta = b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + a'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\kappa = c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$,

$\lambda = b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\mu = c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\nu = c'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\omega = na^{(1)} + mb^{(1)} + lc^{(1)}$. Ces valeurs rendent l'équation finale du §. 5 identiquement nulle. L'équation finale du §. 6 se réduit à :

$$l^2\nu + m^2\lambda + n^2\eta + lm\mu + ln\kappa + mn\theta = 0.$$

§. 43. Soit, par exemple l'équation que traite Mr. de *Nieuport* T. 2. p. 55 :

$$-xx\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + yy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - 2xy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right) + x^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) - px + qy + rx + \frac{vx+xx}{z}$$
$$+ \frac{pxxy - pvxx - qxyy + qvxy + rxxy - rvxx}{zz} = 0.$$

On a $\eta = -xx$, $\theta = 0$, $\kappa = 0$, $\lambda = yy$, $\mu = -2xy$, $\nu = x^2$, $\omega = -px + qy + rx + \frac{vx+xx}{z} + \frac{pxxy - pvxx + qxyy + qvxy + rxxy - rvxx}{zz}$.

On a donc l'équation, $x^2 l^2 + y^2 m^2 - x^2 n^2 - 2xylm = 0$, ou $x^2 l^2 - 2xylm + y^2 m^2 = x^2 n^2$, $xl - ym = \pm xn$, ou ou $xl - ym \pm xn = 0$, ou en mettant les valeurs de l, m, n, $x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + px\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - qy\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) + rx\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0$, équation linéaire facile à résoudre. Faisons $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) = 0$, puisque z n'entre dans aucun coëfficient, on a :

$$x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = 0.$$

Donc $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{y}{x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$, $\partial\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)(\partial x - \partial v) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\partial y + \frac{y}{x}\partial v\right)$. Faisons $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0$, nous aurons $\partial\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)(\partial x - \partial v)$, ou $\Phi = v - x$. Faisons $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = 0$, nous aurons $\Phi = xy$. Nous pouvons donc faire $\Phi' = xy$, $\Phi'' = v - x$, donc $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = y$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = x$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = -1$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial v}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) = 0$. Donc $n' = y$, $m' = x$, $l' = 0$, $n'' = -1$, $m'' = 0$, $l'' = 1$,

$a^{(1)}=-x$, $b^{(1)}=y$, $c^{(1)}=-x$. Donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=\frac{\eta}{a^{(1)}}=x$; $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=\frac{\lambda}{b^{(1)}}=y$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{\nu}{c^{(1)}}=-x$, donc $\psi=px+qy-rx+V$, V étant une fonction de x, y, v, z qu'on déterminera par l'équation $\omega=na^{(1)}+mb^{(1)}+lc^{(1)}$. On a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=p-r+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=y+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$. Donc:
$n=p-r+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $m=q+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $l=\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)+r\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$.
L'équation à resoudre devient donc, $-px+qy+rx+\frac{vx+xz}{z}+\frac{pxxy-pvxx-qxyy+qvxy+rxxy-rvxx}{zz}=-nx+my+lx$
$=-px+rx+qy-x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)-x\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)+(-px+qy-rx)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$,
ou en effaçant ce qui se détruit:
$\frac{vx+xz}{z}+\frac{pxxy-pvxx-qxyy+qvxy+rx^2y-rvx^2}{zz}=-x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)-x\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)$
$+(-px+qy-rx)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{vx-xy+xz}{z}+\frac{(xy-vx)}{zz}(px-qy+rx)$.
Cette équation donne tout de suite $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)=-\frac{(xy-vx)}{zz}$, donc $V=\frac{xy-vx}{z}$, ce qui donne $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{y-v}{z}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{x}{z}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)=-\frac{x}{z}$, donc $-x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)-x\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)=\frac{xv+xx}{zz}$, ce qui satisfait.
L'intégrale première est donc:

$$px+qy-rx+\frac{xy-vx}{z}=F:(xy,v-x),$$

comme le trouve Mr. de *Nieuport*.

§. 44. Soit l'équation $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)=0$, que traite Mr. de *Nieuport* p. 59. On a $\eta=1$, $\theta=\kappa=0$, $\lambda=-1$, $\mu=-2$, $\nu=-1$, $\omega=0$. L'équation finale du §. 6 devient donc $-l^2-m^2-n^2-2lm=0$, ou $(m+l)^2=n^2$, ou $m+l\pm n=0$. Prenant le signe + et substituant

les valeurs, on a $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)+(q+r+p)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0$, ou en faisant $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=0$, ce qui donne $\Phi'=x-y$, $\Phi''=v-y$. Donc $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=1$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)=-1$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)=-1$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial v}\right)=1$, $n'=1$, $m'=-1$, $l'=0$, $n''=0$, $m''=-1$, $l''=1$, $a^{(1)}=1$, $b^{(1)}=1$, $c^{(1)}=1$. Donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=-1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=-1$, $\psi=p-q-r+V$. Comme $\omega=0$, on trouve $V=0$. L'intégrale est donc $p-q-r=F:(x-y),(v-y)$. Prenant en suite le signe $-$, on a en faisant toujours $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0$, ce qui donne $\Phi'=x+y$, $\Phi''=v-y$, donc $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=1$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)=1$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)=-1$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial v}\right)=1$, $n'=1$, $m'=1$, $l'=0$, $n''=0$, $m''=-1$, $l''=1$, $a^{(1)}=-1$, $b^{(1)}=1$, $c^{(1)}=1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=-1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=-1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=-1$, $\psi=-p-q-r+V$. On trouve aussi $V=0$, à cause de $\omega=0$. Donc l'intégrale est $p+q+r=\Phi\,(x+y,\,v-y)$. Ajoutant ces deux intégrales on a :

$$2p=2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\Phi:(x+y,\,v-y)+F:(x-y,\,v-y),$$

dont l'intégrale est $z=\Phi:(x+y,\,v-y)+F:(x-y,\,v-y)$, comme le trouve Mr. de *Nieuport*.

§. 45. Soit l'équation :

$$xv\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)+2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}\right)+\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right)+\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)\right)$$
$$+2(\omega+x)\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right)+2z=0.$$

On a $\eta=xv$, $\theta=2xv$, $\kappa=2xv$, $\lambda=xv$, $\mu=2xv$, $\nu=xv$,

$\omega = 2(x+v)(p+q+r) + 2z$. L'équation finale du §. 6. devient en divisant par xv, $(l+m+n)^2 = 0$, ou $l+m+n=0$, donc $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + (p+q+r)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0$. Faisant $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0$, on a $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = 0$, d'où l'on tire $\Phi' = x-y$, $\Phi'' = v-y$, $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = -1$, $\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = -1$, $\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v}\right) = 1$. Donc $n' = 1$, $m' = -1$, $l' = 0$, $n'' = 0$, $m'' = -1$, $l'' = 1$, $a^{(1)} = 1$, $b^{(1)} = 1$, $c^{(1)} = 1$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = xv$. Donc $\psi = xv(p+q+r) + V$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = v(p+q+r) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = x(p+q+r) + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$. L'équation ω donnera donc :

$$(p+q+r)\left(x+v+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - z(v+x)\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) - 2z = 0.$$

Egalant à zéro le coëfficient de $p+q+r$, on a $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = v+x$, donc $V = z(v+x)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = z$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = z$, $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = 2z$; ce qui satisfait à l'équation. L'intégrale première est donc $xv(p+q+r) + (v+x)z = F : (x-y, v-y)$, comme le trouve Mr de *Nieuport*.

§. 46. Soit l'équation $gh\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + gh\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) = 0$, que trouve Mr. *de la Grange* (Mécan. pag. 503.) on a $\eta = gh$, $\theta = \varkappa = 0$, $\lambda = gh$, $\mu = 0$, $\nu = -1$, $\omega = 0$. L'équation finale du §. 6 devient donc $-l^2 + ghm^2 + ghn^2 = 0$, donc $gh(m^2+n^2) = l^2$, donc $l = \pm\sqrt{gh}\sqrt{m^2+n^2}$, ou en mettant les valeurs :

$$gh\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 + 2p\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) + p^2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + 2q\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) + q^2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)^2\right)$$
$$= \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right)^2 + 2r\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) + r^2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)^2.$$

Digitized by Google

Puisque Φ' ne contient ni p, ni q, ni r, je fais $(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}) = 0$, ce qui réduit l'équation à $gh\,((\frac{\partial \Phi'}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})^2 - (\frac{\partial \Phi'}{\partial v})^2) = 0$. Si l'on fait $\Phi' = \alpha x + \beta y + \gamma v$, on a $(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) = \alpha$, $(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) = \beta$, $(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}) = \gamma$, donc $\gamma^2 = gh\,(\alpha^2 + \beta^2)$, $\gamma = \pm \sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. $\Phi'' = \alpha x + \beta y - v\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, donc $(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) = \alpha$, $(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) = \beta$, $(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}) = \sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) = \alpha$, $(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) = \beta$, $(\frac{\partial \Phi''}{\partial v}) = -\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $n' = \alpha$, $m' = \beta$, $l' = \sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $n'' = \alpha$, $m'' = \beta$, $l'' = -\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Donc $a^{(1)} = 2\beta\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $b^{(1)} = -2\alpha\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $c^{(1)} = 0$. Mais $\nu = c^{(1)}(\frac{\partial \psi}{\partial r})$, donc dans cette supposition on aurait $\nu = 0$, ce qui ne se peut puisque $\nu = -1$. Donc ces valeurs de Φ' et Φ'' ne peuvent convenir. Je fais donc $\Phi' = \alpha x + \beta y + v\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\Phi'' = \alpha x - \alpha v\sqrt{gh}$, ce qui donne $n' = \alpha$, $m' = \beta$, $l' = \sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $n'' = \alpha$, $m'' = 0$, $l'' = -\alpha\sqrt{gh}$. Donc $a^{(1)} = \alpha\beta\sqrt{gh}$, $b^{(1)} = -\alpha^2\sqrt{gh} - \alpha\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $c^{(1)} = \alpha\beta$. Donc $(\frac{\partial \psi}{\partial p}) = \frac{\sqrt{gh}}{\alpha\beta}$, $(\frac{\partial \psi}{\partial q}) = -\frac{\sqrt{gh}}{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $(\frac{\partial \psi}{\partial r}) = -\frac{1}{\alpha\beta}$. Donc $\psi = \frac{\sqrt{gh}}{\alpha\beta}p - \frac{\sqrt{gh}}{\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}q - \frac{r}{\alpha\beta} + V$. En faisant $V = 0$, on satisfait à l'équation $n\,a^{(1)} + m\,b^{(1)} + l\,c^{(1)} = 0$, parcequ'alors $n = m = l = 0$. L'intégrale sera donc $\frac{\sqrt{gh}}{\alpha\beta}p - \frac{q\sqrt{gh}}{\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{r}{\alpha\beta} = F : (\alpha x + \beta y + v\sqrt{gh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$. $(\alpha x \pm \alpha v\sqrt{gh})$. Mais cette valeur ne satisfait pas, par-

cequ'elle ne s'accorde pas avec les équations $\theta = 0$, $\varkappa = 0$, $\mu = 0$, ou $b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, $c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$, $c^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + b^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$. Ces équations donnent :

$$c^{(1)} = -a^{(1)}\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}, \quad b^{(1)} = -a^{(1)}\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)},$$

ce qui étant substitué dans la 3ᵉ équation donne :

$$-\frac{a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - a^{(1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)} = 0, \text{ ou } -2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0.$$

Il faut donc qu'on ait $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, ou $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$, ou $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$, ce qui donne $\lambda = 0$, ou $\nu = 0$, ou $\eta = 0$, ce qui est contradictoire avec la supposition. Il ne parait donc pas que cette équation ait d'intégrale première de la forme $\psi = F : (\Phi', \Phi'')$.

§. 47. Mr. de *Nieuport* dit p. 51 que ψ ne peut contenir les quantités p, q, r que sous une forme linéaire. Mais il suit de nos formules que lorsque Φ' et Φ'' ne contiennent ni p, ni q, ni r, l'équation aura la forme que suppose Mr. de *Nieuport*, quelque soit ψ. Je n'en donnerai qu'un exemple fort simple; soit l'équation :

$$2p\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (2p+1)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + (2p+1)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}\right) + \left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right) + \left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) = 0,$$

on aura $\eta = 2p$, $\theta = \varkappa = 2p+1$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 1$, $\omega = 0$. L'équation finale du §. 6 donnera :

$$l^2 + m^2 + 2pn^2 + 2lm + (2p+1)ln + (2p+1)mn = 0,$$

Digitized by Google

ou $(2pn+l+m)(l+m+n)=0$, ou $l+m+n=0$. Je fais $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)=0$, et j'ai $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)=0$, ce qui donne $\Phi'=x-y$, $\Phi''=v-y$, donc $n'=1$, $m'=-1$, $l'=0$, $n''=0$, $m''=-1$, $l''=1$, $n=m=l=0$. Donc $a^{(1)}=b^{(1)}=c^{(1)}=1$, donc $\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)=2p$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)=1$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)=1$, $\psi=p^2+q+r$, et l'intégrale est $p^2+q+r=F:(x-y,v-y)$.

§. 48. Si dans l'équation générale du §. 15, on suppose que Φ', Φ'', Φ''' ne contiennent ni p, ni q, ni r, ni t, l'équation se réduira à l'équation finale du §. 27, alors l'équation du §. 37 deviendra rélativement aux quantités Φ:

$$n^2\gamma^{(1)}+mn\gamma^{(2)}+nl\gamma^{(3)}+nk\gamma^{(4)}+m^2\gamma^{(5)}+ml\gamma^{(6)} +mk\gamma^{(7)}+l^2\gamma^{(8)}+lk\gamma^{(9)}+k^2\gamma^{(10)}=0,$$

sur laquelle on opérera comme dans le cas précédent, puis les équations déduites des valeurs de $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ . . . $\gamma^{(10)}$, ω donneront ψ. Soit l'équation:

$$\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)\right)gh-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right)+g\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0,$$

qui est l'équation de Mr. de la *Grange* citée §. 24, on aura $\gamma^{(1)}=\gamma^{(5)}=\gamma^{(8)}=gh$, $\gamma^{(10)}=-1$, $\omega=gr$, $\gamma^{(2)}=\gamma^{(3)}=\gamma^{(4)}=\gamma^{(6)}=\gamma^{(7)}=\gamma^{(9)}=0$. Faisons

$$(A)=k'''A^{(1,2)}-k''A^{(1,3)}-k'A^{(2,3)};$$
$$(B)=k'''B^{(1,2)}-k''B^{(1,3)}-k'B^{(2,3)};$$
$$(C)=k'''C^{(1,2)}-k''C^{(1,3)}-k'C^{(2,3)};$$
$$(N)=n'''A^{(1,2)}+m'''B^{(1,2)}+l'''C^{(1,2)},$$

on aura $\gamma^{(1)} = (A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, $\gamma^{(5)} = (B)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\gamma^{(8)} = (C)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$; $\gamma^{(10)} = -N\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$; $(A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + (B)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = \gamma^{(2)} = 0$; $(C)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + (A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \gamma^{(3)} = 0$; $-(N)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + A\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \gamma^{(4)} = 0$; $(B)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + C\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = \gamma^{(6)} = 0$; $-(N)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + (B)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \gamma^{(7)} = 0$, $-(N)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + C\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \gamma^{(9)} = 0$. On a donc :

$$(B) = -\frac{(A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)},\quad (C) = -\frac{(A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)},\quad (N) = \frac{(A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}.$$

Ces valeurs substituées dans les trois dernières de ces équations donnent $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$. Il faudra donc que quelques-unes des quantités $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ soyent nulles, ce qui rendra nuls quelques-uns des coëfficiens $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(5)}$, $\gamma^{(8)}$, $\gamma^{(10)}$, ce qui est contre la supposition. Donc cette équation n'a point d'intégrale première de la forme $\psi = F : (\Phi', \Phi'', \Phi''')$.

§. 49. Si dans l'équation du §. 39 Φ ne contient ni p, ni q, ni r, on aura $A' = B' = C' = 0$, et l'équation différentielle deviendra : $m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$

$$+ \left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + \left(-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \left(m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial v}\right) + \beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)$$
$$+ \left(-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - \beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial v}\right) + nm' - n'm + \beta lm' - \beta nl' = 0.$$

Soyent $m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$, $m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0$, $-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \beta m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - \beta l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$, $nm' - n'm + \beta lm' - \beta nl' = 0$, l'équation se réduit :

$$\alpha' m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (-n' + \beta l')\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + m'\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right) = 0.$$

Digitized by Google

On a $\beta = -\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)} = 0$, ce qui donne $m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$, $-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + l'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$. Donc $2m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$. Mais on ne peut avoir $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, parcequ'alors le coëfficient de $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$ disparait, donc $m' = 0$, ce qui fait disparaître le coëfficient de $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$ et de $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)$. Donc, même dans ce cas, l'équation $e'\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + e''\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + e'''\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)$ ne peut avoir d'intégrale première de la forme $\psi = F : \Phi$.

§. 50. Nous avons vu §. 48 que l'équation de Mr. de la *Grange* citée §. 24, n'a point d'intégrale première de la forme $\psi = F : (\Phi', \Phi'', \Phi''')$. Voyons si elle peut en avoir une de la forme $\psi = F : (\Phi', \Phi'')$. Comme on suppose que Φ', Φ'' ne contiennent point p, q, r, t on aura §. 15, $N' = n'$, $M' = m'$, $L' = l'$, $K' = k'$, $N'' = n''$, $M'' = m''$, $L'' = l''$, $K'' = k''$. On aura donc seulement les trois équations :

$N + \text{etc.} + \alpha(M + \text{etc.}) + \beta(L + \text{etc.}) + \gamma(K + \text{etc.}) = 0$,

$n' + \alpha m' + \beta l' + \gamma k' = 0$, $n'' + \alpha m'' + \beta l'' + \gamma k'' = 0$.

Eliminant α et β, on aura :

$-(N + \text{etc.})(a) + M(b) - \gamma M(c) - L(d) + \gamma L(e) - \gamma K(a) = 0$,

en faisant pour abréger : $(a) = m'l'' - m''l'$, $(b) = n'l'' - n''l'$, $(c) = k'l'' - k''l'$, $(d) = n'm'' - n''m'$, $(e) = m'k'' - m''k'$.

L'équation réduite à la forme du §. 24, sera :

$-(a)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+((b)-\gamma(c))\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+(-(d)+\gamma(e))\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)$
$\gamma(a)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right)-n(a)+m(-(b)+\gamma(c))+l(-(d)+\gamma(e))+\gamma k(a)=0,$
et l'on aura les six équations de condition suivantes:

$$\text{I.}\quad -(a)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)+(b)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)-(c)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0;$$
$$\text{II.}\quad -(a)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(d)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\gamma(e)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0;$$
$$\text{III.}\quad -(a)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\gamma(a)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0;$$
$$\text{IV.}\quad (b)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\gamma(c)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(d)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\gamma(e)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0;$$
$$\text{V.}\quad (b)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\gamma(c)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\gamma(a)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0;$$
$$\text{VI.}\quad -(d)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\gamma(e)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\gamma(a)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0.$$

L'équation III. donne $\gamma=\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}$, puisque (a) ne peut être nul. Cette valeur substituée dans l'équation II. donne:

$$-(a)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(d)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)+(e)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$

Substituée dans l'équation VI. elle donne en divisant par $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, et multipliant par $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, $(a)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-d\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+(e)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$ Ces deux valeurs retranchées l'une de l'autre donnent $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0$, ce qui est impossible puisque cela ferait évanouir le coëfficient de $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial v^2}\right)$. Donc l'équation proposée n'a point d'intégrale première de la forme $\psi=F:(\Phi',\Phi'')$.

§. 51. Voyons si elle peut avoir une intégrale première de la forme $\psi=F:\Phi'$. On n'a plus alors que les deux équations:

$(N+\text{etc.})+\alpha(M+\text{etc.})+\beta(L+\text{etc.})+\gamma(K+\text{etc.})=0,$

Digitized by Google

$n' + am' + \beta l' + \gamma k' = 0$. Eliminant β, on aura l'équation: $(N + \text{etc.}) l' + (M + \text{etc.}) a l' - (n' + am' + \gamma k') (L + \text{etc.}) + \gamma l' (k + \text{etc.}) = 0$. L'équation réduite à la forme du §. 24 sera donc:

$$l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + al' \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) \left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) - (n' + am' + \gamma k') \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial \partial z}{\partial v^2}\right) + \gamma l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \partial z}{\partial u^2}\right)$$
$$+ nl' + mal' - (n' + am' + \gamma k') l + \gamma l' k = 0,$$

et l'on aura les six équation de condition:

I. $l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) + al' \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) = 0$;

II. $l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - (n' + am' + \gamma k') \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) = 0$;

III. $l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \gamma l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) = 0$;

IV. $al' \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - (n' + am' + \gamma k') \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = 0$;

V. $al' \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \gamma l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = 0$;

VI. $- (n' + am' + \gamma k') \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \gamma l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0$.

L'équation I. donne $\alpha = -\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)}$, l'équation III. donne $\gamma = -\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)}$.

Substituant ces valeurs dans l'équation V, on a:

$$- l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - l' \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0.$$

Donc $\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = 0$, ou $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0$; ces deux conditions sont impossibles, parceque chacune d'elles fait évanouir un des termes de l'équation proposée. Donc l'équation proposée ne peut avoir d'intégrale première de la forme $\psi = F : \Phi$. On prouvera précisement de la même manière que pour les équations à quatre variables §. 49, que l'équation ne peut pas avoir d'intégrale première de cette forme $\psi = \text{Const.}$

§. 52. J'ai traité dans les nouveaux Mémoires de St. Pétersbourg T. X. pag. 65 l'équation:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - c\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - \frac{2c}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{2cz}{x^2} = 0,$$

qui revient à celle que traite Mr. de *Nieuport* pag. 163. Je trouve dans l'endroit cité $\frac{\partial \Pi}{\Pi} = -\frac{\partial x}{x}$, si en intégrant j'ajoute la constante arbitraire h, je trouverai $\Pi = \frac{1}{bx}$ au lieu de $\frac{1}{x}$. Si en intégrant la valeur de Π' j'ajoute la constante e, je trouverai $\Pi' = \frac{e}{bx} - \frac{1}{bx^2}$ au lieu de $\Pi' = -\frac{1}{bx^2}$. Calculant ensuite la valeur de Π'', parceque la valeur de Π' ne satisfait pas à l'équation de condition, je trouve $\Pi'' = -\frac{e}{bx^2}$ qui satisfait à l'équation de condition, ce qui donne pour intégrale:

$$\begin{aligned} z = &-\frac{e}{bx^2}\,(F:(x+y\sqrt{c}) + f:(x-y\sqrt{c})) \\ &+ \left(\frac{e}{bx} - \frac{1}{bx^2}\right)(F':(x+y\sqrt{c}) + f':(x-y\sqrt{c})) \\ &+ \frac{1}{bx}\,(F'':(x+y\sqrt{c}) + f'':(x-y\sqrt{c})). \end{aligned}$$

Cette équation coincide avec ce que Mr. de *Nieuport* appelle une seconde intégrale; l'on voit par notre procédé que ce n'est qu'une autre forme de la première intégrale, ce que Mr. de *Nieuport* prouve au long plus bas. Si l'on ajoutait une constante dans l'intégration de Π'', on aurait $\Pi'' = \frac{b}{bx} - \frac{a}{bx^2}$ et l'on tirerait de là $\Pi''' = -\frac{b}{bx^2}$. L'intégrale serait alors:

Digitized by Google

$$z = -\frac{b}{hx^2}\left(F:(x+y\sqrt{c}) + f:(x-y\sqrt{c})\right)$$
$$+\left(\frac{b}{hx} - \frac{c}{hx^2}\right)\left(F':(x+y\sqrt{c}) + f':(x-y\sqrt{c})\right)$$
$$+\left(\frac{e}{hx} - \frac{1}{hx^2}\right)\left(F'':(x+y\sqrt{c}) + f'':(x-y\sqrt{c})\right)$$
$$+\frac{1}{hx}\left(F''':(x+y\sqrt{c}) + f''':(x-y\sqrt{c})\right),$$

et l'on pourra continuer ce procedé aussi loin que l'on voudra.

§. 53. En général, on aura (voyez les Mémoires de St. Pétersbourg pag. 87.):

$$A^{(1)} = \int\left(\frac{S}{D} + \frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + \text{etc.}\right), \quad A^{(2)} = \int\left(\frac{S}{D}\frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi}\text{ etc.}\right),$$
$$A^{(3)} = \int\left(\frac{S}{D}\frac{\Pi''}{\Pi} + \frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi}\text{ etc.}\right)\text{ etc.},$$

on a par la méthode que nous avons suivie, (en s'arrêtant aux $A^{(3)}$):

$$z = \Pi A^{(3)} F:\Phi + \Pi A^{(2)} F':\Phi + \Pi A^{(1)} F'':\Phi + \Pi F''':\Phi.$$

Que si l'on ajoute à chaque intégration de Π', Π'', Π''' une constante h', h'', h''', on aura:

$$z = \Pi\left(A^{(3)} + h'A^{(2)} + h''A^{(1)} + h'''\right) F:\Phi$$
$$+ \Pi\left(A^{(2)} + h'A^{(1)} + h''\right) F':\Phi + \Pi\left(A^{(1)} + h'\right) F'':\Phi + \Pi F''':\Phi,$$

et l'on peut continuer ce procedé aussi loin que l'on voudra.

§. 54. Soit l'équation $y\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - 2y\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - 2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ que traite Mr. de *Nieuport* p. 76. On a (en conservant toujours les dénominations du Mémoire cité) $\frac{C}{D} = -2$, $\frac{B}{D} = -\frac{2}{y}$ et toutes les autres quantités nulles; on a donc

$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \pm \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\sqrt{2} = 0$, ce qui donne $\Phi = y\sqrt{2} \pm x$. Donc $\Phi' = y\sqrt{2} + x$, $\Phi'' = y\sqrt{2} - x$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = \sqrt{2}$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = -1$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = \sqrt{2}$, $\beta = -8$, $A' = -\frac{2\sqrt{2}}{y}$, $A'' = -\frac{2\sqrt{2}}{y}$, $\partial\Phi' + \partial\Phi'' = 2\partial y\sqrt{2}$, $\frac{\partial\Pi}{\Pi} = \frac{\partial y}{y}$, $l\Pi = ly$, $\Pi = y$, $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 1$, $\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = \frac{1}{y}$, $\Pi' = \Pi\int -\frac{2}{yy} \cdot \frac{2\partial y\sqrt{2}}{-8} = \Pi\int \frac{\partial y}{y^2\sqrt{2}} = \Pi\left(-\frac{1}{y\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui satisfait à l'équation de condition. Donc:

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}(F:(y\sqrt{2}+x)+f:(y\sqrt{2}-x))+y(F':(y\sqrt{2}+x)+f':(y\sqrt{2}-x)),$$

ce qui revient à l'intégrale que trouve Mr. de *Nieuport* p. 178. Ainsi les inconveniens des méthodes ingénieuses de cet habile Géomètre n'ont pas lieu dans celle-ci.

§. 55. L'intégrale première de l'équation du §. 45 peut se mettre sous cette forme:

$$xv\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right) + (v+x)z = F:(x-y), (v-y).$$

Il est aisé d'en tirer l'intégrale finie, car l'intégrale première étant mise sous la forme:

$$\left(\frac{\partial . xvz}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial . xvz}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial . xvz}{\partial v}\right) = F:(x-y), (v-y),$$

il suffit de faire $xvz = MF:(x-y), (v-y)$, M étant une fonction indéterminée de x, y et v, on aura en différentiant et prenant d'abord $F:(x-y)$,

$$vx\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + vz = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)F:(x-y) + MF':(x-y),$$

$$vx\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)F:(x-y) - MF':(x-y),$$

$$vx\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) + xz = \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)F:(x-y).$$

Digitized by Google

On a donc en ajoutant ces trois équations :
$xv\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right)+(x+v)z=\left(\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)\right)F:(x-y)$.
Comparant cette équation avec celle qu'il s'agit d'intégrer, on a $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)=1$. On a de même en différentiant et prenant $F:(v-y)$.

$$xv\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+vz=\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)F:(v-y),$$
$$xv\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)F:(v-y)-MF':(v-y),$$
$$xv\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)+xz=\left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)F:(v-y)+MF':(v-y),$$

ce qui donne :
$xv\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right)+v(x+z)=\left(\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)\right)F:(v-y)$;
$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)=1$. Faisant donc par exemple $M=y$ on a $xvz=yF:(x-y)(v-y)$, ou, en général, faisant $M=\alpha x+\beta y+\gamma v$, $xvz=(\alpha x+\beta y+\gamma v)F:(x-y),(v-y)$, pourvu qu'on ait l'équation $\alpha+\beta+\gamma=1$, ce qui donne $\gamma=1-(\alpha+\beta)$ et l'intégrale devient :

$$xvz=(\alpha x+\beta y+(1-\alpha-\beta)v)F:(x-y),(v-y)$$
ou $$xvz=(\alpha(x-v)+\beta(y-v)+v)F:(x-y),(v-y).$$

Or $x-v=x-y-(v-y)$ et par conséquent est une fonction de $(x-y),(v-y)$. On peut donc mettre l'intégrale finie sous cette forme :
$xvz=(\beta(y-v)+v)F:(x-y),(v-y)+f:(x-y),(v-y)$, la différentiation fait voir qu'on a alors $\beta=1$, ce qui donne : $xvz=yF:(x-y),(v-y)+f:(x-y)(v-y)$, comme le trouve Mr. de *Nieuport*. Ce grand Géomètre

y est parvenu en cherchant une autre intégrale première de l'équation différentielle du second degré, intégrale qui a cette forme :

$$\left(\left(\frac{\partial . xvz}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial . xvz}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial . xvz}{\partial v}\right)\right) y - xvz = f : (x - y), (v - y).$$

Retranchant cette équation de la précédente multipliée par y, on a l'intégrale finie que nous venons de trouver. Mais cette seconde équation différentielle du premier degré, ne résulte pas précisement de la différentiation de l'intégrale finie : pour l'obtenir, il faut après la différentiation retrancher de la différentielle l'intégrale particulière finie $xvz = f : (x - y), (v - y)$, ainsi cette intégrale première contient déja en quelque sorte l'intégrale finie, et le procedé nécessaire pour la trouver parait moins simple que celui que nous avons suivi.

Digitized by Google

DEMONSTRATIO
THEOREMATUM QUORUNDAM CALCULUM INTEGRALEM SPECTANTIUM.

AUCTORE

N. FUSS.

Conventui exhib. die 13 Augusti 1806.

§. 1. Neminem Geometrarum latet, quanta et quam egregia inventa olim ex arcuum atque sinuum evolutione in producta infinita sint derivata. Summus quondam *Eulerus* praesertim investigationem formularum integralium intra determinatos terminos integrationis contentarum per hujusmodi producta infinita docuit, quae autem plerumque ad numeros integros restringuntur, ita ut, si quis formulas integrales ad exponentes fractos extendere voluerit, ei ad methodum interpolationum sit confugiendum (Conf. *Euleri* Opusc. anal. Tom. II. pag. 53).

§. 2. Nuper autem mihi contigit fontem detegere admodum foecundum, ex quo plurima hujusmodi producta fluunt per formulas integrales expressa, quae nullo modo ad exponentes integros restringuntur. Principium, cujus beneficio hoc fieri licuit, fortasse cum successu et in aliis

hujusmodi investigationibus usum praestare poterit. Principium in hoc consistit, quod, si habeatur expressio quaedam pro certis valoribus variabilis evanescens, si ejus differentiale sumatur et singulis terminis postmodum signum summatorium praefigatur, termini integralis hoc modo oriundi, quisque suo signo collecti, nihilo sint aequandi. Verbi gratia, si proposita fuerit haec expressio:

$$V = \sin.\Phi\,(\cos.\Phi - \sin.\Phi),$$

quae evanescit tam casu $\Phi = 0$ quam casu $\Phi = 180^\circ = \pi$, sumatur ejus differentiale, quod est:

$$\partial V = \partial\Phi \cos. 2\Phi - \partial\Phi \sin. 2\Phi,$$

unde concluditur fore $\int\partial\Phi \cos. 2\Phi - \int\partial\Phi \sin. 2\Phi = 0$, si integralia haec a $\Phi = 0$ ad $\Phi = \pi$ extendantur. Hujus principii applicationem ad aliquot casus notabiliores in sequentibus theorematibus ob oculos ponere et illustrare constitui.

Theorema I.

§. 3. *Quicunque numeri pro litteris* m, n *et* α *accipiantur, haec fractio:* $\frac{\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n-2}}{\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{m-2}}$ *per sequens productum infinitum exprimitur:*

$$\frac{m(m-1)(\alpha\alpha+nn)}{n(n-1)(\alpha\alpha+mm)} \cdot \frac{(m+2)(m+1)(\alpha\alpha+(n+2)^2)}{(n+2)(n+1)(\alpha\alpha+(m+2)^2)} \cdot \frac{(m+4)(m+3)(\alpha\alpha+(n+4)^2)}{(n+4)(n+3)(\alpha\alpha+(m+4)^2)} \cdot \text{etc.}$$

Demonstratio.

Consideretur haec expressio:

Digitized by Google

$$V = e^{\alpha\Phi}(\alpha \sin.\Phi^n - n \sin.\Phi^{n-1} \cos.\Phi),$$

quae manifesto evanescit tam posito $\Phi = 0$ quam posito $\Phi = \pi$. Differentietur haec expressio, fietque:

$$\partial V = e^{\alpha\Phi}\partial\Phi\,[(\alpha\alpha + nn)\sin.\Phi^n - n(n-1)\sin.\Phi^{n-2}],$$

unde sequitur fore:

$$(\alpha\alpha + nn)\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^n - n(n-1)\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n-2} = 0,$$

integralibus scilicet a $\Phi = 0$ usque ad $\Phi = \pi$ extensis, hoc est:

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n-2} = \frac{\alpha\alpha+nn}{n(n-1)}\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^n \left[{a\ \Phi=0 \atop ad\ \Phi=\pi}\right].$$

Hoc modo ad altiores potestates progrediendo pro iisdem terminis integrationis erit:

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^n = \frac{\alpha\alpha+(n+2)^2}{(n+2)(n+1)}\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n+2},$$

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n+2} = \frac{\alpha\alpha+(n+4)^2}{(n+4)(n+3)}\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n+4},$$

et ita porro, ita ut per productum infinitum habeamus:

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n-2} = \frac{\alpha\alpha+nn}{n(n-1)}\cdot\frac{\alpha\alpha+(n+2)^2}{(n+2)(n+1)}\cdot\frac{\alpha\alpha+(n+4)^2}{(n+4)(n+3)}\cdot \ldots\ldots\ldots \frac{\alpha\alpha+(n+\infty)^2}{(n+\infty)(n+\infty-1)}\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n+\infty}.$$

Simili porro modo intelligitur fore:

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{m-2} = \frac{\alpha\alpha+mm}{m(m-1)}\cdot\frac{\alpha\alpha+(m+2)^2}{(m+2)(m+1)}\cdot\frac{\alpha\alpha+(m+4)^2}{(m+4)(m+3)}\cdot \ldots\ldots\ldots \frac{\alpha\alpha+(m+\infty)^2}{(m+\infty)(m+\infty-1)}\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{m+\infty}.$$

Quodsi nunc harum summationum prior per posteriorem dividatur, integralia postrema se mutuo destruent, eritque:

$$\frac{\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{n-2}}{\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^{m-2}} =$$

$$= \frac{m(m-1)(\alpha\alpha+nn)}{n(n-1)(\alpha\alpha+mm)}\cdot\frac{(m+2)(m+1)(\alpha\alpha+(n+2)^2)}{(n+2)(n+1)(\alpha\alpha+(m+2)^2)}\cdot\frac{(m+4)(m+3)(\alpha\alpha+(n+4)^2)}{(n+4)(n+3)(\alpha\alpha+(m+4)^2)}\ \text{etc.},$$

quod verum est, quicunque numeri pro α, m et n accipiantur, fractis non exceptis.

Corollarium 1.

§. 4. Statuatur $m = 2$ et $n = 3$, fietque:

$$\frac{\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi}{\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha\alpha+9}{\alpha\alpha+4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\alpha\alpha+25}{\alpha\alpha+16} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{\alpha\alpha+49}{\alpha\alpha+36} \cdot \text{ etc.}$$

Cum igitur sit, uti constat:

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi \left[\begin{smallmatrix} a\ \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{e^{\alpha\pi}+1}{\alpha\alpha+1},$$

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \quad \left[\begin{smallmatrix} a\ \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{e^{\alpha\pi}-1}{\alpha},$$

habebimus:

$$\frac{\alpha}{\alpha\alpha+1} \cdot \frac{e^{\alpha\pi}+1}{e^{\alpha\pi}-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha\alpha+9}{\alpha\alpha+4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\alpha\alpha+25}{\alpha\alpha+16} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{\alpha\alpha+49}{\alpha\alpha+36} \cdot \text{ etc.}$$

quod etiam ita repraesentari potest:

$$\frac{e^{\alpha\pi}+1}{e^{\alpha\pi}-1} = \frac{\alpha\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha\alpha+9}{\alpha\alpha+4} \cdot \frac{\alpha\alpha+25}{\alpha\alpha+16} \cdot \frac{\alpha\alpha+36}{\alpha\alpha+36} \cdot \text{ etc.}$$

quae expressio jam olim ab *Eulero* est inventa, atque vera est quicunque valores litterae α tribuantur.

Corollarium 2.

§. 5. Quodsi autem hic ponere velimus $\alpha = 0$, primus factor $\frac{\alpha\alpha+1}{\alpha}$ foret infinite magnus, id ipsum eveniret in sinistra parte, unde nihil concludere liceret; quamobrem statuendum est α infinite-parvum, quo facto fit $e^{\alpha\pi}+1 = 2$ et $e^{\alpha\pi}-1 = \alpha\pi$, unde prodit:

$$\frac{2}{\alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{3\cdot3}{2\cdot2} \cdot \frac{5\cdot5}{4\cdot4} \cdot \frac{7\cdot7}{6\cdot6} \cdot \frac{9\cdot9}{8\cdot8} \cdot \text{ etc.}$$

factaque multiplicatione per α et invertendo prodibit no-

Digitized by Google

tissimum productum infinitum a Wallisio inventum:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \text{etc.}$$

Corollarium 3.

§. 6. Quoniam ipsi α etiam valores imaginarios tribuere licet, statuatur $\alpha = \beta \surd -1$, eritque ex corollario primo:

$$\frac{e^{\beta\pi\surd -1}+1}{e^{\beta\pi\surd -1}-1} = \frac{1-\beta\beta}{\beta\surd -1} \cdot \frac{9-\beta\beta}{4-\beta\beta} \cdot \frac{25-\beta\beta}{16-\beta\beta} \cdot \frac{49-\beta\beta}{36-\beta\beta} \text{ etc.}$$

ubi pars sinistra sequenti modo ad realitatem, immo ad formulam simplicissimam reducitur. Cum sit:

$$e^{\beta\pi\surd -1} = \cos.\beta\pi + \surd -1 \sin.\beta\pi,$$

illa fractio hanc induit formam:

$$\frac{e^{\beta\pi\surd -1}+1}{e^{\beta\pi\surd -1}-1} = \frac{\cos.\beta\pi + \surd -1 \sin.\beta\pi + 1}{\cos.\beta\pi + \surd -1 \sin.\beta\pi - 1},$$

cujus si tam numerator quam denominator multiplicetur per $\cos.\beta\pi + \surd -1 \sin.\beta\pi + 1$, erit:

$$\frac{e^{\beta\pi\surd -1}+1}{e^{\beta\pi\surd -1}-1} = \frac{(\cos.\beta\pi + 1)(\cos.\beta\pi + \surd -1 \sin.\beta\pi)}{\sin.\beta\pi(\surd -1 \cos.\beta\pi - \sin.\beta\pi)}.$$

Cum igitur supra invenerimus:

$$\frac{(e^{\beta\pi\surd -1}+1)\surd -1}{e^{\beta\pi\surd -1}-1} = \frac{1-\beta\beta}{\beta} \cdot \frac{9-\beta\beta}{4-\beta\beta} \cdot \frac{25-\beta\beta}{16-\beta\beta} \cdot \text{etc.}$$

nunc vero sit:

$$\frac{(e^{\beta\pi\surd -1}+1)\surd -1}{e^{\beta\pi\surd -1}-1} = \frac{\cos.\beta\pi + 1}{\sin.\beta\pi} = \cot.\frac{\beta\pi}{2},$$

habebimus:

$$\cot.\frac{\beta\pi}{2} = \frac{1-\beta\beta}{\beta} \cdot \frac{9-\beta\beta}{4-\beta\beta} \cdot \frac{25-\beta\beta}{16-\beta\beta} \cdot \frac{49-\beta\beta}{36-\beta\beta} \cdot \text{etc.}$$

quod etiam sub hac forma magis cognita referri potest:

$$\cot.\frac{\beta\pi}{2} = \frac{1-\beta}{\beta} \cdot \frac{1+\beta}{2-\beta} \cdot \frac{3-\beta}{2+\beta} \cdot \frac{3+\beta}{4-\beta} \cdot \frac{5-\beta}{4+\beta} \cdot \text{etc.}$$

Corollarium 4.

§. 7. Statuatur nunc $m=2$ et $n=4$, et cum sit pro hoc casu:

$$\int e^{\alpha\Phi}\partial\Phi \sin.\Phi^2 \left[\begin{smallmatrix}a\,\Phi=0\\ ad\,\Phi=\pi\end{smallmatrix}\right] = \frac{1\cdot 2}{\alpha(\alpha\alpha+4)}(e^{\alpha\pi}-1)$$

$$\int e^{\alpha\pi}\partial\Phi \qquad \left[\begin{smallmatrix}a\,\Phi=0\\ ad\,\Phi=\pi\end{smallmatrix}\right] = \frac{e^{\alpha\pi}-1}{\alpha},$$

habebimus hoc productum:

$$\frac{1\cdot 2}{\alpha\alpha+4} = \frac{2\cdot 1(\alpha\alpha+16)}{4\cdot 3(\alpha\alpha+4)}\cdot\frac{4\cdot 3(\alpha\alpha+36)}{6\cdot 5(\alpha\alpha+16)}\cdot\frac{6\cdot 5(\alpha\alpha+64)}{8\cdot 7(\alpha\alpha+36)}\cdot \text{etc.}$$

quae aequatio cum manifesto sit identica, ea veritatem expressionis generalis in theoremate exhibitae denuo comprobat.

Theorema II.

§. 8. *Quicunque numeri pro* m, n *et* α *accipiantur, semper fractio* $\frac{\int\partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n-2}}{\int\partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{m-2}}$ *per sequens productum infinitum exprimitur:*

$$\frac{m(m-1)(nn-\alpha\alpha)}{n(n-1)(mm-\alpha\alpha)}\cdot\frac{(m+2)(m+1)((n+2)^2-\alpha\alpha)}{(n+2)(n+1)((m+2)^2-\alpha\alpha)}\cdot\frac{(m+4)(m+3)((n+4)^2-\alpha\alpha)}{(n+4)(n+3)((m+4)^2-\alpha\alpha)}\cdot \text{etc.}$$

Demonstratio.

Consideretur haec expressio:

$$V = \alpha \cos.\alpha\Phi \sin.\Phi^n - n \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n-1}\cos.\Phi,$$

quae, aeque ac praecedens, evanescit posito tam $\Phi=0$ quam $\Phi=\pi$, si modo fuerit $n>1$. Sumatur differentiale, eritque: $\partial V = (nn-\alpha\alpha)\sin.\alpha\Phi\partial\Phi\sin.\Phi^n - n(n-1)\partial\Phi\sin.\alpha\Phi\sin.\Phi^{n-2}$, unde concluditur fore:

$$\int\partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n-2} = \frac{nn-\alpha\alpha}{n(n-1)}\int\partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^n,$$

si integralia a $\Phi=0$ usque ad $\Phi=\pi$ capiantur.

Digitized by Google

Quod si igitur hic successive ad altiores potestates progrediamur, erit pro iisdem terminis integrationis:

$$\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n} = \frac{(n+2)^2-\alpha\alpha}{(n+2)(n+1)} \int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n+2},$$
$$\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n+2} = \frac{(n+4)^2-\alpha\alpha}{(n+4)(n+3)} \int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n+4},$$
$$\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n+4} = \frac{(n+6)^2-\alpha\alpha}{(n+6)(n+5)} \int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n+6},$$
etc. etc.

Hinc intelligitur fore per productum infinitum:

$$\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n-2} \left[\begin{smallmatrix} a\,\Phi=0 \\ ad\,\Phi=\pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{nn-\alpha\alpha}{n(n-1)} \cdot \frac{(n+2)^2-\alpha\alpha}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{(n+4)^2-\alpha\alpha}{(n+4)(n+3)} \dots \frac{(n+\infty)^2-\alpha\alpha}{(n+\infty)(n+\infty-1)} \int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n+\infty}.$$

Eodem modo erit:

$$\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{m-2} \left[\begin{smallmatrix} a\,\Phi=0 \\ ad\,\Phi=\pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{mm-\alpha\alpha}{m(m-1)} \cdot \frac{(m+2)^2-\alpha\alpha}{(m+2)(m+1)} \cdot \dots \frac{(m+\infty)^2-\alpha\alpha}{(m+\infty)(m+\infty-1)} \int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{m+\infty},$$

unde si illud integrale per hoc dividatur, prodibit productum in theoremate allatum:

$$\frac{\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{n-2}}{\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^{m-2}} = \frac{m(m-1)(nn-\alpha\alpha)}{n(n-1)(mm-\alpha\alpha)} \cdot \frac{(m+2)(m+1)((n+2)^2-\alpha\alpha)}{(n+2)(n+1)((m+2)^2-\alpha\alpha)} \text{ etc.}$$

quod manifesto verum est quicunque valores litteris α, m et n tribuantur.

Corollarium.

§. 9. Statuatur $n=3$ et $m=2$, atque ex elementis calculi integralis constat fore:

$$\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi \left[\begin{smallmatrix} a\,\Phi=0 \\ ad\,\Phi=\pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{\sin.\alpha\pi}{1-\alpha\alpha},$$
$$\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \left[\begin{smallmatrix} a\,\Phi=0 \\ ad\,\Phi=\pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{1-\cos.\alpha\pi}{\alpha},$$

unde sequitur:

$$\frac{\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi}{\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi} = \frac{\alpha}{1-\alpha\alpha} \cdot \frac{\sin.\alpha\pi}{1-\cos.\alpha\pi} = \frac{\alpha}{1-\alpha\alpha} \cot.\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Hinc igitur per productum infinitum habebimus:

$$\cot.\frac{\alpha\pi}{2}=\frac{1-\alpha\alpha}{\alpha}\cdot\frac{9-\alpha\alpha}{4-\alpha\alpha}\cdot\frac{25-\alpha\alpha}{16-\alpha\alpha}\cdot\frac{49-\alpha\alpha}{36-\alpha\alpha}\cdot\text{ etc.}$$

qui valor cum illo, quem supra §. 6 invenimus, perfecte congruit.

Scholion.

§. 10. Hoc modo pro quibuslibet valoribus exponentium m et n producta infinita orientur, quae quidem, si m et n fuerint numeri integri, plerumque jam erunt cognita; sin autem pro iisdem m et n numeri fracti accipiantur, tum prorsus nova producta orientur, quorum valores semper per formulas integrales assignare licebit.

Theorema III.

§. 11. *Quicunque valores litteris* α, m *et* n *tribuantur, fractio* $\frac{\int\partial\Phi\cos.\alpha\Phi\sin.\Phi^{n-2}}{\int\alpha\Phi\cos.\alpha\Phi\sin.\Phi^{m-2}}$ *per idem, ac praecedens fractio, productum exprimitur.*

Demonstratio.

Ad hoc demonstrandum consideremus hanc expressionem:

$$V=\alpha\sin.\alpha\Phi\sin.\Phi^{n}+n\cos.\alpha\Phi\sin.\Phi^{n-1}\cos.\Phi,$$

quae etiam casibus $\Phi=0$ et $\Phi=\pi$ in nihilum abit. Hac differentiata erit:

$$\partial V=(\alpha\alpha-nn)\partial\Phi\cos.\alpha\Phi\sin.\Phi^{n}+n(n-1)\partial\Phi\cos.\alpha\Phi\sin.\Phi^{n-2},$$

unde concluditur fore:

Digitized by Google

$$\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi^{n-2} = \frac{nn-\alpha\alpha}{n(n-1)} \int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi^{n},$$

si integralia a $\Phi = 0$ usque ad $\Phi = \pi$ capiantur. Hinc igitur simili prorsus modo, ac in praecedente demonstratione factum est, elicitur:

$$\frac{\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi^{n-2}}{\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi^{m-2}} = \frac{m(m-1)(nn-\alpha\alpha)}{n(n-1)(mm-\alpha\alpha)} \cdot \frac{(m+2)(m+1)((n+2)^2-\alpha\alpha)}{(n+2)(n+1)((m+2)^2-\alpha\alpha)} \cdot \text{etc.}$$

Corollarium 1.

§. 12. Quod si igitur statuatur:

$$P = \frac{m(n-\alpha)}{n(m-\alpha)} \cdot \frac{(m+2)(n+2-\alpha)}{(n+2)(m+2-\alpha)} \cdot \frac{(m+4)(n+4-\alpha)}{(n+4)(m+4-\alpha)} \text{ etc.}$$

$$Q = \frac{(m-1)(n+\alpha)}{(n-1)(m+\alpha)} \cdot \frac{(m+1)(n+2+\alpha)}{(n+1)(m+2+\alpha)} \cdot \frac{(m+3)(n+4+\alpha)}{(n+3)(m+4+\alpha)} \text{ etc.}$$

manifestum est fore:

$$\frac{\int \partial \Phi \cos \alpha \Phi \sin. \Phi^{n-2}}{\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi^{m-2}} \left[{a\, \Phi = 0 \atop ad\, \Phi = \pi} \right] = PQ,$$

ubi notari meretur valores P et Q etiam sequenti modo per formulas integrales exprimi posse:

$$P = \frac{\int z^{-\alpha-1} \partial z (1-zz)^{\frac{n-2}{2}}}{\int z^{-\alpha-1} \partial z (1-zz)^{\frac{m-2}{2}}} \left[{a\, z = 0 \atop ad\, z = 1} \right]$$

$$Q = \frac{\int z^{\alpha} \partial z (1-zz)^{\frac{n-3}{2}}}{\int z^{\alpha} \partial z (1-zz)^{\frac{m-3}{2}}} \left[{a\, z = 0 \atop ad\, z = 1} \right].$$

(Conf. Inst. Calc. Integr. T. I. pag. 259. et Nov. Comm. T. XX. pag. 68.)

Corollarium 2.

§. 13. Supra §. 9 vidimus esse:

$$\frac{\int \partial \Phi \sin. \alpha \Phi \sin. \Phi}{\int \partial \Phi \sin. \alpha \Phi} \left[{a\, \Phi = 0 \atop ad\, \Phi = \pi} \right] = \frac{\alpha}{1-\alpha\alpha} \cdot \cot. \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Pro praesenti casu, positis in theoremate 3, exponentibus $n-2=1$, $m-2=0$, hoc est $n=3$ et $m=2$, ob

$$\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \left[\begin{smallmatrix} \alpha \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{\alpha} \sin. \alpha \pi$$

$$\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi \left[\begin{smallmatrix} \alpha \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{1 + \cos. \alpha \pi}{1 - \alpha \alpha},$$

erit quoque:

$$\frac{\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi}{\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{\alpha}{1 - \alpha \alpha} \cdot \cot. \frac{\alpha \pi}{2},$$

quod utique omni attentione dignum videtur.

Scholion.

§. 14. Multo magis autem notatu digna videtur sequens observatio, quod sub iisdem terminis integrationis sit:

$$\text{I.} \quad \frac{\int e^{\alpha \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi^n}{\int e^{-\alpha \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi^n} = e^{\alpha \pi},$$

$$\text{II.} \quad \frac{\int \partial \Phi \sin. \alpha \Phi \sin. \Phi^n}{\int \partial \Phi \cos. \alpha \Phi \sin. \Phi^n} = \text{tag.} \frac{\alpha \pi}{2},$$

quicunque etiam valores litterae n tribuantur, cujus asserti veritatem sequentibus duobus theorematibus complectar et demonstrabo.

Theorema IV.

§. 15. *Quicunque valores litterae* n *tribuantur, semper erit valor hujus expressionis:*

$$\frac{\int e^{\alpha \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi^n}{\int e^{-\alpha \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi^n} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \pi \end{smallmatrix}\right] = e^{\alpha \pi}.$$

Demonstratio.

Ponatur:

$$\int e^{\alpha \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi^n \left[\begin{smallmatrix} \alpha \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \pi \end{smallmatrix}\right] = v,$$

atque evidens est pro quocunque alio angulo ψ quoque fore:

Digitized by Google

$$\int e^{\alpha\psi}\,\partial\psi\;\sin.\psi^{n}\;\left[{}^{a\psi=0}_{ad\,\psi=\pi}\right]=v.$$

Statuatur nunc $\psi=\pi-\Phi$, ita ut $\partial\psi=-\partial\Phi$ et $\sin.\psi=\sin.\Phi$, fietque postrema formula:

$$v=-e^{\alpha\pi}\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}\left[{}^{a\Phi=\pi}_{ad\,\Phi=0}\right].$$

sive mutatis terminis integrationis:

$$v=e^{\alpha\pi}\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}\;\left[{}^{a\Phi=0}_{ad\,\Phi=\pi}\right],$$

unde sequitur fore:

$$\int e^{\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}=e^{\alpha\pi}\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n},$$

hincque id ipsum, quod demonstrandum erat, adipiscimur:

$$\frac{\int e^{\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}}{\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}}\;\left[{}^{a\Phi=0}_{ad\,\Phi=\pi}\right]=e^{\alpha\pi}.$$

Theorema V.

§. 16. *Quicunque valores litterae* n *tribuantur, semper erit:*

$$\frac{\int\partial\Phi\,\sin\,\alpha\Phi\,\sin.\Phi^{n}}{\int\partial\Phi\,\cos.\,\alpha\Phi\,\sin.\Phi^{n}}\;\left[{}^{a\Phi=0}_{ad\,\Phi=\pi}\right]=\mathrm{tg.}\,\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Demonstratio.

Cum ex praecedente theoremate, sub iisdem terminis integrationis, quos hic stabilivimus, sit:

$$e^{\alpha\pi}=\frac{\int e^{\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin\,\Phi^{n}}{\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}},$$

manifestum est fore:

$$a\,e^{\alpha\pi}+b=\frac{a\int e^{\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}+b\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}}{\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}},$$

$$A\,e^{\alpha\pi}+B=\frac{A\int e^{\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}+B\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}}{\int e^{-\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,\sin.\Phi^{n}}.$$

Hinc autem nanciscimur:

$$\frac{a e^{\alpha\pi} + b}{A e^{\alpha\pi} + B} = \frac{\int \partial\Phi \sin.\Phi^n (a e^{\alpha\Phi} + b e^{-\alpha\Phi})}{\int \partial\Phi \sin.\Phi^n (A e^{\alpha\Phi} + B e^{-\alpha\Phi})}.$$

Statuatur nunc $\alpha = \beta\sqrt{-1}$, $a = \frac{1}{\sqrt{-1}}$, $b = \frac{-1}{\sqrt{-1}}$, $A = 1$, $B = 1$ et cum sit:

$$e^{\beta\Phi\sqrt{-1}} + e^{-\beta\Phi\sqrt{-1}} = 2 \cos.\beta\Phi,$$
$$e^{\beta\Phi\sqrt{-1}} - e^{-\beta\Phi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \sin.\beta\Phi,$$

si hi valores rite substituantur, prodibit:

$$\frac{\int \partial\Phi \sin\beta\Phi \sin.\Phi^n}{\int \partial\Phi \cos.\beta\Phi \sin.\Phi^n} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\beta\pi\sqrt{-1}} - 1}{e^{\beta\pi\sqrt{-1}} + 1}.$$

Supra autem §. 6 jam vidimus esse:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\beta\pi\sqrt{-1}} - 1}{e^{\beta\pi\sqrt{-1}} + 1} = \text{tag.} \frac{\beta\pi}{2},$$

unde, scribendo α loco β, sequitur fore:

$$\frac{\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^n}{\int \partial\Phi \cos.\alpha\Phi \sin.\Phi^n} \left[{}^{a\,\Phi = 0}_{ad\,\Phi = \pi}\right] = \text{tag.} \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Scholion.

§. 17. Ex ipso autem modo demonstrandi hic adhibito perspicitur assignari posse formulas integrales multo generaliores, quae si inter eosdem terminos integrationis includantur, vel per $e^{\alpha\pi}$ vel per tag. $\frac{\alpha\pi}{2}$ exprimi poterunt. Sequentia duo theoremata hujusmodi formulas exhibebunt.

Theorema VI.

§. 18. *Quicunque valores litterae* n *tribuantur, semper erit:*

$$\frac{\int e^{\alpha\Phi} \partial\Phi \sin.\Phi^n (l \sin.\Phi)^\gamma}{\int e^{-\alpha\Phi} \partial\Phi \sin.\Phi^n (l \sin.\Phi)^\gamma} \left[{}^{a\,\Phi = 0}_{ad\,\Phi = \pi}\right] = e^{\alpha\pi}.$$

Demonstratio.

Ponatur, ut supra §. 15 fecimus:

$$\int e^{\alpha\phi}\partial\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma\ \left[\begin{smallmatrix}a\ \phi=0\\ ad\ \phi=\pi\end{smallmatrix}\right]=v;$$

et pro quocunque alio angulo ψ erit:

$$\int e^{\alpha\psi}\partial\psi\,\sin.\psi^n\,(l\,\sin.\psi)^\gamma\ \left[\begin{smallmatrix}a\ \psi=0\\ ad\ \psi=\pi\end{smallmatrix}\right]=v.$$

Statuatur nunc $\psi=\pi-\phi$, ita ut sit $\partial\psi=-\partial\phi$ et $\sin.\psi=\sin.\phi$, eritque postrema formula:

$$v=-e^{\alpha\pi}\int e^{-\alpha\phi}\partial\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma\ \left[\begin{smallmatrix}a\ \phi=\pi\\ ad\ \phi=0\end{smallmatrix}\right]$$

sive mutatis integrationis terminis:

$$v=e^{\alpha\pi}\int e^{-\alpha\phi}\partial\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma\ \left[\begin{smallmatrix}a\ \phi=0\\ ad\ \phi=\pi\end{smallmatrix}\right],$$

unde sequitur fore:

$$\frac{\int e^{\alpha\phi}\partial\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma}{\int e^{-\alpha\phi}\partial\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma}\ \left[\begin{smallmatrix}a\ \phi=0\\ ad\ \phi=\pi\end{smallmatrix}\right]=e^{\alpha\pi}.$$

Theorema VII.

§. 19. *Quicunque valores litterae n tribuantur, semper erit:*

$$\frac{\int\partial\phi\,\sin.\alpha\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma}{\int\partial\phi\,\cos.\alpha\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma}\ \left[\begin{smallmatrix}a\ \phi=0\\ ad\ \phi=\pi\end{smallmatrix}\right]=\text{tg.}\,\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Demonstratio.

Ex praecedente theoremate sequitur fore:

$$\frac{a\,e^{\alpha\pi}+b}{A\,e^{\alpha\pi}+B}=\frac{\int\partial\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma\,(a\,e^{\alpha\phi}+b\,e^{-\alpha\phi})}{\int\partial\phi\,\sin.\phi^n\,(l\,\sin.\phi)^\gamma\,(A\,e^{\alpha\phi}+B\,e^{-\alpha\phi})}.$$

Supra autem §. 16 vidimus, posito $\alpha\sqrt{-1}$ loco α, tum vero $a=-b=\frac{1}{\sqrt{-1}}$ et $A=B=1$, esse:

$$a e^{\alpha\Phi} + b e^{-\alpha\Phi} = 2\sqrt{-1}\,\sin.\alpha\Phi;$$
$$A e^{\alpha\Phi} + B e^{-\alpha\Phi} = 2\cos.\alpha\Phi,$$

et pro altera parte:

$$\frac{a e^{\alpha\pi} + b}{A e^{\alpha\pi} + B} = \text{tag.}\,\frac{\alpha\pi}{2},$$

ita ut habeamus:

$$\frac{\int \partial\Phi \sin.\alpha\Phi \sin.\Phi^n (l \sin.\Phi)^\gamma}{\int \partial\Phi \cos.\alpha\Phi \sin.\Phi^n (l \sin.\Phi)^\gamma} = \text{tag.}\,\frac{\alpha\pi}{2};$$

sumtis integralibus a termino $\Phi = 0$ ad terminum $\Phi = \pi$ usque.

Scholion.

§. 20. Ex his postremis demonstrationibus jam perspicuum est, eosdem prodire debere valores $e^{\alpha\pi}$ et tag. $\frac{\alpha\pi}{2}$, si loco sin. Φ^n (l sin. Φ)$^\gamma$ quaecunque alia functio sinus anguli Φ in formulas nostras integrales introducatur, quod quo clarius appareat sequentia duo theoremata generalia adjungamus.

Theorema VIII.

§. 21. *Denotante* Φ *functionem quamcunque ipsius* sin. Φ, *dummodo, ob signum radicale, si quod insit, nulla ambiguitas oriatur, semper erit:*

$$\frac{\int e^{\alpha\Phi}\,\Phi\,\partial\Phi}{\int e^{-\alpha\Phi}\,\Phi\,\partial\Phi}\left[{}^{a\,\Phi=0}_{ad\,\Phi=\pi}\right] = e^{\alpha\pi}.$$

Demonstratio.

Ponamus, ut supra fecimus:

$$\int e^{\alpha\Phi}\,\Phi\,\partial\Phi\,\left[{}^{\alpha\Phi=0}_{ad\,\Phi=\pi}\right] = v;$$

sumtoque alio angulo ψ, denotet Ψ talem functionem ipsius sin. ψ, qualis Φ est ipsius sin. ϕ, eritque:

$$\int e^{\alpha\psi}\,\Psi\,\partial\psi\,\left[{}^{\alpha\psi=0}_{ad\,\psi=\pi}\right] = v.$$

Sit nunc $\psi = \pi - \phi$, eritque $\partial\psi = -\partial\phi$, $\sin.\psi = \sin.\phi$ et $\Psi = \Phi$, consequenter:

$$v = -e^{\alpha\pi}\int e^{-\alpha\phi}\,\Phi\,\partial\phi\,\left[{}^{\alpha\phi=\pi}_{ad\,\phi=0}\right].$$

sive mutatis terminis integrationis:

$$v = e^{\alpha\pi}\int e^{-\alpha\phi}\,\Phi\,\partial\phi\,\left[{}^{\alpha\phi=0}_{ad\,\phi=\pi}\right].$$

Hinc autem sequitur fore:

$$\frac{\int e^{\alpha\phi}\,\Phi\,\partial\phi}{\int e^{-\alpha\phi}\,\Phi\,\partial\phi}\left[{}^{\alpha\phi=0}_{ad\,\phi=\pi}\right] = e^{\alpha\pi},$$

quod demonstrandum erat.

Theorema IX.

§. 22. *Denotante Φ functionem quamcunque ipsius* sin. ϕ, *dummodo radix, si quae inest, nullam ambiguitatem signi involvat, semper erit:*

$$\frac{\int\Phi\,\partial\phi\,\sin.\alpha\phi}{\int\Phi\,\partial\phi\,\cos.\alpha\phi}\left[{}^{\alpha\phi=0}_{ad\,\phi=\pi}\right] = \text{tag.}\,\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Demonstratio.

Ex praecedente theoremate colligitur fore:

$$\frac{a\,e^{\alpha\pi} + b}{A\,e^{\alpha\pi} + B} = \frac{\int\Phi\,\partial\phi\,(a\,e^{\alpha\phi} + b\,e^{-\alpha\phi})}{\int\Phi\,\partial\phi\,(A\,e^{\alpha\phi} + B\,e^{-\alpha\phi})}.$$

Cum autem posito $\alpha\sqrt{-1}$ loco α, tum vero $a = -b = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ et $A = B = 1$, sit:

$$a\,e^{\alpha\Phi} + b\,e^{-\alpha\Phi} = 2\sqrt{-1}\,\sin.\alpha\Phi;$$

$$A\,e^{\alpha\Phi} + B\,e^{-\alpha\Phi} = 2\cos.\alpha\Phi,$$

nec non, ut §. 16 vidimus:

$$\frac{a\,e^{\alpha\pi} + b}{A\,e^{\alpha\pi} + B} = \text{tag.}\,\frac{\alpha\pi}{2},$$

his substitutis erit:

$$\frac{\int\Phi\,\partial\Phi\,\sin.\alpha\Phi}{\int\Phi\,\partial\Phi\,\cos.\alpha\Phi}\left[\begin{matrix}a\,\Phi=0\\ ad\,\Phi=\pi\end{matrix}\right] = \text{tag.}\,\frac{\alpha\pi}{2}.$$

SPECULATIONES ANALYTICO-GEOMETRICAE.

AUCTORE

N. FUSS.

Conventui exhib. die 27 Januarii 1808.

§. 1. Posito $y = \frac{bx}{a}$, si loco x scribatur $x + a$, prodit $y + b$ loco y; unde sequitur, si pro linea recta in aequatione $y = \frac{bx}{a}$ abscissae x respondeat applicata y, tum abscissae $x + a$ responsuram fore applicatam $y + b$. Hinc sequens quaestio proponi potest:

Problema I.

§. 2. *Invenire ejusmodi lineas curvas, in quibus si abscissae* x *respondeat applicata* y, *tum abscissae* x + a *respondeat applicata* $y + b = y'$.

Solutio.

Statim manifestum est huic problemati satisfacere omnes curvas hac aequatione expressas:

$$y = \frac{bx}{a} + a \sin. \frac{2 i \pi x}{a},$$

denotante i numerum integrum quemcunque. Si enim loco x scribatur $x + a$, prodibit:

$$y' = \frac{bx}{a} + b + a \sin. \left(\frac{2 i \pi x}{a} + 2 i \pi\right).$$

Est vero $\sin. \left(\frac{2 i \pi x}{a} + 2 i \pi\right) = \sin. 2 i \pi$, ideoque $y' = y + b$.

uti requiritur. Quin etiam multo generalius problemati satisfiet ponendo:

$$y = \frac{bx}{a} + F : \sin. \frac{2i\pi x}{a},$$

denotante F functionem quamcunque quantitatis cui praefigitur. Sic innumerabiles habentur curvae transcendentes problemati proposito satisfacientes.

Corollarium.

§. 3. Cum y sit functio ipsius x, si loco x ponatur $x + a$, prodibit:

$$y + b = y + \frac{a\partial y}{\partial x} + \frac{a^2\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{a^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

(C. *Euleri* Inst. calc. diff. p. 835.). Hinc sequitur fore:

$$b = \frac{a\partial y}{\partial x} + \frac{a^2\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{a^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

cujus igitur aequationis integrale completum erit:

$$y = \frac{bx}{a} + F : \sin. \frac{2i\pi x}{a}.$$

Scholion.

§. 4. Si hanc speculationem ulterius prosequamur, ea nobis viam aperiet plura alia problemata ejusdem indolis resolvendi. Praecipua eorum in sequentibus paragraphis exhibebo.

Problema II.

§. 5. *Investigare ejusmodi lineas curvas, in quibus si abscissae* x *respondeat applicata* y, *tum abscissae* x + a *respondeat applicata* y′ = ny.

Digitized by Google

Solutio.

Evidens est conditioni stabilitae satisfieri ponendo $y = n^{\frac{x}{a}}$. Praeterea autem satisfacient innumerae curvae transcendentes hac aequatione contentae:

$$y = n^{\frac{x}{a}} F : \sin. \frac{2 i \pi x}{a}.$$

Posito enim $x + a$ loco x, fiet:

$$y' = n^{\frac{x+a}{a}} F : \sin. \left(\frac{2 i \pi x}{a} + 2 i \pi\right) = n y,$$

uti requiritur.

Corollarium.

§. 6. Posito autem $x + a$ loco x, erit per expressionem infinitam:

$$n y = y + \frac{a \partial y}{\partial x} + \frac{a^2 \partial \partial y}{2 \partial x^2} + \frac{a^3 \partial^3 x}{6 \partial x^3} + \text{etc.}$$

cujus igitur integrale completum assignare licebit. Erit enim hoc integrale:

$$y = n^{\frac{x}{a}} F : \sin. \frac{2 i \pi x}{a}.$$

Problema III.

§. 7. *Investigare ejusmodi curvas, in quibus si abscissae* x *respondeat applicata* y, *tum abscissae* m x *respondeat applicata* n y.

Solutio.

Evidens est praeter curvas parabolicas, in aequatione $y = \alpha x^{\lambda}$ contentas, huic problemati satisfacturas innumeras

Digitized by Google

curvas transcendentes contentas sub aequatione:

$$y = \alpha x^{\lambda} \text{ F} : \sin. \frac{2 i \pi l x}{l m}.$$

existente $\lambda = \frac{l n}{l m}$.

Corollarium.

§. 8. Sumatur $m = 2$, et quoniam, posito $x + x = 2x$ loco x, per seriem finitam habemus:

$$n y = y + \frac{x \partial y}{\partial x} + \frac{x^2 \partial\partial y}{2 \partial x^2} + \frac{x^3 \partial^3 y}{6 \partial x^3} + \text{etc.}$$

erit integrale completum hujus aequationis differentialis infiniti gradus:

$$y = a x^{\lambda} \text{ F} : \sin. \frac{2 i \pi l x}{l 2}.$$

Problema IV.

§. 9. *Investigare ejusmodi curvas, in quibus si abscissae* x *respondeat applicata* y, *tum abscissae* x^m *respondeat applicata* $y' = n y$:

Solutio.

Primo evidens est huic conditioni satisfieri ponendo $y = a (l x)^{\lambda}$, existente $\lambda = \frac{l n}{l m}$. Praeter lineas autem hac aequatione contentas satisfaciunt quoque omnes curvae transcendentes sub hac aequatione contentae:

$$y = a (l x)^{\lambda} \text{ F} : (\sin. \frac{2 i \pi l l x}{l m}).$$

Posito enim x^m loco x habebimus:

$$y' = a m^{\lambda} (l x)^{\lambda} \text{ F} : \sin. (2 i \pi + \frac{2 i \pi l l x}{l m}) = n y.$$

Digitized by Google

Problema V.

§. 10. *Investigare lineas curvas, in quibus si abscissae* x *respondeat applicata* y, *tum abscissae* mx *respondeat applicata* $y^m = y'$.

Solutio.

Conditioni praescriptae satisfiet ponendo $y = a^x$. Praeterea vero etiam satisfacient problemati proposito omnes curvae sub hac aequatione contentae:

$$y = a^x \left(F : \sin. \frac{2 i \pi l x}{l m}\right)^x.$$

Fiet enim posito $m x$ loco x:

$$y' = a^{mx} \left(F : \sin. \left(2 i \pi + \frac{2 i \pi l x}{l m}\right)\right)^{mx} = y^m.$$

Corollarium.

§. 11. Quodsi nunc statuatur $m = 2$, hinc sequitur aequationem differentialem gradus infinitesimi:

$$y y = y + \frac{x \partial y}{\partial x} + \frac{x^2 \partial \partial y}{2 \partial x^2} + \frac{x^3 \partial^3 y}{6 \partial x^3} + \text{etc.}$$

integrari posse; integrale nempe completum hujus aequationis erit:

$$y = a^x \left(F : \sin. \frac{2 i \pi l x}{l m}\right)^x.$$

Problema VI.

§. 12. *Investigare ejusmodi curvas, in quibus si abscissae* x *respondeat applicata* y, *tum abscissae* $\frac{1}{x}$ *respondeat applicata* $\frac{1}{y} = y'$.

Solutio.

Denotante Π functionem quamcunque ipsius x, huic

problemati satisfiet ponendo $y = \frac{\Pi : x}{\Pi : \frac{1}{x}}$. Si enim hic loco x scribatur $\frac{1}{x}$, prodibit:

$$y' = \frac{\Pi : \frac{1}{x}}{\Pi : x} = \frac{1}{y}.$$

Corollarium.

§. 13. Quod si nunc statuatur $\frac{1}{x} - x = t$, erit integrabilis aequatio differentialis infinita haec:

$$\frac{1}{y} = y + \frac{t \partial y}{\partial x} + \frac{t^2 \partial \partial y}{2 \partial x^2} + \frac{t^3 \partial^3 y}{6 \partial x^3} + \text{etc.}$$

integrali ejus completo existente:

$$y = \frac{\Pi : x}{\Pi : \frac{1}{x}}.$$

Scholion.

§. 14. Hic quaestio satis curiosa se offert, quomodo functio illa Π sit determinanda, ut $\Pi : x + \Pi : \frac{1}{x}$ fiat quantitas constans, quemadmodum evenit in summa arcuum, quorum tangentes sunt x et $\frac{1}{x}$. Ad hanc quaestionem solvendam ponatur $\Pi : x = z$ et $\Pi : \frac{1}{x} = z'$, ita ut z' oriatur ex z dum loco x scribitur $\frac{1}{x}$. Jam introducatur nova variabilis v, a qua x ita pendeat, ut sit $x = \frac{b+v}{b-v}$, unde igitur erit $\frac{1}{x} = \frac{b-v}{b+v}$, quae expressio manifesto ex priore nascitur, si v sumatur negative, quamobrem etiam z' ex z nasci debebit sumendo tantum v negative. Hoc principium nobis statim suppeditat hanc solutionem generalissimam. Denotante V functionem quamcunque imparem ipsius

Digitized by Google

v, quae scilicet abeat in sui negativum sumto v negative, statuatur $x = \frac{b+v}{b-v}$, eritque $z = a + V$. Hinc enim sumto v negative, erit $x = \frac{b-v}{b+v} = \frac{1}{x}$ et $z' = a - V$, sicque fiet $z + z' = 2a$, hoc est $\Pi : x + \Pi : \frac{1}{x} = \text{Const.}$; uti postulabatur. Quaecunque igitur functio impar pro V accipiatur, quoniam v ita per x exprimitur, ut sit $v = \frac{b(x-1)}{x+1}$, si iste valor in V ubique loco v scribatur, statim habebitur aequatio inter x et z quaesito satisfaciens. Ita si verbi gr. $V = \alpha v$, erit $V = \frac{\alpha b(x-1)}{x+1}$, ideoque $z = a + \frac{\alpha b(x-1)}{x+1}$. Capiatur $\alpha b = a$, erit $z = \frac{2ax}{x+1}$. Tum autem fit $z' = \frac{2a}{x+1}$, consequenter $z + z' = 2a$. Ubi notetur aequationem $z = \frac{2ax}{x+1}$ esse pro arcu parabolico.

Problema VII.

§. 15. *Si abscissae* x *respondeat applicata* y, *invenire omnes curvas, in quibus abscissae* αx^m *respondeat applicata* $y' = \beta y^n$.

Solutio.

Ponatur $p = \sin. 2i\pi u$ et $q = \cos. 2i\pi u$, ubi u sit ejusmodi functio ipsius x, quae, si loco x ponatur αx^m, abeat in $u + 1$; tum enim tam sinus quam cosinus manebunt iidem. Denotet porro U functionem quamcunque binarum quantitatum p et q, quae ergo non mutabitur etiamsi loco x scribatur αx^m. Tales autem functiones pro u plurimas excogitare licet. Sit verbi gratia:

Digitized by Google

$$u = \frac{l\,(lx + \frac{l\alpha}{m-1})}{lm} + C,$$

et si hic loco x scribatur αx^m, ista functio, quam charactere u' designemus, hanc induet formam:

$$u' = \frac{l\,(mlx + \frac{ml\alpha}{m-1})}{lm} + C = \frac{l\,(lx + \frac{l\alpha}{m-1})}{lm} + C + 1,$$

ita ut sit $u' = u + 1$, uti requiritur. Hoc valore igitur pro u constituto, si ponatur:

$$y = \beta^{\frac{1}{1-n}} \,.\, U m^{\lambda u},$$

existente $\lambda = \frac{ln}{lm}$, hoc est $n = m^\lambda$, posito loco x valore αx^m, applicata y in hanc abit formam:

$$y' = \beta^{\frac{1}{1-n}} \,.\, U^{m\lambda(u+1)},$$

quae expressio, ob $m^{\lambda(u+1)} = m^\lambda \,.\, m^{\lambda u}$ et ob $m^\lambda = n$ transmutatur in hanc:

$$y' = \beta^{\frac{1}{1-n}} \,.\, U^{n\,.\,m^{\lambda u}} = \beta y^n,$$

quo ipso conditioni problematis nostri est satisfactum.

Corollarium 1.

§. 16. Casus $m = 1$ hic peculiarem evolutionem postulat, ideo quod in expressione pro u assumta denominator lm hoc casu evanescit. Ponatur $m = 1 + \delta$, denotante δ quantitatem infinite-parvam, eritque $l\,(1+\delta) = \delta$, hinc $u = \frac{l(lx + \frac{l\alpha}{\delta})}{\delta}$, sive $\delta u = l\,(lx + \frac{l\alpha}{\delta})$. Est vero $\frac{l\alpha}{\delta}$

Digitized by Google

quantitas infinite-magna, ergo $\frac{\delta}{l\alpha}$ quantitas infinite parva, ideoque $l(1+\frac{\delta lx}{l\alpha})=\frac{\delta lx}{l\alpha}$; unde cum sit:

$$l\,(l x + \tfrac{l\alpha}{\delta}) = l\tfrac{l\alpha}{\delta} + l\,(1 + \tfrac{\delta lx}{l\alpha}),$$

erit $\delta u = l\frac{l\alpha}{\delta} + \frac{\delta lx}{l\alpha}$, hinc $u = C + \frac{lx}{l\alpha}$ et $y = \beta^{\frac{1}{1-n}} U^{\lambda u}$.

Corollarium 2.

§. 17. Sit $n=1$, et ob $n=m^{\lambda}$ erit $m^{\lambda u}=1^{u}=1$, ideoque $y=\beta^{\frac{1}{1-n}}.U$. Quoniam autem hic $\frac{1}{1-n}=\infty$, inde nihil concludere licet, unde hujus casus resolutionem ex ipso fonte hauriri oportet, hoc est y ita assumi, ut posito $u+1$ loco u, abeat y in βy. Hoc autem evenit sumendo $y=\beta^{u}.U$, tum enim fit $y'=\beta^{u+1}.U=\beta y$, uti requiritur.

Corollarium 3.

§. 18. Sit $\alpha=1$ et $\beta=1$, eritque $u=l\frac{lx}{lm}+C$ et $y=Um^{\lambda\,(l\frac{lx}{lm}+C)}$ et posito x^{m} loco x erit:

$$y' = Un.\,m^{\lambda\,(l\frac{lx}{lm}+C)} = y^{n}.$$

Corollarium 4.

§. 19. Cum x abeat in αx^{m}, si ponatur $\alpha x^{m}-x=t$, functio y inde nata βy^{n} aequabitur huic seriei infinitae:

$$\beta y^{n} = y + \frac{t\,\partial y}{\partial x} + \frac{t^{2}\partial\partial y}{2\,\partial x^{2}} + \frac{t^{3}\partial^{3}y}{6\,\partial x^{3}} + \text{etc.}$$

Hujus ergo aequationis differentialis infinitesimi gradus integrale completum erit: $y=\beta^{\frac{1}{1-n}}.U^{m^{\lambda u}}$.

Scholion.

§. 20. Nunc problema generalius aggrediamur, quaerendo ejusmodi lineas curvas, in quibus si abscissae x respondeat applicata y, tum abscissae x' respondeat applicata y'. Prius autem quam ejus solutionem suscipiamus, sequens problema auxiliare praemittere necesse est.

Problema auxiliare.

§. 21. *Si* x′ *denotet functionem datam ipsius* x, *investigare tales functiones ipsius* x, *quae non mutentur, etiamsi pro scribatur* x′.

Solutio.

Quaeratur primo ejusmodi functio t ipsius x, quae, si loco x scribatur x', abeat in $t+1$, ita ut $t+1$ talis sit functio ipsius x', qualis est t ipsius x. Hujusmodi functiones quemadmodum pro variis casibus ipsius x' assignari queant, deinceps videbimus. Tali jam functione t inventa statuatur $p = \sin. 2i\pi t$ et $q = \cos. 2i\pi t$, quae ergo litterae p et q eosdem retinebunt valores, si loco x scribatur x'. Quamobrem si functio T utcunque componatur ex binis litteris p et q, ea eundem retinebit valorem, etiamsi loco x scribatur x'. Nihil aliud igitur superest, nisi ut pro praecipuis casibus ipsius x' exhibeamus functiones idoneas pro t.

Digitized by Google

1°) Sit $x' = x + a$, huic casui manifesto satisfiet ponendo $t = \frac{x}{a}$; tum enim erit $t' = \frac{x}{a} + 1 = t + 1$.

2°) Sit $x' = ax$, tum satisfaciet valor $t = \frac{lx}{l\alpha}$, fiet enim $t' = \frac{lx}{l\alpha} + 1 = t + 1$; ubi evidens est pro α numeros negativos accipi non posse.

3°) Sit $x' = \alpha x + a$, huic casui satisfiet sumendo

$$t = \frac{l(x + \frac{a}{\alpha - 1})}{l\alpha}; \text{ erit enim } t' = \frac{l(\alpha x + \frac{\alpha \cdot a}{\alpha - 1})}{l\alpha} = \frac{l(x + \frac{a}{\alpha - 1})}{l\alpha} + 1 = t + 1.$$

Ubi iterum evidens est pro α tantum numeros positivos accipi posse.

4°) Sit $x' = \alpha x^m$, cui satisfiet ponendo $t = \frac{l(lx + \frac{l\alpha}{m-1})}{lm}$.

Posito enim x' loco x fiet $t' = \frac{l(lx + \frac{l\alpha}{m-1})}{lm} + 1 = t + 1$.

Hic autem pro m non nisi numeros positivos assumere licet.

Corollarium.

§. 22. Eodem modo si fuerit y' data functio ipsius y, et quaerantur functiones, quae maneant eaedem, etiamsi loco y scribatur y', sit u talis functio, quae abeat in $u + 1$ posito y' loco y, atque ex casibus supra allatis intelligitur:

1°) Si $y' = y + b$, fore $u = \frac{y}{b}$;

2°) Si $y' = \beta y$, tum fore $u = \frac{ly}{l\beta}$;

3°) Si $y' = \beta y + b$, fore $u = \frac{l\left(y + \frac{b}{\beta - 1}\right)}{l\beta}$;

4°) Si $y' = \beta y^n$, fore $u = \frac{l\left(ly + \frac{l\beta}{n-1}\right)}{l n}$;

ubi iterum neque β neque n numeri negativi esse possunt.

Alia Solutio ejusdem problematis.

§. 23. Quaeratur primo ejusmodi functio reciproca ipsius x, quae sit x', ita ut, qualis functio sit x' ipsius x, talis quoque functio futura sit x ipsius x', hoc est, si fuerit $x' = \Pi : x$, tum quoque sit $x = \Pi : x'$. Hujusmodi autem functiones sunt $x' = -x$; $x' = \frac{1}{x}$; $x' = \frac{1-x}{1+x}$ et generalius $x' = \frac{a-bx}{b+cx}$ et aliae. Sumta igitur pro lubitu P pro functione quacunque ipsius x, ita ut sit $P = \Theta : x$, facto $\Theta : \frac{a-bx}{b+cx} = Q$, evidens est fore $P + Q$ talem functionem qualem quaerimus, itemque PQ. In genere igitur si fuerit V functio utcunque composita ex binis functionibus $P + Q$ et PQ, ea gaudebit eadem proprietate, quod non mutetur, etiamsi loco x scribatur $x' = \frac{a-bx}{b+cx}$.

Corollarium.

§. 24. Quodsi ergo y denotet functionem quae maneat eadem, etiamsi loco x scribatur $\frac{a-bx}{b+cx}$, tum posito $x' - x = v$, erit:

$$y = y + \frac{v\partial y}{\partial x} + \frac{v^2 \partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{v^3 \partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

Digitized by Google

sive sublato y utrinque:

$$\frac{v\partial y}{\partial x}+\frac{v^2\partial\partial y}{2\partial x^2}+\text{etc.}=0.$$

Exemplum.

§. 25. Sit $y=1+xx+\frac{2(1+xx)}{(1+x)^2}$, quae functio non mutatur, etiamsi loco x scribatur $\frac{1-x}{1+x}$. Hinc si ponatur $\frac{1-x}{1+x}-x=v$, fieri debebit:

$$\frac{v\partial y}{\partial x}+\frac{v^2\partial\partial y}{2\partial x^2}+\frac{v^3\partial^3 y}{6\partial x^3}+\text{etc.}=0,$$

quod revera evenire ita ostenditur. Cum sit:

$$y=xx+3+\frac{4}{1+x}+\frac{4}{(1+x)^2},$$

habebimus:

$$\begin{aligned}
\frac{v\partial y}{\partial x} &= 2vx + \frac{4v}{(1+x)^2} - \frac{8v}{(1+x)^3},\\
\frac{vv\partial\partial y}{2\partial x^2} &= vv - \frac{4vv}{(1+x)^3} + \frac{12vv}{(1+x)^4},\\
\frac{v^3\partial^3 y}{6\partial x^3} &= \qquad + \frac{4v^3}{(1+x)^4} - \frac{16v^3}{(1+x)^5},\\
\frac{v^4\partial^4 y}{24\partial x^4} &= \qquad - \frac{4v^4}{(1+x)^5} + \frac{20v^4}{(1+x)^6},\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Quodsi nunc termini verticaliter addantur, primae columnae summa erit $=2vx+vv$. Secunda columna est progressio arithmetica formae:

$$a-ab+ab^2-ab^3+\text{etc.}=\frac{a}{b+1},$$

existente $a=\frac{4v}{(1+x)^2}$ et $b=\frac{v}{1+x}$, ita ut hujus columnae summa sit:

$$\frac{a}{b+1}=\frac{4v}{(1+x)(1+x+v)}=2v,$$

ob $1+x+v=\frac{2}{1+x}$. Tertia columna est formae hujus:

$$-2ab+3abb-4ab^3+\text{etc.}=\frac{a}{(b+1)^2}-a,$$

existente $a = \frac{4}{(1+x)^2}$ et $b = \frac{v}{1+x}$, unde hujus columnae summa erit:

$$\frac{4}{(1+x+v)^2} - \frac{4}{(1+x)^2} = (1+x)^2 - \frac{4}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^4 - 4}{(1+x)^2}.$$

Omnium igitur trium columnarum summa est:

$$2v(1+x) + vv + \frac{(1+x)^4 - 4}{(1+x)^2},$$

expressio quae, restituto x loco v, omniaque ad eundem denominatorem reducendo, hanc induit formam:

$$\frac{(2-4x-2xx)(1+x)^2 + (1-2x-xx)^2 + (1+x)^4 - 4}{(1+x)^2}.$$

Facta autem evolutione fiet:

$$(2-4x-2xx)(1+x)^2 = +2 \quad * \quad -8xx - 8x^3 - 2x^4,$$
$$(1-2x-xx)^2 = +1 - 4x + 2xx + 4x^3 + x^4,$$
$$(1+x)^4 - 4 = -3 + 4x + 6xx + 4x^3 + x^4,$$

quorum terminorum summa cum in nihilum abeat, revera erit:

$$\frac{v\partial y}{\partial x} + \frac{vv\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{v^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.} = 0,$$

ut §. 24 est inventum.

Problema.

§. 26. *Si abscissae x respondeat applicata y, investigare ejusmodi curvas, in quibus abscissae x′ respondeat applicata y′.*

Solutio.

Hic statim patet, si fuerit $y' = y$, tum fore $y = T$ (§. 21). Pro reliquis casibus ipsarum x' et y', pro quibus supra §§. 21 et 22 dedimus valores t et u, manifesto satisfaciet haec aequatio: $u = t + T$. Si enim loco

Digitized by Google

x scribatur x', tum t abit in $t+1$ et T non mutatur. At vero u abit in $u+1$, ita ut aequatio etiamnunc subsistat, sicque quaterni casus ante exhibiti quomodocunque inter se combinari poterunt. Ubi adhuc notetur loco T scribi posse lT; quin etiam T quantitate quacunque constante augeri poterit.

Scholion 1.

§. 27. Hoc igitur modo problema generale commodissime solutum dedimus, quod omnes casus speciales in septem prioribus problematibus tractatos in se complectitur, quae investigatio, praeterquam quod ingentem praebuit numerum curvarum singulari et forsan aliquando cum fructu adhibenda proprietate praeditarum, insuper suppeditavit plurimas aequationes infinitesimi gradus, quarum integralia completa nobis assignare licuit, cujusmodi sunt §§. 3, 6, 8, 11, 13, 19 et 24 exhibitae.

Scholion 2.

§. 28. At vero, praeter supra traditas, innumeras adhuc aequationes differentiales infinitas exhibere licet, quarum integralia completa assignari possunt. Ad hoc ostendendum sufficiet prioribus exemplis sequentia adjicere.

1°) Sit primo y talis functio ipsius x, quae evanescat posito $x=0$, tum si loco x ponatur $x-x$, prodibit:

$$y - \frac{x\partial y}{\partial x} + \frac{x^2\partial\partial y}{2\partial x^2} - \frac{x^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

unde hujus aequationis differentialis:

$$0 = \frac{x\partial y}{\partial x} - \frac{x^2\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{x^3\partial^3 y}{6\partial x^3} - \text{etc.}$$

integrale completum habebitur, si pro y sumatur ejusmodi functio ipsius x, quae evanescat posito $x = 0$.

2°) Si pro y sumatur functio quaecunque *par* ipsius x, ita ut abscissae $-x$ respondeat eadem applicata y, ea erit integrale completum hujus aequationis differentialis gradus infinitesimi:

$$0 = -\frac{2x\partial y}{\partial x} + \frac{4xx\partial\partial y}{2\partial x^2} - \frac{8x^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

3°) Simili modo si pro y sumatur functio quaecunque *impar* ipsius x, ita ut abscissae $-x$ respondeat applicata $-y$, ea dabit integrale completum hujus aequationis differentialis infinitae:

$$-y = y - \frac{2x\partial y}{\partial x} + \frac{4xx\partial\partial y}{2\partial x^2} - \frac{8x^3\partial^3 x}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

4°) Si *abscissae* y respondeat *applicata* x, tum si V denotet functionem quamcunque harum quantitatum $x+y$ et xy, ea eadem manebit, si loco x scribatur y et vicissim, quamobrem in genere erit $V = C$ integrale completum hujus aequationis:

$$x = y + \frac{t\partial y}{\partial x} + \frac{tt\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{t^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

posito $t = y - x$.

Scholion 3.

§. 29. Quoniam autem omnia, quae de integrali

completo hujusmodi aequationum differentialium infinitesimi gradus attulimus, eo nititur fundamento, quod, si fuerit y functio ipsius x, haec abeat in y', posito $x+t$ loco x, haec functio y' sit $= y + \frac{t\partial y}{\partial x} +$ etc. et vicissim: coronidis loco sequentia addamus problemata asserta nostra probantia, ne lectori demonstratio eorum, si qua opus fuerit, aliunde sit repetenda.

Problema.

§. 30. *Si fuerit* $y = \Pi : x$ *et* $y' = \Pi : (x+t)$, *ita ut* y' *oriatur ex* y, *si loco* x *scribatur* $x+t$, *valorem ipsius* y' *per seriem exprimere.*

Solutio.

Cum sit $y' = \Pi : (x+t)$, erit differentiando:

$$\partial y' = (\partial x + \partial t)\, \Pi' : (x+t),$$

unde cum y' sit functio duarum varibilium x et t, erit:

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) = \Pi' : (x+t).$$

Jam fingatur series:

$$y' = y + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + \text{etc.}$$

ubi A, B, C, etc. sint functiones ipsius x, ac statim perspicitur posito $t = 0$ fore $y' = y$, uti requiritur. Ex hac autem serie sequitur fore:

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{t\partial A}{\partial x} + \frac{tt\partial B}{\partial x} + \frac{t^3\partial C}{\partial x} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right) = A + 2Bt + 3Ctt + 4Dt^3 + \text{etc.}$$

quae duae series cum debeant esse identicae, inde fluunt sequentes determinationes:

$$A = \frac{\partial y}{\partial x};$$
$$B = \frac{\partial A}{2\partial x} = \frac{\partial\partial y}{2\partial x};$$
$$C = \frac{\partial B}{3\partial x} = \frac{\partial^3 y}{6\partial x^3};$$
$$D = \frac{\partial C}{4\partial x} = \frac{\partial^4 y}{24\partial x^4};$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

quibus in nostra serie ficta substitutis habebimus functionem nostram:

$$y' = y + \frac{t\partial y}{\partial x} + \frac{tt\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{t^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

Problema inversum.

§. 31. *Existente* y = Π : x, *investigare summam hujus seriei infinitae:*

$$y' = y + \frac{t\partial y}{\partial x} + \frac{t^2\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{t^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

Solutio.

Cum y' sit functio duarum variabilium x et t, erit:

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{t\partial\partial y}{\partial x^2} + \frac{tt\partial^3 y}{2\partial x^3} + \text{etc.}$$
$$\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{t\partial\partial y}{\partial x^2} + \frac{tt\partial^3 y}{2\partial x^3} + \text{etc.}$$

ideoque $\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)$. Quodsi jam ponatur $\partial y' = p\partial x + q\partial t$, erit $q = p$, ideoque $\partial y' = p(\partial x + \partial t)$, hincque $y' = F:(x+t)$, quae functio posito $t = 0$ fieri debet $y = \Pi : x$, unde sequitur fore $y' = \Pi : (x + t)$, quae est summa seriei nostrae quaesita.

Digitized by Google

Corollarium.

§. 32. Hinc igitur manifesto sequitur fore $\Pi : (x+t)$ integrale completum formulae differentialis infinitae:

$$y + \frac{t\partial y}{\partial x} + \frac{tt\partial\partial y}{2\partial x^2} + \frac{t^3\partial^3 y}{6\partial x^3} + \text{etc.}$$

cui igitur innituntur omnia quae supra §§. 3, 6, 8, 11, 13, 19 sunt prolata.

SOLUTIO PROBLEMATIS DE INVENIENDIS TRIANGULIS,

QUORUM LATERA, RECTAE BISECANTES, PERPENDICULA, IDEOQUE ET AREAE RATIONALITER EXPRIMANTUR.

AUCTORE

N. FUSS.

Conventui exhib. die 24 Februarii 1808.

§. 1. Inter innumera problemata Diophantea, quorum solutionibus Commentarii et Acta nostrae Academiae hanc Analyseos partem locupletarunt, variae reperiuntur quaestiones ad Trigonometriam rationalem referendae, quibus usus Analysis indeterminatae in geometricis disquisitionibus egregie illustratur. Huc pertinent variae illae solutiones *Eulerianae* problematis de inveniendo triangulo, in quo rectae ex angulis eductae et latera opposita bisecantes sint rationales; investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum a centro gravitatis rationaliter exprimantur, et alia. Quin etiam problema de triangulo, cujus area rationaliter exprimatur, jam saepius atque variis modis solutum reperitur. His disquisitionibus problema in titulo expositum adjicere eo minus dubito, quod istud

Digitized by Google

problema, quatenus quidem omnibus quatuor conditionibus simul est satisfaciendum, a nemine adhuc, quantum quidem mihi innotuit, tractatum fuit.

§. 2. Sint latera trianguli a, b, c, perpendicula autem in latera demissa designentur litteris A, B, C, rectae vero angulos bisecantes litteris α, β, γ, et area trianguli indicetur littera S, ita ut habeamus perpendicula:

$$A = \frac{2S}{a},\quad B = \frac{2S}{b},\quad C = \frac{2S}{c},$$

pro quibus rationaliter exprimendis sufficiet expressionem areae:

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}},$$

rationalem effecisse. Prima igitur conditio adimplenda haec est, ut fiat expressio:

$$\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} = \square.$$

§. 3. Ad hoc efficiendum ponatur brevitatis gratia:

$$b + c - a = 2f,$$
$$a + c - b = 2g,$$
$$a + b - c = 2h,$$

eritque:

$$a + b + c = 2(f + g + h)$$

et jam ad quadratum reducenda est haec formula multo simplicior:

$$(f + g + h) fgh = \square.$$

Statuatur nunc $f = pq$, $g = qr$ et $h = pr$, eritque area:

$$S = pqr\sqrt{pq + pr + qr}$$

atque prima conditio pro rationalitate perpendiculorum A, B, C, postulat ut sit:

$$pq + pr + qr = \square.$$

§. 4. Pro altera conditione rectarum α, β, γ, angulos bisecantium, cum sit:

$$\alpha = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c};$$
$$\beta = \frac{\sqrt{ac(a+c+b)(a+c-b)}}{a+c};$$
$$\gamma = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b};$$

statuatur, ut supra fecimus:

$$\text{I. } b + c - a = 2f;$$
$$\text{II. } a + c - b = 2g;$$
$$\text{III. } a + b - c = 2h;$$

ita ut sit, addendo II et III, I et III, I et II:

$$a = g + h = qr + pr;$$
$$b = f + h = pq + pr;$$
$$c = f + g = pq + qr;$$

quibus substitutis habebimus:

$$\alpha = \frac{2pq\sqrt{(p+r)(q+r)(pq+pr+qr)}}{2pq+pr+qr};$$
$$\beta = \frac{2qr\sqrt{(p+q)(p+r)(qr+pq+pr)}}{2qr+pq+pr};$$
$$\gamma = \frac{2pr\sqrt{(q+r)(p+q)(pr+qr+pq)}}{2pr+qr+pq}.$$

§. 5. Cum autem prior conditio jam postulaverit ut sit:

$$pq + pr + qr = \square,$$

ponatur hoc quadratum:

Digitized by Google

$$pq + pr + qr = ss.$$

atque habimus:

$$\alpha = \frac{2pqs}{pq + ss} \sqrt{(p + r)(q + r)};$$
$$\beta = \frac{2qrs}{qr + ss} \sqrt{(q + p)(r + p)};$$
$$\gamma = \frac{2prs}{pr + ss} \sqrt{(r + q)(p + q)};$$

quae formulae quo quadrata fiant tantum requiritur ut sit:

$$(p + r)(q + r) = rr + ss = \Box.$$
$$(q + p)(r + p) = pp + ss = \Box,$$
$$(r + q)(p + q) = qq + ss = \Box,$$

§. 6. Ad hoc praestandum statuatur porro:

$$p = \mathfrak{a}s; \quad q = \mathfrak{b}s; \quad r = \mathfrak{c}s,$$

fierique debebit:

$$1 + \mathfrak{a}\mathfrak{a} = \Box,$$
$$1 + \mathfrak{b}\mathfrak{b} = \Box.$$
$$1 + \mathfrak{c}\mathfrak{c} = \Box,$$

et cum posuerimus:

$$pq + pr + qr = ss,$$

erit nunc:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c})ss = ss,$$

unde concluditur fieri debere:

$$\mathfrak{c} = \frac{1 - \mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}},$$

hinc autem fit:

$$1 + \mathfrak{c}\mathfrak{c} = 1 + \mathfrak{a}\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b} = (1 + \mathfrak{a}\mathfrak{a})(1 + \mathfrak{b}\mathfrak{b})$$

ideoque erit $1 + \mathfrak{cc} = \square$, uti requiritur, dummodo $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ita accipiantur, ut fiat $1 + \mathfrak{aa} = \square$ et $1 + \mathfrak{bb} = \square$. Tum autem latera trianguli erunt:

$$a = pr + qr = pq + pr + qr - pq = (1 - \mathfrak{ab}) s^2,$$
$$b = pq + pr = pq + pr + qr - qr = (1 - \mathfrak{bc}) s^2,$$
$$c = pq + qr = pq + pr + qr - pr = (1 - \mathfrak{ac}) s^2,$$

sive deprimendo ubique per factorem communem s^2, erit:

$$a = 1 - \mathfrak{ab},$$
$$b = 1 - \mathfrak{bc},$$
$$c = 1 - \mathfrak{ac}.$$

§. 7. Tota igitur problematis solutio sequenti modo se habet: Sumantur pro lubitu litterae $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$, ex iisque formentur fractiones:

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{rr} - \mathfrak{qq}}{2\mathfrak{pq}},$$
$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{rr} - \mathfrak{ss}}{2\mathfrak{rs}},$$

atque ex his valoribus quaeratur:

$$\mathfrak{c} = \frac{1 - \mathfrak{ab}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}},$$

tum autem latera trianguli, in quo tam perpendicula ex angulis in latera opposita demissa, quam rectae angulos bisecantes, sunt rationales, ita determinabuntur:

$$a = (1 - \mathfrak{ab})\, \Delta;$$
$$b = (1 - \mathfrak{bc})\, \Delta;$$
$$c = (1 - \mathfrak{ac})\, \Delta,$$

ubi per Δ multiplicatorem quendam communem intelligi

mus, ita sumendum ut fractiones evitentur, siquidem solutio in integris desideretur.

§. 8. Sit, ut rem aliquot exemplis illustremus, $\mathfrak{p} = 2$; $\mathfrak{q} = 1$, $\mathfrak{r} = 2$, $\mathfrak{s} = 1$, eritque $\mathfrak{a} = \frac{3}{4}$, $\mathfrak{b} = \frac{3}{4}$, $\mathfrak{c} = \frac{7}{24}$, unde latera trianguli erunt:

$$a = \tfrac{7}{16}\Delta; \quad b = \tfrac{25}{32}\Delta; \quad c = \tfrac{25}{32}\Delta.$$

Hinc sumto $\Delta = 32$, erit in integris:

$$a = 14; \quad b = 25, \quad c = 25,$$

unde porro invenitur area trianguli $S = 168$, tum vero perpendicula:

$$A = 24, \quad B = \tfrac{336}{25}, \quad C = \tfrac{336}{25},$$

denique rectae bisantes:

$$\alpha = 24, \quad \beta = \tfrac{560}{39}, \quad \gamma = \tfrac{560}{39}.$$

§. 9. Sumatur $\mathfrak{p} = 2$, $\mathfrak{q} = 1$, $\mathfrak{r} = 3$ et $\mathfrak{s} = 2$, eritque:

$$\mathfrak{a} = \tfrac{3}{4}, \quad \mathfrak{b} = \tfrac{5}{12}, \quad \mathfrak{c} = \tfrac{33}{56},$$

tum vero sumto $\Delta = 224$, latera trianguli quaesiti erunt:

$$a = 154, \quad b = 169, \quad c = 125,$$

perpendicula autem:

$$A = 120, \quad B = \tfrac{18480}{169}, \quad C = \tfrac{3696}{25},$$

rectae denique bisecantes:

$$\alpha = \tfrac{2600}{21}, \quad \beta = \tfrac{30800}{279}, \quad \gamma = \tfrac{48048}{323}.$$

§. 10. Sit $\mathfrak{p} = 3$, $\mathfrak{q} = 1$, $\mathfrak{r} = 3$ et $\mathfrak{s} = 2$, unde habebimus:

$$\mathfrak{a} = \tfrac{4}{3}, \quad \mathfrak{b} = \tfrac{5}{12}, \quad \mathfrak{c} = \tfrac{16}{63},$$

sumtoque $\Delta = 189$ latera trianguli problemati satisfacientis erunt:

$$a = 84, \quad b = 169, \quad c = 125,$$

perpendicula vero:

$$A = 120, \quad B = \tfrac{10080}{169}, \quad C = \tfrac{2016}{25},$$

et rectae bisecantes:

$$\alpha = \tfrac{975}{7}, \quad \beta = \tfrac{12600}{209}, \quad \gamma = \tfrac{26208}{253},$$

§. 11. Sit $\mathfrak{p} = 5$, $\mathfrak{q} = 3$, $\mathfrak{r} = 3$, $\mathfrak{s} = 1$, atque ex his valoribus oriuntur sequentes:

$$\mathfrak{a} = \tfrac{8}{15}, \quad \mathfrak{b} = \tfrac{4}{3}, \quad \mathfrak{c} = \tfrac{13}{84},$$

sumtoque $\Delta = 315$, erunt latera trianguli conditionibus problematis satisfacturi in integris:

$$a = 91, \quad b = 250, \quad c = 289,$$

tum vero perpendicula:

$$A = 240, \quad B = \tfrac{2184}{25}, \quad C = \tfrac{21840}{289},$$

et rectae bisecantes:

$$\alpha = \tfrac{20400}{77}, \quad \beta = \tfrac{4641}{38}, \quad \gamma = \tfrac{27300}{341}.$$

§. 12. Hoc modo innumera triangula inveniri poterunt problematis nostri conditionibus satisfacientia. En adhuc aliquot solutiones simpliciores:

a	b	c
231	250	289
399	338	289
429	350	625

Digitized by Google

Additamentum
de triangulo, in quo rectae ex angulis eductae et latera opposita bisecantes sunt rationales.

§. 13. Istud problema jam olim ab *Eulero* fuit solutum, quippe cujus solutio legitur in Tomo XVIII Nov. Comm. In Tomo autem XII Nov. Act. reperitur ejusdem Geometrae investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur. Memoratae solutiones binorum problematum, vel, ut rectius dicam, unius ejusdemque problematis, vix quicquam in hoc argumento desiderandum relinquunt; interim tamen sequentem solutionem eorundem problematum, ob simplicitatem et elegantiam suam, non omnino ingratam aut superfluam futuram confido.

§. 14. Sint latera trianguli quaesiti $2a$, $2b$, $2c$, rectae vero latera bisecantes sint α, β, γ, fierique debebit:

$$\text{I. } 2bb + 2cc - aa = \alpha\alpha;$$
$$\text{II. } 2cc + 2aa - bb = \beta\beta;$$
$$\text{III. } 2aa + 2bb - cc = \gamma\gamma.$$

§. 15. Hinc statim fit:

$$\text{I} - \text{II} = \alpha\alpha - \beta\beta = 3bb - 3aa.$$

Statuatur igitur:

$$\alpha + \beta = 3\left(\frac{r-s}{r+s}\right)(b+a);$$
$$\alpha - \beta = \left(\frac{r+s}{r-s}\right)(b-a);$$

fietque summa quadratorum:

$$2\alpha\alpha + 2\beta\beta = 9\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 (b+a)^2 + \left(\frac{r+s}{r-s}\right)^2 (b-a)^2.$$

Est vero:

$$2\alpha\alpha + 2\beta\beta = 2bb + 2aa + 8cc,$$

ideoque:

$$8cc = 9\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 (b+a)^2 + \left(\frac{r+s}{r-s}\right)^2 (b-a)^2 - 2bb - 2aa.$$

Deinde vero habebimus:

$$8 \times \text{III} = 8\gamma\gamma = 16aa + 16bb - 8cc,$$

sive, substituto loco $8cc$ valore invento:

$$8\gamma\gamma = 18aa + 18bb - 9\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 (b+a)^2 - \left(\frac{r+s}{r-s}\right)^2 (b-a)^2.$$

§. 16. Statuatur nunc:

$$b + a = \tfrac{1}{3}(r+s)(p+q);$$
$$b - a = (r-s)(p-q);$$

ita ut sit:

$$aa + bb = \tfrac{1}{18}(r+s)^2 (p+q)^2 + \tfrac{1}{2}(r-s)^2 (p-q)^2,$$

qui valor si in postrema aequatione §^i praecedentis substituatur, nec non in aequatione pro $8cc$ inventa, fiet:

$$\frac{\gamma\gamma}{(r-s)^2} = pp + qq + 2pq\left(\frac{3rs - rr - ss}{(r-s)^2}\right);$$
$$\frac{9cc}{(r+s)^2} = pp + qq + 2pq\left(\frac{rr + ss - 7rs}{(r+s)^2}\right);$$

unde intelligitur membra ad dextram posita quadrata fie debere.

§. 17. Quod si igitur brevitatis gratia ponatur:

$$m = \frac{3rs - rr - ss}{(r-s)^2};$$
$$n = \frac{rr + ss - 7rs}{(r+s)^2};$$

fieri debebit:

$$pp + qq + 2mpq = \square;$$
$$pp + qq + 2npq = \square;$$

Utrique conditioni satisfit, sumendo:

$$p = 4(m + n);$$
$$q = (m - n)^2 - 4;$$

tum autem, extracta radice, fiet:

$$\frac{\gamma}{r - s} = (m - n)(3m + n) - 4;$$
$$\frac{3c}{r + s} = (n - m)(3n + m) - 4.$$

§. 18. Facillima vero solutio haec est: Cum sit:

$$m = \frac{3rs - rr - ss}{(r - s)^2};$$
$$n = \frac{rr + ss - 7rs}{(r + s)^2};$$

si utrique addatur fractio $\frac{5}{4}$, erit:

$$m + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{r + s}{r - s}\right)^2;$$
$$n + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}\left(\frac{r - s}{r + s}\right)^2;$$

quorum igitur productum dabit:

$$mn + \frac{5}{4}(m + n) + \frac{25}{16} = \frac{9}{16},$$

ideoque, sublatis utrinque $\frac{9}{16}$, fiet:

$$mn + \frac{5}{4}(m + n) + 1 = 0,$$

quamobrem quoque sumi poterit:

$$p = 4 \text{ et } q = m + n + 5,$$

unde fit:

$$\frac{\gamma}{r - s} = 3m - n + 5;$$
$$\frac{3c}{r + s} = 3n - m + 5.$$

Si enim in valoribus pro $\frac{\gamma\gamma}{(r-s)^2}$ et $\frac{9cc}{(r+s)^2}$, supra §. 16 inventis, loco p et q illi valores substituantur et

$$16\left(mn + \tfrac{5}{4}(m+n) + 1\right) = 0$$

subtrahatur, remanebunt quadrata:

$$\frac{\gamma\gamma}{(r-s)^2} = (3m - n + 5)^2;$$
$$\frac{9cc}{(r+s)^2} = (3n - m + 5)^2.$$

§. 19. Solutio igitur nostra ita se habet: Sumantur pro lubitu valores r et s, ex quibus fiet:

$$m = \frac{3rs - rr - ss}{(r-s)^2} \quad \text{et} \quad n = \frac{rr + ss - 7rs}{(r+s)^2};$$

tum vero erit:

$$p = 4 \quad \text{et} \quad q = m + n + 5,$$

quibus inventis habebimus:

$$b + a = \tfrac{1}{3}(r+s)(p+q);$$
$$b - a = (r-s)(p-q);$$

unde innotescunt latera a et b. Tum vero quoque determinantur:

$$\alpha + \beta = 3\left(\frac{r-s}{r+s}\right)(b+a);$$
$$\alpha - \beta = \left(\frac{r+s}{r-s}\right)(b-a);$$

unde innotescunt rectae bisecantes α et β. Denique autem inveniemus tertium latus:

$$c = \tfrac{1}{3}(r+s)(3n - m + 5)$$

et tertiam rectam bisecantem:

$$\gamma = (r-s)(3m - n + 5).$$

Digitized by Google

§. 20. Sumatur $r = 3$ et $s = 1$, eritque $m = -\frac{1}{4}$, $n = -\frac{11}{16}$; tum vero $p = 4$ et $q = \frac{65}{16}$, porro $b + a = \frac{43}{4}$ et $b - a = -\frac{1}{8}$; praeterea $\alpha + \beta = \frac{129}{8}$ et $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$; hinc $a = \frac{87}{16}$, $b = \frac{85}{16}$, $c = \frac{68}{16}$; tum vero $\alpha = \frac{127}{16}$, $\beta = \frac{131}{16}$, $\gamma = \frac{158}{16}$; ita ut in integris habeamus:

$$a = 87, \quad b = 85, \quad c = 68;$$
$$\alpha = 127, \quad \beta = 131, \quad \gamma = 158.$$

Eosdem valores habet *Eulerus* (Nov. Comment. T. XVIII. pag. 179).

§. 21. Sumatur $r = 3$ et $s = 2$, eritque $m = 5$ et $n = -\frac{29}{25}$; porro $p = 4$ et $q = \frac{221}{25}$; tum vero $b + a = \frac{535}{25}$, $b - a = -\frac{121}{25}$; hinc $\alpha + \beta = \frac{321}{25}$ et $\alpha - \beta = -\frac{605}{25}$; unde sequentes valores in integris emergunt:

$$a = 328, \quad b = 207, \quad c = 145,$$
$$\alpha = 142, \quad \beta = 463, \quad \gamma = 529.$$

§. 22. Sint $r = 4$ et $s = 3$, eritque $m = 11$, $n = -\frac{59}{49}$; $p = 4$, $q = \frac{725}{49}$; porro $b + a = \frac{2149}{49}$; $b - a = -\frac{529}{49}$; $\alpha + \beta = \frac{921}{49}$; $\alpha - \beta = -\frac{3703}{49}$; unde in integris:

$$a = 1339, \quad b = 810, \quad c = 1099;$$
$$\alpha = 1391, \quad \beta = 2312, \quad \gamma = 1921.$$

§. 23. Sit $r = 4$, $s = -1$ et prodibunt sequentes valores:

$$a = 463, \; b = 142, \; c = 529;$$
$$\alpha = 621, \; \beta = 984, \; \gamma = 435.$$

Hocque modo quotquot lubuerit triangula investigari poterunt, in quibus rectae ex angulis eductae et latera opposita bisecantes, ideoque etiam distantiae angulorum a centro gravitatis, rationaliter exprimantur.

Digitized by Google

INTEGRATIO FORMULAE:

$$\partial y = \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}.$$

AUCTORE

C. F. KAUSLER.

Conventui exhib. die 10 Januarii 1810.

Haec formula jam olim a summo viro *L. Eulero* in dissertatione: *Specimen integrationis obstrusissimae, hac formula:* $\partial y = \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ *contentae*, tractata est. Cum vero mihi, vires pro more solito in hujusmodi exercitationibus tentanti, nuper contigerit, hanc integrationem methodo simplici ac elegante absolvere, non praeter rem erit, solutionem meam calculi integralis cultoribus offerre. Caeterum illam, quam immortalis noster Geometra exhibuit, et quae sine dubio in Actis Academiae jam dudum publici juris facta est *), videre mihi nondum licuit. Ambas autem solutiones diversas esse ex eo suspicor, quod *Eulerus* suam obstrusissimam vocat, dum mea, casu forte, simplicissima est.

*) V. Nova Acta Tom. IX. pag. 98.

Ponatur scilicet $2x^2 - 1 = p^4$, ut sit $x = \frac{\sqrt{(p^4+1)}}{\sqrt{2}}$, $1 + x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{(p^4+1)}}{\sqrt{2}}$, et $\partial x = \sqrt{2}\,\frac{p^3\partial p}{\sqrt{(p^4+1)}}$, quibus valoribus substitutis, formula nostra differentialis evadit:

$$\partial y = \frac{2p^2\partial p}{p^4+1+\sqrt{2}\,.\,\sqrt{(p^4+1)}},$$

vel supra et infra per $p^4+1-\sqrt{2}\,.\,\sqrt{(p^4+1)}$ multiplicando:

$$\partial y = \frac{2p^2\partial p}{p^4-1} - 2\sqrt{2}\,.\,\frac{p^2\partial p}{(p^4-1)\sqrt{(p^4+1)}},$$

ubi pars prior, nullum radicale amplius involvens, per regulas notas facillime integrari potest. Quo nunc in parte posteriori irrationalitatem pariter tollamus, fiat $p = \sqrt{\text{tang.}\Phi}$, vel $\Phi = \text{Arc.tang.}\,p^2$, hinc erit $\sqrt{(p^4+1)} = \sec.\Phi = \frac{1}{\cos.\Phi}$, et si omnia per sinus et cosinus exprimantur, formula $-2\sqrt{2}\,.\,\frac{p^2\partial p}{(p^4-1)\sqrt{(p^4+1)}}$ ob $\partial p = \frac{\partial\Phi}{2\cos.\Phi^2\sqrt{\frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}}}$ abit in: $-\sqrt{2}\,.\,\frac{\partial\Phi\sqrt{\sin.\Phi\cos.\Phi}}{1-2\cos.\Phi^2}$. Cum vero $1-2\cos.\Phi^2 = -\cos.\Phi$ et $\sqrt{\sin.\Phi\cos.\Phi} = \frac{\sqrt{\sin.2\Phi}}{\sqrt{2}}$, erit porro:

$$-2\sqrt{2}\,\frac{p^2\partial p}{(p^4-1)\sqrt{(p^4+1)}} = \frac{\partial\Phi\sqrt{\sin.2\Phi}}{\cos.2\Phi} = \frac{\partial\Phi\cos.2\Phi\sqrt{\sin.2\Phi}}{1-\sin.2\Phi^2}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sin.2\Phi\sqrt{\sin.2\Phi}}{1-\sin.2\Phi^2}.$$

Hic jam irrationalitas penitus evanescet, ponendo $\sin.2\Phi = u^2$, vel $u = \sqrt{\sin.2\Phi} = \sqrt{\sin.2\,\text{Arc.tang.}\,p^2}$. Substitutis nempe pro $\partial.\sin.2\Phi$, $\sqrt{\sin.2\Phi}$, $1-\sin.2\Phi^2$ valoribus: $2u\partial u$, u, $1-u^4$, nanciscimur: $-\frac{2\sqrt{2}}{(p^4-1)\sqrt{(p^4+1)}} = \frac{u^2\partial u}{1-u^4}$. Hinc ∂y erit $= \frac{2p^2\partial p}{p^4-1} + \frac{u^2\partial u}{1-u^4}$, vel $\partial y = \frac{u^2\partial u}{1-u^4} - \frac{2p^2\partial p}{1-p^4}$. Superest, ut integratio actu instituatur, quod commodissime fit, denominatores in factores $1+u^2$, $1+u$, $1-u$,

Digitized by Google

$1 + p^2$, $1 + p$, $1 - p$ resolvendo, hoc enim modo per regulas notissimas prodit:

$$\int \frac{u^2 \partial u}{1 - u^4} = \frac{1}{2} \log. \left(\frac{1+u}{1-u}\right) - \text{Arc. tang. } u, \quad \text{et}$$

$$\int \frac{p^2 \partial p}{1 - \partial p} = \frac{1}{2} \log. \left(\frac{1+p}{1-p}\right) - \text{Arc. tang. } p.$$

Proinde integrale quaesitum erit:

$$y = \frac{1}{2} \log. \left(\frac{1+u}{1-u}\right) - \text{Arc. tang. } u - \log. \left(\frac{1+p}{1-p}\right) + 2 \text{ Arc. tang. } p,$$

vel tandem:

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{1}{2} \log. \left[\frac{1 + \sqrt{\sin. 2 \text{ Arc. tang } \sqrt{(2x^2-1)}}}{1 - \sqrt{\sin. 2 \text{ Arc. tang. } \sqrt{(2x^2-1)}}}\right]$$

$$- \text{Arc. tang. } \sqrt{\sin. 2 \text{ Arc. tang. } \sqrt{(2x^2-1)}}$$

$$- \text{Log.} \left(\frac{1 + \sqrt[4]{(2x^2-1)}}{1 - \sqrt[4]{(2x^2-1)}}\right)$$

$$+ 2 \text{ Arc. tang. } \sqrt[4]{(2x^2-1)}$$

$$+ \text{Const.}$$

quam expressionem in alias adhuc formas transfundere possemus.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE ET GÉNÉRALE DES SÉRIES QUI EXPRIMENT LES SINUS ET COSINUS DES ANGLES MULTIPLES PAR LES SINUS ET COSINUS DES ANGLES SIMPLES.

PAR

C. F. KAUSLER.

Présenté à la Conférence le 10 Janv. 1810.

§. 1. On sait que:

$$\sin. m\Phi = \frac{m}{1}\sin.\Phi - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}\sin.\Phi^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1.2.3.5}\sin.\Phi^5$$

$$- \ldots\ldots \pm \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots\ldots(m^2-(m-2)^2)}{1.2.3\ldots\ldots m}\sin.\Phi^m;$$

$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi\,[1 - (\frac{m^2-1}{2})\sin.\Phi^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4}\sin.\Phi^4$$

$$- \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2.3.4.5}\sin.\Phi^6$$

$$+ \ldots\ldots \pm \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{2.3.4\ldots(m-1)}\sin.\Phi^{m-1}],$$

pour les cas où *m* représente un nombre impair, et

$$\sin. m\Phi = \cos.\Phi\,[\frac{m}{1}\sin.\Phi - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3}\sin.\Phi^3 + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\sin.\Phi^5$$

$$- \ldots\ldots \pm \frac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{1.2.3\ldots(m-1)}\sin.\Phi^{m-1}];$$

$$\cos. m\Phi = 1 - \frac{m^2}{2}\sin.\Phi^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4}\sin.\Phi^4$$

$$- \ldots\ldots \pm \frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{2.3.4\ldots m}\sin.\Phi^m,$$

pour les cas, où *m* représente un nombre pair.

Ce sont ces séries que je me propose de démontrer d'une manière générale et rigoureuse, en n'employant que

Digitized by Google

les premiers principes de la Trigonometrie et de l'Analyse. Peutêtre que l'illustre Académie, au jugement de laquelle j'ai l'honneur de soumettre cette démonstration, la trouvera plus simple et plus élémentaire qu'aucune de celles qu'on en a données jusqu'ici, et par conséquent propre à remplir une lacune qui se trouve encore dans nos Traités de Trigonométrie.

§. 2. Les seules formules dont nous aurons besoin dans la suite, sont:

1) $\sin. (a+b) = \sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b$,

2) $\cos. (a+b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b$,

le rayon étant $= 1$.

3) $\sin. 2a = 2 \sin. a \cos. a$,

4) $\cos. 2a = 1 - 2 \sin. a^2$.

Dont les deux dernières se déduisent immédiatement des deux premières, en y mettant $b = a$.

Proposition I.

§. 3. Si pour un nombre impair m quelconque les séries $\sin. m\Phi$ et $\cos. m\Phi$ prennent les formes:

$$A \sin. \Phi + B \sin. \Phi^3 + C \sin. \Phi^5 + \ldots + K \sin. \Phi^m$$

$$\text{et } \cos. \Phi [1 + a \sin. \Phi^2 + b \sin. \Phi^4 + \ldots + k \sin. \Phi^{m-1}]$$

les expressions pour $\sin. (m+2)\Phi$ et $\cos. (m+2)\Phi$, prendront les formes:

$$A'\sin.\Phi+B'\sin.\Phi^3+C'\sin.\Phi^5+\ldots.+K'\sin.\Phi^m+L'\sin\Phi^{m+2}$$

et $\cos.\Phi[1+a'\sin.\Phi^2+b'\sin.\Phi^4+\ldots.+k'\sin.\Phi^{m-1}+l'\sin.\Phi^{m+1}]$, les coëfficiens A, B, C, etc., a, b, c, etc., A′, B′, C′, etc., a', b', c', etc. représentant des quantités indépendantes de sin. Φ et cos. Φ.

Démonstration.

Nous avons (§. 2. N°. 1):

$$\sin(m+2)\Phi=\sin(m\Phi+2\Phi)=\sin.m\Phi\cos.2\Phi+\cos.m\Phi\sin.2\Phi.$$

Mettant maintenant pour $\sin.m\Phi$, $\cos 2\Phi$, $\cos.m\Phi$, $\cos.2\Phi$, les valeurs: $A\sin.\Phi+B\sin.\Phi^3+$ etc., $1-2\sin.\Phi^2$, $\cos.\Phi[1+a\sin.\Phi^2+b\sin.\Phi^4+$ etc.$]$ et $2\sin.\Phi\cos.\Phi$, il y aura:

$$\sin.(m+2)\Phi=(A\sin.\Phi+B\sin.\Phi^3+\ldots+K\sin.\Phi^m)(1-2\sin.\Phi^2)$$
$$+\cos.\Phi^2.\,2\sin.\Phi[1+a\sin.\Phi^2+b\sin.\Phi^4+\ldots+k\sin.\Phi^{m-1}],$$

et partant aussi, à cause de $\cos.\Phi^2=1-\sin.\Phi^2$,

$$\sin.(m+2)\Phi=(A\sin.\Phi+B\sin.\Phi^3+\ldots+K\sin.\Phi^m)(1-2\sin.\Phi^2)$$
$$+(2\sin.\Phi-2\sin.\Phi^3)[1+a\sin.\Phi^2+b\sin.\Phi^4+\ldots\ldots+k\sin.\Phi^{m-1}].$$

Or par la multiplication des facteurs:

$$A\sin.\Phi+B\sin.\Phi^3+\text{etc. et }1-2\sin.\Phi^2,$$

on obtient une série, dont les termes, abstraction faite des coëfficiens et de leurs signes, croissent selon les puissances impaires de sin. Φ, le premier étant sin. Φ et le dernier $\sin.\Phi^{m+2}$, et par la multiplication des facteurs

$$2\sin.\Phi-2\sin.\Phi^3\text{ et }1+a\sin.\Phi^2+\text{etc.},$$

il résulte une série dont les termes croissent selon les mêmes puissances de sin. Φ, le premier terme étant sin. Φ et le dernier sin. $^{m+2}$. Donc la somme de ces produits, ou sin. $(m+2)\Phi$, aura nécessairement la forme :

$$A' \sin.\Phi + B' \sin.\Phi^3 + \ldots + K' \sin.\Phi^m + L' \sin.\Phi^{m+2}.$$

Par un raisonnement semblable on se persuade que puisque [§. 2. N°. 2] :

$$\cos.(m+2)\Phi = \cos.(m\Phi + 2\Phi) = \cos.m\Phi.\cos.2\Phi - \sin.m\Phi \sin.2\Phi$$
$$= [1 + a \sin.\Phi^2 + \ldots + k \sin.\Phi^{m-1}] (1 - 2 \sin.\Phi^2) \cos.\Phi$$
$$- (A \sin.\Phi + B \sin.\Phi^3 \ldots + K \sin.\Phi^m)\, 2 \sin.\Phi \cos.\Phi,$$

cette expression sera de la forme :

$$\cos.\Phi [1 + a' \sin.\Phi^2 + b' \sin.\Phi^4 + \ldots + k' \sin.\Phi^{m-1} + l' \sin.\Phi^{m+1}].$$

Corollaire.

§. 4. Comme pour le cas $m = 1$, sin. $m\Phi$ et cos. $m\Phi$ sont de la forme supposee dans la proposition précédente, cette proposition est donc vraie pour le cas $m + 2 = 3$, par conséquent aussi pour le cas $3 + 2 = 5$, et ainsi de suite, en sorte qu'en général nous aurons pour tous les m impairs :

$$\sin.m\Phi = A \sin.\Phi + B \sin.\Phi^3 + C \sin.\Phi^5 + \ldots + K \sin.\Phi^m$$
$$\cos.m\Phi = \cos.\Phi [1 + a \sin.\Phi^2 + b \sin \Phi^4 + \ldots + k \sin.\Phi^{m-1}].$$

Proposition II.

§. 5. Si m est un nombre impair quelconque, on aura $A = m$, et par conséquent :

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi + B \sin.\Phi^3 + \ldots + K \sin.\Phi^m.$$

Démonstration.

L'expression $\sin.(m+2)\Phi = \sin.m\Phi \cos.2\Phi + \cos.m\Phi \sin.2\Phi$, développée comme il a été dit §. 3, conduit à l'équation:

$$\sin.(m+2) = A' \sin.\Phi + B' \sin.\Phi^3 + \ldots + L' \sin.\Phi^{m+2},$$

le coëfficient A' du premier terme étant $= A + 2$. Or pour $m = 1$, on a $A = 1$, donc $A' = 3$. Donc puisque pour $m = 1$, il y a $A = 1$, et pour $m = 3$, $A = 3$, et qu'à chaque m, augmenté de deux unités, il répond un A augmenté du même nombre d'unités, on aura en général $A = m$ et $\sin. m\Phi = m \sin.\Phi + B \sin.\Phi^3 + C \sin.\Phi^5 + \text{etc.}$ expression pour laquelle nous mettrons dorénavant:

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi + A \sin.\Phi^3 + B \sin.\Phi^5 + \ldots + K \sin.\Phi^m.$$

Problème.

§. 6. Si, toujours dans la supposition $m = a'$ un nombre impair, les coëfficiens A, B, C etc., a, b, c, etc. des séries:

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi + A \sin.\Phi^3 + B \sin.\Phi^5 + \ldots + K \sin.\Phi^m,$$

$$\text{et } \cos. m\Phi = \cos.\Phi [1 + a \sin.\Phi^2 + b \sin.\Phi^4 + \ldots + k \sin.\Phi^{m-1}],$$

sont regardés comme connus, en déduire les valeurs de A', B', C' etc., a', b', c' etc. des expressions:

I) $\sin.(m+2)\Phi = (m+2) \sin.\Phi + A' \sin.\Phi^3 + B' \sin.\Phi^5 + \ldots + K' \sin.\Phi^m + L' \sin.\Phi^{m+2}$.

Digitized by Google

II) $\cos.(m+2)\Phi = \cos.\Phi\,[1 + a'\sin.\Phi^2 + b'\sin.\Phi^4$
$+ \ldots + k'\sin.\Phi^{m-1} + l'\sin.\Phi^{m+1}]$.

Solution.

I. $\sin.(m+2)\Phi = (m+2)\sin.\Phi + (A-2m+2a-2)\sin.\Phi^3$
$+(B-2A+2b-2a)\sin.\Phi^5 + (C-2B+2c-2b)\sin.\Phi^7$
$+(D-2C+2d-2c)\sin.\Phi^9 + \text{etc.}$

par conséquent :

$A' = A - 2m + 2a - 2$,
$B' = B - 2A + 2b - 2a$,
$C' = C - 2B + 2c - 2b$,
$D' = D - 2C + 2d - 2c$,
etc.

et II. $\cos.(m+2)\Phi = \cos.\Phi\,(1-2\sin.\Phi^2)$
$[1 + a\sin.\Phi^2 + b\sin.\Phi^4 + \ldots + k\sin.\Phi^{m-1}]$
$-2\sin.\Phi\cos.\Phi\,[m\sin.\Phi + A\sin.\Phi^3 + B\sin.\Phi^5 + \ldots + K\sin.\Phi^m]$

équation qui, étant développée, conduit aux expressions:

$a' = a - 2 - 2m$,
$b' = b - 2a - 2A$,
$c' = c - 2b - 2B$,
$d' = d - 2c - 2C$,
etc.

Corollaire 1.

§. 7. Si $m = 1$, on a: $\begin{matrix} A = 0 & B = 0 & \text{etc.} \\ a = 0, & b = 0 & \text{etc.} \end{matrix}$,

donc $A' = -2m - 2 = -4$,
et $a' = -2 - 2m = -4$.

Mettant maintenant, pour $m = 3$, $A = -4$, $a = -4$, on obtient $A' = -20$, $a' = -12$, $B' = +16$, $b' = +16$, par conséquent :

$$\sin.(1+2)\Phi = 3 \sin.\Phi - 4 \sin.\Phi^3$$
$$\cos.(1+2)\Phi = \cos.\Phi \,[1 - 4 \sin.\Phi^2]$$
et $$\sin.(3+2)\Phi = 5 \sin.\Phi - 20 \sin.\Phi^3 + 16 \sin.\Phi^5$$
$$\cos.(3+2)\Phi = \cos.\Phi \,[1 - 12 \sin.\Phi^2 + 16 \sin.\Phi^4]$$

et ainsi de suite.

Corollaire 2.

§. 8. La valeur $A' = A - 2m + 2a - 2$ est toujours négative, si A' et a', résultant de $m = 1$, le sont. Or pour $m = 1$ on a $A = 0$, $a = 0$, $A' = -4$, et $a' = -4$, donc tous les coëfficiens de $\sin.\Phi^3$ et $\sin.\Phi^2$ dans les séries : $\sin. m\Phi = m \sin.\Phi + A \sin.\Phi^3 + \text{etc.}$

et $\cos. m\Phi = \cos.\Phi \,[1 + a \sin.\Phi^2 + \text{etc.}]$

sont négatifs. Par conséquent nos expressions générales prennent les formes :

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi - A \sin.\Phi^3 + B \sin.\Phi^5 + C \sin.\Phi^7 + \ldots + K \sin.\Phi^m$$
$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi \,[1 - a \sin.\Phi^2 + b \sin.\Phi^4 + c \sin.\Phi^6 + \ldots + k \sin.\Phi^{m-1}].$$

Corollaire 3.

§. 9. Si $m = 3$, on a $\begin{matrix} B = 0, & B' = -2A - 2a \\ b = 0, & b' = -2A - 2a \end{matrix}$, et comme A et a sont négatifs, les valeurs de B' et b'

Digitized by Google

seront positives. Par conséquent tous les coëfficiens des termes $B \sin.\Phi^5$ et $b \sin.\Phi^4$ pour tous les m impairs quelconques sont positifs.

Corollaire 4.

§. 10. Si $m = 5$, on a $C = 0$, $c = 0$, et $C' = C - 2B + 2c - 2b = -2B - 2b$, et $c' = c - 2b - 2B = -2B - 2b$; et comme B et b sont positifs, il est évident que les valeurs de C' et c' seront négatives. Donc ces valeurs sont aussi négatives pour tous les m impairs plus grands que 5.

Corollaire 5.

§. 11. Ces raisonnemens peuvent être continués aussi loin qu'on voudra. Le résultat en est, que dans les expressions de $\sin m\Phi$ et $\cos. m\Phi$ les signes des différens termes sont alternativement positifs et négatifs. Sans connoître A, B, C, etc. a, b, c, etc. nous savons donc que:

$$\sin. m\Phi = m\sin.\Phi - A\sin.\Phi^3 + B\sin.\Phi^5 - C\sin.\Phi^7 + \ldots \pm K\sin.\Phi^m$$

$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi[1 - a\sin.\Phi^2 + b\sin.\Phi^4 - c\sin.\Phi^6 + \ldots \pm k\sin.\Phi^{m-1}].$$

Proposition III.

§. 12. Si dans les expressions:

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi - A \sin.\Phi^3 + \text{etc.}$$

$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi[1 - a \sin.\Phi^2 + \text{etc.}],$$

le coëfficient $-A$, pour une certaine valeur de m, est

de la forme: $-\frac{m(m^2-1)}{1\cdot2\cdot3}$, et $-a$ de la forme: $-\frac{(m^2-1)}{2}$, A' et a' dans les expressions:

$$\sin.(m+2)\Phi = (m+2)\sin.\Phi - A'\sin.\Phi^3 + \text{etc.}$$

$$\cos.(m+2)\Phi = \cos.\Phi\,[1 - a'\sin.\Phi^2 + b'\sin.\Phi^4 - \text{etc.}],$$

seront d'une forme semblable; c'est-à-dire il y aura:

$$-A' = -\frac{(m+2)((m+2)^2-1)}{1\cdot2\cdot3}$$

$$\text{et } -a = -\frac{(m+2)^2-1)}{2}.$$

Démonstration.

Il a été démontré (§. 6) que A' est $= A - 2m + 2a - 2$, et $a' = a - 2 - 2m$. A cause donc que A et a pour une certaine valeur de m sont supposés être $= -\frac{m(m^2-1)}{2}$ et $= -\frac{(m^2-1)}{2}$, nous aurons:

$$A' = -\frac{m(m^2-1)}{1\cdot2\cdot3} - \frac{2(m^2-1)}{2} - 2m - 2 = -\frac{1}{1\cdot2\cdot3}(m^3 + 6m^2 + 11m + 6)$$

$$= -\frac{(m+2)(m^2+4m+3)}{1\cdot2\cdot3} = -\frac{(m+2)((m+2)^2-1)}{1\cdot2\cdot3},$$

$$\text{et } a' = -\frac{(m^2-1)-4-4m}{2} = -\frac{((m+2)^2-1)}{2}.$$

Corollaire.

§. 13, Nous avons fait voir (§. 7) qu'en mettant $m = 1$, on obtient $A' = -4$ et $a' = -4$, c'est-à-dire que les A et a, répondant a $\sin. 3\Phi$ et $\cos. 3\Phi$, sont $= -4$ et $= -4$. Or $A = -4 = -\frac{3\cdot(3^2-1)}{1\cdot2\cdot3}$ et $a = -4 = -\frac{(3^2-1)}{2}$. Donc puisque A et a, répondant à $m = 3$, sont de la forme $-\frac{m(m^2-1)}{1\cdot2\cdot3}$ et $-\frac{(m^2-1)}{2}$, il résulte de la proposition précédente que les A et a, ré-

Digitized by Google

pondant à $m = 3 + 2$, sont de la même forme. Cette loi, qui est vraie pour $m = 3 + 2$, est donc aussi vraie pour $m + 2 = 5 + 2$ etc. Par conséquent tous les A et a sont de cette forme. Donc en général il y aura:

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} \sin.\Phi^3 + B \sin.\Phi^5 - \text{etc.}$$
$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi \left[1 - \frac{(m^2-1)}{2} \sin.\Phi^2 + b \sin.\Phi^4 - \text{etc.}\right].$$

Proposition IV.

§. 14. Si dans les séries:

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} \sin.\Phi^3 + B \sin.\Phi^5 - \text{etc.}$$
$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi \left[1 - \frac{(m^2-1)}{2} \sin.\Phi^2 + b \sin.\Phi^4 - \text{etc.}\right],$$

pour une certaine valeur de m, les coëfficiens B et b sont respectivement de la forme: $+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}$ et $+\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4}$, les coëfficiens B' et b' des séries:

$$\sin.(m+2)\Phi = (m+2)\sin.\Phi - \frac{(m+2)((m+2)^2-1)}{1.2.3} \sin.\Phi^3 + B' \sin.\Phi^5 + \text{etc.}$$
$$\cos.(m+2)\Phi = \cos.\Phi\left[1 - \frac{((m+2)^2-1)}{2} \sin.\Phi^2 + b' \sin.\Phi^4 + \text{etc.}\right],$$

seront aussi de la même forme; c'est-à-dire il y aura:

$$B' = \frac{(m+2)((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)}{1.2.3.4.5}, \text{ et } b' = \frac{((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)}{2.3.4}.$$

Démonstration.

Nous avons fait voir (§. 6) que:

$$B' = B - 2A + 2b - 2A$$
$$\text{et } b' = b - 2A - 2a.$$

Or $A = -\frac{m(m^2-1)}{1.2.3}$, $a = -\frac{(m^2-1)}{2}$, et B et b sont supposés être $= \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}$ et $= \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4}$, par con-

séquent $B' = \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{2m(m^2-1)}{1\cdot2\cdot3} + \frac{2(m^2-1)(m^2-9)}{2\cdot3\cdot4} + \frac{2(m^2-1)}{2}$

$$= \frac{m^5+10m^4+30m^3+20m^2-31m-30}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

$$= \frac{(m+2)(m^2+4m+3)(m^2+4m-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

$$= \frac{(m+2)((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

et $b' = \frac{m^4+8m^3+14m^2-8m-15}{2\cdot3\cdot4}$

$$= \frac{((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)}{2\cdot3\cdot4}.$$

Corollaire. 1.

§. 15. Si $m=3$, nous avons trouvé (§. 7. Coroll. 1) que les valeurs de B' et b' dans les expressions de $\sin.5\Phi$ $\cos.5\Phi$ sont $+16$ et $+16$. Or $B=16=\frac{5\cdot(5^2-1)(5^2-3^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$, et $b=16=\frac{(5^2-1)(5^2-3^2)}{2\cdot3\cdot4}$, les coëfficiens B et b, répondant aux séries $\sin.5\Phi$ et $\cos.5\Phi$, sont donc de la forme:

$$\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} \text{ et } \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2\cdot3\cdot4}$$

Donc en vertu de la proposition que nous venons de démontrer, les coëfficiens B' et b', dans les expressions $\sin.(5+2)\Phi$ et $\cos.(5+2)\Phi$ seront de la même forme. Donc aussi les B' et b', répondant à $\sin.(7+2)\Phi$ et $\cos.(7+2)\Phi$, seront de cette forme. Par conséquent tous les B' et b', qui répondent à un nombre impair m quelconque, seront de cette forme, et nous avons en général:

$$\sin.m\Phi=\frac{m}{1}\sin.\Phi-\frac{m(m^2-1)}{1\cdot2\cdot3}\sin.\Phi^3+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\sin.\Phi^5-C\sin.\Phi^7+\text{etc.}$$

$$\cos.m\Phi=\cos.\Phi[1-\frac{(m^2-1)}{2}\sin.\Phi^2+\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2\cdot3\cdot4}\sin.\Phi^4-c\sin.\Phi^6+\text{etc.}]$$

Digitized by Google

Corollaire 2.

§. 16. Ces raisonnemens pourroient être étendus à tous les termes de notre série, qu'on trouveroit être :

$$\sin. m\Phi = m \sin.\Phi - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}\sin.\Phi^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin.\Phi^5 - \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6.7}\sin.\Phi^7 + \text{etc.}$$

$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi\left[1 - \frac{(m^2-1)}{2}\sin.\Phi^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4}\sin.\Phi^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2.3.4.5.6}\sin.\Phi^6 + \text{etc.}\right],$$

mais il y a un moyen plus court et plus directe, d'en prouver la loi générale, et nous allons l'exposer dans la proposition suivante.

Proposition V.

§. 17. Si dans les séries ;

$$\sin. m\Phi = m\sin.\Phi - A\sin.\Phi^3 + B\sin.\Phi^5 \ldots \mp P\sin.\Phi^{m-2} \pm Q\sin.\Phi^m$$

$$\cos. m\Phi = \cos.\Phi[1 - a\sin.\Phi^2 + b\sin.\Phi^4 \ldots \mp p\sin.\Phi^{m-3} \pm q\sin.\Phi^{m-1}]$$

$$\sin.(m+2)\Phi = (m+2)\sin.\Phi - A'\sin.\Phi^3 + B'\sin.\Phi^5 \ldots \mp P'\sin.\Phi^{m-2} \pm Q\sin.\Phi^m \mp R'\sin.\Phi^{m+2}$$

$$\cos.(m+2)\Phi = \cos.\Phi[1 - a'\sin.\Phi^2 + b'\sin.\Phi^4 \ldots \mp p'\sin.\Phi^{m-3} \pm q'\sin.\Phi^{m-1} \mp r'\sin.\Phi^{m+1}],$$

les termes :

$$\left.\begin{array}{l}\mp P\sin.\Phi^{m-2} \pm Q\sin.\Phi^m \\ \mp p\sin.\Phi^{m-3} \pm q\sin.\Phi^{m-1}\end{array}\right| \text{ et } \begin{array}{l}\mp P'\sin.\Phi^{m-2} \pm Q'\sin.\Phi^m \\ \mp p'\sin.\Phi^{m-3} \pm q'\sin.\Phi^{m-1},\end{array}$$

pour une certaine valeur du nombre impair m gardent la loi observée jusqu'ici, c'est-à-dire, si :

$$P = -\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-4)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(m-2)},$$

$$Q = +\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-4)^2)(m^2-(m^2-(m-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(m-2)(m-1)(m)},$$

$$p = -\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-4)^2)}{2\,.\,3\ldots\ldots(m-3)},$$

$$q = +\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{2\,.\,3\ldots\ldots(m-2)},$$

$$P' = -\frac{(m+2)((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-(m-4)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots(m-2)}$$

$$Q' = +\frac{(m+2)((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-(m-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots\ldots m},$$

$$p' = -\frac{((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-(m-4)^2)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots(m-3)},$$

$$q' = \frac{((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-(m-2)^2)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots(m)},$$

les coëfficiens R' et r' des termes $R' \sin.\Phi^{m+2}$ et $r' \sin.\Phi^{m+1}$ seront sujets à la même loi, c'est-à-dire on aura:

$$R' = \mp\frac{(m+2)((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-m^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(m+2)}$$

$$\text{et } r' = \mp\frac{((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-m^2)}{2\,.\,3\ldots\ldots(m+1)}.$$

Démonstration.

Les expressions du §. 6, appliquées au cas présent, donnent:

$$Q' = Q - 2P + 2q - 2p$$

$$\text{et } R' = 2Q + 2q.$$

Or $q = Q$, donc $R = 4Q$. Par conséquent:

$$R' = \frac{4m(m+1)(m+2)[(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(m+2)}$$

$$= \frac{(m+2)\,4m(m+1)[(m+1)(m-1)(m+3)(m-3)\ldots(2m-2)\,.\,2]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(m+2)}.$$

Cette expression est évidemment égale à celle-ci:

$$\frac{(m+2)[((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-(m-4)^2)((m+2)^2-(m-2)^2)((m+2)^2-m^2)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(m+2)}.$$

Digitized by Google

Car cette dernière se transforme aisément en :

$$\frac{(m+2)\{(m+1)(m+3)(m-1)(m+5)(m-3)(m+7)\ldots(2m-1)6.2m.4.(2m+2).2\}}{1.2.3\ldots\ldots(m+2)}.$$

Or, le facteur ♃, abstraction faite du dénominateur, est le produit de tous les termes ou nombres pairs $m+1$, $m+3$, $m+5$, ... $m+m-2$, formant une progression arithmétique croissante, et de tous les termes $m-1$, $m-3$, ... 6, 4, 2, formant une progression arithmétique décroissante. Ces mêmes facteurs se rencontrent aussi dans l'expression de R', où leur produit est représenté par le signe ♄. En outre le produit ♃ contient encore les facteurs $2m$, $2m+2$, dont le produit $=4m^2+4m$ $=4m(m+1)=$ au produit ♂. Donc :

$$R'=4Q=\frac{(m+2)((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-m^2)}{1.2.3\ldots\ldots(m+2)}.$$

On prouvera de même que :

$$r'=\frac{((m+2)^2-1)((m+2)^2-3^2)\ldots((m+2)^2-m^2)}{2.3.4\ldots\ldots4\,(m+1)}\ \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire.

§. 18. Il a été démontré §. 13 et 14 que la loi énoncée à la tête de cette dissertation (§. 1) a lieu pour les coëfficiens A, a, B, b, A', a', B', b'; mettant donc $A=P$, $B=Q$, $A'=P'$, $B'=Q'$, $C'=R'$, $a=p$, $b=q$, $a'=p'$, $b'=q'$, $c'=r'$, la démonstration précédente nous fait voir que cette même loi s'étend aussi aux coëfficiens C' et c' des termes $C'\sin.\Phi^7$ et $c'\sin.\Phi^6$, par conséquent

elle s'étend aux termes $\frac{D' \sin. \Phi^9}{d' \sin. \Phi^8}$ etc. Donc elle est générale, et il y a:

$$\sin. m\Phi = m \sin. \Phi - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} \sin. \Phi^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \sin. \Phi^5$$
$$- \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6.7} \sin. \Phi^7 + \text{etc.}$$
$$\cos. m\Phi = \cos. \Phi [1 - (\frac{m^2-1}{2}) \sin. \Phi^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4} \sin. \Phi^4$$
$$- \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2.3.4.5.6} \sin. \Phi^6 + \text{etc.}].$$

Scholie.

§. 19. Il est presque superflû d'ajouter, que des raisonnemens semblables appliqués au cas: $m =$ à un nombre pair quelconque, auroient conduit au résultat suivant:

$$\sin. m\Phi = \cos. \Phi [\frac{m}{1} \sin. \Phi - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3} \sin. \Phi^3$$
$$+ \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \sin. \Phi^5 - \text{etc.}$$
$$\cos. m\Phi = 1 - \frac{m^2}{2} \sin. \Phi^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4} \sin. \Phi^4$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5.6} \sin. \Phi^6 + \text{etc.}$$

Résultat qu'on pourroit aussi déduire du cas précédent, moyennant le développement de sin. $((m-1)\Phi + \Phi)$ et cos. $((m-1)\Phi + \Phi)$. Nos théorêmes énoncés au commencement de cette dissertation se trouvent donc démontrés généralement.

Digitized by Google

DÉMONSTRATION IMMÉDIATE D'UN THÉORÈME FONDAMENTAL D'*EULER* SUR LES POLYHÈDRES, ET EXCEPTIONS DONT CE THÉORÈME EST SUSCEPTIBLE.

PAR

M^r. L'HUILIER.

Présenté à la Conférence le 4 Sept. 1811.

Introduction.

Le Théorème de Polyhèdrométrie d'*Euler*, suivant lequel dans tout Polyhèdre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arrêtes, peut être regardé comme fondamental pour cette partie de la Géométrie *). Il correspond à la proposition de Géométrie plane, suivant laquelle le nombre des côtés et le nombre des angles d'une figure rectiligne sont les mêmes. Mais, tandis que cette dernière proposition ne demande aucun développement ou que du moins ce développement est de première facilité, la proposition correspondante

*) Voyez les Mémoires de St. Pétersb. pour 1752 et 1753, imprimés en 1758.

sur les Polyhèdres n'est rien moins qu'évidente. Dans un premier travail l'Auteur n'aïant pu en trouver une démonstration générale, il se contenta de l'exposer sur plusieurs solides d'espèces différentes, et il conclut, par analogie seulement, de ces cas particuliers à la proposition générale. Dans un second travail sur le même sujet, l'auteur donne cette démonstration. Il la tire de la possibilité de diminuer d'une unité le nombre des angles solides d'un polyhèdre, d'où découle la possibilité de le réduire en une pyramide, et en particulier en une pyramide triangulaire. L'Auteur développe cette possibilité; et il en tire les conséquences relatives à la diminution correspondante du nombre des faces et du nombre des arrêtes.

Euler, dans les mêmes Mémoires, développe deux autres Théorèmes sur les Polyhèdres, relatifs à la valeur de la somme des angles plans qui entrent dans la composition d'un polyhèdre; et il démontre que cette valeur est quatre angles droits multipliés par l'excès du nombre des arrêtes sur le nombre des faces; et aussi quatre angles droits multipliés par un nombre inférieur de deux unités au nombre des angles solides. Cette dernière expression lui paroît surtout remarquable. Elle répond à la valeur de la somme des angles plans d'une figure rectiligne dans le nombre de ses côtés ou de ses angles. L'auteur, après

Digitized by Google

l'avoir tirée des deux premiers théorèmes, en donne une démonstration qui en est indépendante, qui est aussi fondée sur le principe déjà exposé, savoir, sur la possibilité de diminuer d'une unité le nombre des angles solides d'un polyhèdre, jusqu'à ce qu'il ait été reduit à une pyramide, et en particulier à une pyramide triangulaire.

Le Gendre, dans ses Élémens de Géométrie, a démontré les mêmes théorèmes d'une manière élégante et remarquable par sa brièveté. Sa démonstration est fondée sur l'expression de la surface d'un polygone sphérique dans ses angles. Comme cette dernière expression suppose des principes sur les polygones sphériques, qui ne peuvent être établis que par des développemens un peu longs; la démonstration de *Le Gendre* ne me paroît pas avoir le degré de simplicité (quant aux principes sur lesquels elle répose), que l'on est en droit de demander pour une proposition fondamentale.

Il paroît qu'*Euler* à fait des tentatives inutiles pour démontrer ses théorèmes par la décomposition d'un polyhèdre en pyramides, aïant pour sommet commun un point pris dans l'intérieur de ce polyhèdre, et aïant ses faces pour bases. *Hic modus* (dit-il) *solidum quodcunque in pyramides resolvendi ad praesens institutum parum confert.* Je trouve, au contraire, que cette décomposition conduit

à la démonstration demandée d'une manière immédiate, très-simple et très-lumineuse. Je me propose de la développer dans ce Mémoire.

Cette observation, relative à une simple différence dans le procédé d'une démonstration, n'est que secondaire au but principal de ce Mémoire. Je me propose principalement de montrer, que le théorème d'*Euler* souffre des exceptions nombreuses, et qu'il n'est vrai d'une manière générale que pour les Polyhèdres qui n'ont point de parties rentrantes; soit quant aux angles plans qui forment les angles solides, soit quant aux *angles planiques* ou aux inclinaisons de leurs faces. Ces polyhèdres sont à la verité ceux qu'on a coûtume de considérer principalement dans les élémens. Cependant, la définition des polyhèdres: qu'ils sont des solides terminés de toutes parts par des figures planes, n'exclut point les polyhèdres à parties rentrantes. À moins qu'on n'avertisse donc expressement (comme le fait *Le Gendre*), qu'on s'occupe exclusivement des premiers polyhèdres, on s'expose à tirer des conclusions générales, tandis qu'on auroit dû les subordonner au point de vuë particulier, sous lequel on envisage le sujet dont on s'occupe.

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT DE LA DÉMONSTRATION.

Théorème.

§. 1. Dans toute pyramide, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arrêtes.

Démonstration.

Le nombre des faces latérales est égal au nombre des côtés de la base, ou au nombre des arrêtes à la base. Le nombre des angles solides à la base est égal au nombre des arrêtes terminées au sommet de la pyramide. Partant la somme du nombre des faces latérales et du nombre des angles solides à la base est égal au nombre des arrêtes de la pyramide. Donc la somme du nombre total des angles solides (l'angle au sommet y compris), surpasse de deux unités le nombre des arrêtes.

Théorème.

§. 2. Soient deux pyramides, telles, qu'une des faces latérales de l'une peut convenir avec une des faces latérales de l'autre. Que ces deux pyramides soient appliquées l'une à l'autre de manière que ces deux faces conviennent entr'elles. J'affirme que dans le solide, provenu de cette réunion, la somme du nombre des faces et du nom-

bre des angles solides, surpasse de deux unités le nombre des arrêtes.

Démonstration.

Les deux pyramides étant détachées, la somme du nombre total des faces et du nombre total des angles solides surpasse de quatre unités le nombre total des arrêtes. Mais, par la coincidence de deux faces, le solide provenu de la réunion des deux pyramides, a trois angles solides et trois arrêtes de moins que les deux pyramides détachées, et il a deux faces de moins; donc, dans le solide composé la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arrêtes.

Symboliquement.

Soient f, f', et F, les nombres des faces des deux pyramides et du solide qui en est composé. Soient s, s', et S, les nombres de leurs angles solides. Soient a, a' et A, les nombres de leurs arrêtes. On a les équations suivantes :

$$f + f' = F + 2,$$
$$s + s' = S + 3,$$
$$a + a' = A + 3.$$

De là :

$$f + s - a + f' + s' - a' = F + S - A + 2.$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\text{Mais :}\quad & f + s - a &&= 2,\\
& f' + s' - a' &&= 2,\\
\text{donc :}\quad & F + S - A + 2 &&= 4,\\
\text{et}\quad & F + S - A &&= 2.
\end{aligned}$$

Théorème.

§. 3. Soient deux polyhèdres, dans chacun desquels la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides est supposée surpasser de deux unités le nombre des arrêtes. Que ces deux solides aïent deux faces qui peuvent convenir. Que ces solides soient appliquées l'un à l'autre par ces faces coincidentes. J'affirme que dans le solide, provenu de leur réunion, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse aussi de deux unités le nombre des arrêtes.

Démonstration.

Elle est la même que celle de la proposition précédente.

Soit n le nombre des côtés des faces coincidentes, et soient conservés les autres symboles du §. précédent on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
f + f' &= F + 2,\\
s + s' &= S + n,\\
a + a' &= A + n.
\end{aligned}$$

De là : $f + s - a + f' + s' - a' = F + S - A + 2 = 4,$
donc $F + S - A = 2.$

Théorème.

§. 4. Soit un solide composé d'un nombre quelconque de pyramides aïant leurs sommets en un même point, de manière que ces pyramides soient appliquées les unes aux autres deux-à-deux par deux faces latérales communes. J'affirme que dans ce solide la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arrêtes.

Démonstration.

La proposition est vraie pour chaque pyramide (§. 1.). Elle est vraie pour le solide composé de deux pyramides (§. 2.), donc, elle est vraie pour le solide composé de ce dernier et d'une troisième pyramide (§. 3.); et de là pour le solide composé de quatre pyramides; et successivement, la proposition étant vraie pour le solide composé d'un certain nombre de pyramides, elle est vraie pour le solide composé d'un nombre de pyramides plus grand d'une unité: et partant elle est vraie pour un solide composé d'un nombre quelconque de pyramides appliquées deux-à-deux de la même manière.

§. 5. Dans ce qui précède j'ai supposé que l'aggrégation successive des pyramides se fait par une seule

Digitized by Google

paire de faces coincidentes. Que cette agrégation se fasse par deux paires de faces autour d'une arrête commune. J'affirme que la même proposition a encore lieu.

En effet, soit un solide P formé conformément à la première agrégation, et dans lequel, par conséquent, la proposition ait été démontrée vraie. Soit un solide P′ qui diffère du premier, entant qu'une des pyramides qui le composent est adaptée par deux de ses faces triangulaires autour d'une arrête commune, à deux des faces triangulaires des autres pyramides qui le composent.

Le solide P a deux faces de plus que le solide P′; il a un angle solide de plus, et trois arrêtes de plus. Donc, dans ces deux solides, l'excès de la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides sur le nombre des arrêtes, est le même. Mais dans le premier polyhèdre cet excès est supposé être deux, donc aussi cet excès est deux dans le second.

Symboliquement.

Soient F et F′, S et S′, A et A′, les nombres des faces, les nombres des angles solides, et les nombres des arrêtes des deux polyhèdres. On a les équations:

$$F = F' + 2,$$
$$S = S' + 1,$$
$$A = A' + 3,$$
$$F + S - A = F' + S' - A' = 2.$$

§. 6. On montre de la même manière, que si deux polyhèdres différent l'un de l'autre, en ce que l'un d'eux provient de l'application de deux polyhèdres par une seule paire de faces coincidentes; tandis que l'autre provient de l'application l'un à l'autre de deux polyhèdres par deux paires de faces coincidentes deux-à-deux autour d'une arrête commune. Si la proposition est vraie pour le premier solide, elle est aussi vraie pour le second.

Partant, faisant coincider successivement deux-à-deux les faces d'un solide composé de pyramides avec les faces d'une pyramide, de manière que le nombre des paires de faces coincidentes augmente successivement d'une unité: on obtient la proposition pour un solide composé de pyramides de la manière proposée.

§. 7. Par l'application des pyramides par des faces coincidentes; qu'il arrive que deux bases opposées au sommet commun soient dans un même plan: à cet égard le nombre des angles solides demeure le même; mais le nombre des arrêtes et le nombre des faces sont l'un et

Digitized by Google

l'autre diminués d'une unité. Partant, l'excès de la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides sur le nombre des arrêtes demeure le même.

La démonstration précédente s'applique immédiatement à la composition d'un polyhèdre par des pyramides dont le sommet commun est un des sommets d'un polyhèdre; et partant à la décomposition d'un polyhèdre en pyramides aïant pour sommet commun un des sommets du polyhèdre, et aïant pour bases celles des faces du polyhèdre qui ne sont pas adjacentes à ce sommet.

Il reste à examiner le cas dans lequel le solide comparé présente un creux pyramidal, capable d'être rempli par une pyramide; de manière que le sommet de ce creux, ou le sommet commun à toutes les pyramides qui composent le premier solide, disparaisse dans le second.

Soit n le nombre des faces du creux, et soient P et P′ les deux polyhèdres. Le premier solide P a $(n-1)$ faces de plus que le second; savoir, à la place des n faces du creux, le solide P′ a pour face la base de la pyramide qui le remplit. Item, P a un angle solide de plus que P′, savoir l'angle solide du creux. Donc, la somme du nombre des angles solides et du nombre des faces de P surpasse de n unités la somme correspondante dans le solide P′. Mais le nombre des arrêtes de P surpasse

aussi de n unités le nombre des arrêtes de P′; savoir du nombre des arrêtes intérieures du creux. Donc la différence entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, et le nombre des arrêtes, est la même dans les deux polyhèdres. Partant, si dans le premier polyhèdre cette différence est de deux unités, elle est aussi de deux unités dans le second.

Rémarque.

Si les arrêtes qui forment le rebord intérieur du creux ne sont pas toutes dans un même plan : à cet égard le solide P′ acquiert un même nombre de faces et d'arrêtes, tandis que le nombre des angles solides demeure le même. Donc, à cet égard, la différence entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, et le nombre des arrêtes, demeure la même.

§. 8. De la proposition précédente, savoir: que la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arrêtes, on peut tirer les deux autres propositions d'*Euler*, qui portent : que la valeur de la somme de tous les angles plans d'un polyhèdre vaut quatre angles droits, multipliés par l'excès du nombre des arrêtes sur le nombre des faces, et aussi quatre angles droits par un nombre inférieur de deux unites à celui des angles solides.

Soyent $f^{\mathrm{III}}, f^{\mathrm{IV}}, f^{\mathrm{V}}, f^{\mathrm{VI}} \ldots f^{\mathrm{N}}$, les nombres des faces dont les nombres de côtés sont réspectivement: 3, 4, 5, 6, ... n. Soit F le nombre total des faces; soit A le nombre des arrêtes; et soit V la valeur des angles plans du polyhèdre exprimée en angles droits, on a:

$$
\begin{array}{ll}
V = 2f^{\mathrm{III}}(3-2) & = 2(3f^{\mathrm{III}}+4f^{\mathrm{IV}}+5f^{\mathrm{V}}+6f^{\mathrm{VI}}+\ldots+nf^{\mathrm{N}}) \\
\quad + 2f^{\mathrm{IV}}(4-2) & - 4(f^{\mathrm{III}}+f^{\mathrm{IV}}+f^{\mathrm{V}}+f^{\mathrm{VI}}+\ldots+f^{\mathrm{N}}) \\
\quad + 2f^{\mathrm{V}}(5-2) & \\
\quad + 2f^{\mathrm{VI}}(6-2) & = 4A - 4F = 4(A-F). \\
\quad + \ldots & \\
\quad + \ldots & \\
\quad + 2f^{\mathrm{N}}(n-2). &
\end{array}
$$

Or, par supposition, $A-F=S-2$; donc $V=4(S-2)$.

Réciproquement.

Si on a démontré chacune des deux équations: $\begin{matrix} V=4(A-F) \\ =4(S-2) \end{matrix}$; on aura aussi, $A-F=S-2$; ou $F+S-A=2$.

§. 9. Conformément au voeu, manifesté par *Euler* dans le Mémoire cité, je crois devoir déterminer la valeur des angles plans dans les angles solides seulement, immédiatement et indépendamment des deux autres propositions. C'est ce que je fais en suivant à-peu-près le même procédé que j'ai suivi dans le développement de la proposition précédente.

1°). Dans toute pyramide la valeur de la somme de tous les angles plans est quatre angles droits pris un nombre de fois inférieur de deux unités au nombre des angles solides.

En effet la somme des angles plans des faces latérales est deux angles droits multipliés par le nombre des angles solides à la base. La valeur des angles plans à la base est deux angles droits multipliés par le même nombre diminué de deux unités. Donc, la valeur de tous les angles plans est deux angles droits multipliés par le double du nombre des angles à la base diminué de deux unités; ou à quatre angles droits multipliés par le nombre des angles solides à la base diminué d'une unité; ou enfin, par le nombre des angles solides de la pyramide diminué de deux unités.

2°). Soient deux pyramides appliquées l'une à l'autre par une face triangulaire commune. J'affirme que dans le solide, qui en est composé, la valeur de la somme de tous les angles plans est quatre angles droits multipliés par un nombre inférieur de deux unités du nombre des angles solides.

En effet soient v et v' les valeurs des angles plans contenus dans les deux pyramides. Soit V la valeur de tous les angles plans du solide provenu de leur application:

On aura :

$$v = 4(s-2),$$
$$v' = 4(s'-2),$$
donc: $$v + v' = 4(s + s' - 4),$$
mais : $$v + v' = V + 4,$$
et $$s + s' = S + 3,$$
donc: $$V + 4 = 4(S-1),$$
$$V = 4(s-2).$$

3°). La proposition ayant été démontrée pour deux polyhèdres, elle est aussi vraie pour le solide provenu de leur application par deux faces coincidentes. La démonstration est sensiblement la même.

4°). La proposition est vraie pour le solide provenu de la réunion de pyramides appliquées deux-à-deux par une face commune.

5°). Que deux paires de faces triangulaires autour d'une arrête commune s'appliquent les unes aux autres. Comparant le solide, dans lequel l'application se fait, par deux paires de faces autour d'une arrête commune, avec le solide dans lequel cette application se fait par une seule face; on trouve que le nombre des angles solides est diminué d'une unité, et que la valeur des angles plans est diminuée de quatre angles droits. Partant, la proposition aïant lieu pour le second solide, elle a lieu aussi pour le premier.

6°). Qu'il reste un creux pyramidal à remplir par une pyramide.

Que le solide aïant un creux soit désigné par P, et que le second solide soit désigné par P′.

Le solide P a un angle solide de plus que P′; et la valeur de tous les angles plans du solide P surpasse la valeur de tous les angles plans du solide P′ de quatre angles droits. Donc, la proposition étant vraie pour le premier solide, elle est vraie aussi pour le second.

Scholie.

La marche que j'ai suivie, en décomposant un solide en pyramides aïant un sommet commun, peut aussi s'appliquer *(mutatis mutandis)*, à la décomposition d'un polyhèdre en troncs prismatiques, aïant leurs bases sur le plan d'une des faces, et terminés par les plans des autres faces.

SECONDE PARTIE.

EXCEPTIONS À LA PROPOSITION D'*EULER*.

Les démonstrations que j'ai développées des propositions d'*Euler* reposent essentiellement sur la supposition: que les solides qui, par leur application l'un à l'autre, forment un solide composé, sont tels qu'ils ont deux faces qui peuvent convenir, et que l'application de ces solides

Digitized by Google

l'un à l'autre se fait par la coincidence de ces deux faces. Conformément à cette supposition la démonstration est rigoureuse. Je passe à l'examen des conséquences de la supposition que les faces, dont les plans sont appliqués l'un à l'autre, ne coincident pas entr'elles.

Théorème.

§. 10. Soit un solide P, sur une des faces duquel on applique un solide P′, de manière qu'une partie seulement d'une face de P soit recouverte par une des faces de P′, et qu'il reste à la première un rebord ou anneau polygonal, terminé extérieurement par le contour de la face appartenante à P, et intérieurement par le contour de la face appartenante à P′, qui est appliquée sur la première. J'affirme que dans le solide P″, provenu de cette application, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de trois unités le nombre des arrêtes.

Démonstration.

La somme des nombres des faces de P et de P′ surpasse d'une unité seulement le nombre des faces de P″. Les nombres des angles solides de P et de P′ séparés, et ceux de leurs arrêtes, sont réspectivement les mêmes que les nombres des angles solides et des arrêtes de P″. Donc

la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides de P et de P′, détachés, surpasse d'une unité seulement la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides de P″. Et l'excès de la somme des nombres des faces et des nombres des angles solides de P et de P′, sur la somme des nombres de leurs arrêtes, est plus grand d'une unité seulement que n'est l'excès de la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides de P″ sur le nombre de ses arrêtes. Mais le premier excès est quatre, donc le second excès est trois.

Symboliquement.

$$f + f' = F'' + 1,$$

$$s + s' = S'',$$

$$a + a' = A''.$$

$$f + s - a + f' + s' - a' = F'' + S'' - A'' + 1 = 4,$$

$$\text{donc } F'' + S'' - A'' = 3.$$

Remarque première.

Cette proposition est la même, soit que le solide P′ soit appliqué au solide P extérieurement à lui, soit qu'il lui soit appliqué intérieurement, de manière que le solide P″ ait un creux, dont l'ouverture est une partie seulement d'une de ses faces, capable d'être rempli par le solide P′.

Digitized by Google

Remarque seconde.

Qu'on fasse la même application sur un plus grand nombre de faces du solide P. Dans le solide composé la différence entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, et le nombre des arrêtes, surpasse deux d'autant d'unités qu'il y a de pareilles applications. Qu'on exécute la même opération sur les faces du nouveau solide, ou sur les parties de ses faces qui lui sont communes avec P. On obtient une différence aussi grande qu'on le veut entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, et le nombre des arrêtes.

Exemple.

Soit un solide composé de couches prismatiques décroissantes, de manière que la base inférieure de chaque couche supérieure s'applique sur une partie seulement de la base supérieure de la couche sur laquelle elle repose, et qu'elle laisse sur cette dernière base un contour polygonal terminé extérieurement par le contour de la base supérieure de la couche inférieure, et intérieurement par le contour de la base inférieure de la couche supérieure. Soit m le nombre de ces couches. Dans le solide ainsi composé la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de $m+1$ unités le nombre des arrêtes.

Remarque troisième.

Pour que l'exception que j'expose ait lieu, les contours extérieur et intérieur de l'anneau polygonal, qui est la différence des deux faces, dont l'une est appliquée sur une partie de l'autre, doivent être détachés l'un de l'autre. Si le contour intérieur de cet anneau a un angle commun avec le contour extérieur, sans qu'ils aient un côté commun; la somme du nombre des angles solides de P et de P′ surpasse d'une unité le nombre des angles solides de P″; à cet égard, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides de P et de P′ détachés surpasse de deux unités la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides de P″; et le solide P″ devient conforme au théorème.

Scholie.

L'exception que je viens d'exposer doit se présenter dans la nature. Dans les agrégations mutuelles des corps, et en particulier dans les groupes de crystaux, à moins qu'il n'y ait une cause puissante qui la détermine à s'appliquer les uns aux autres par des faces coincidentes; il doit se rencontrer des cas où leur application se fait de la manière propre à donner lieu à l'exception mentionnée. Aussi ai-je vu dans la belle collection de minéraux que possède mon ami et collègue, le Prof. *Pictet*, Inspecteur

Digitized by Google

général des études, différens groupes de crystaux conformes à cette exception, parmi lesquels il me suffira de nommer des groupes de crystaux de spath calcaire et des grès de la carrière de Montmartre.

§. 11. Je passe aux expressions de la valeur des angles plans des polyhèdres qui donnent lieu à exception à l'égard du premier théorème.

Lemme.

Dans un anneau polygonal la somme des angles plans vaut deux angles droits pris autant de fois que l'anneau a de côtés.

Démonstration.

Chaque angle du contour intérieur de l'anneau vaut la somme de deux angles droits et de l'angle extérieur correspondant du polygone intérieur. Donc la somme des angles du contour intérieur de l'anneau est la somme de quatre droits, et de deux droits pris autant de fois que le polygone intérieur a des côtés. Mais la somme des angles du contour intérieur vaut deux angles droits pris autant de fois que ce contour a de côtés, moins quatre angles droits; donc la somme de tous les angles de l'anneau vaut deux angles droits pris autant de fois que cet anneau a de côtés.

Corollaire.

Dans un anneau polygonal la somme des angles au contour intérieur de l'anneau surpasse de huit angles droits la somme des angles de la figure intérieure à l'anneau terminée par le même contour.

Application.

Soit un polyhèdre P'' composé de deux autres P et et P', de manière que deux des faces de P et de P' laissent un anneau qui devient face de P''. La valeur de la somme des angles plans de P'' surpasse de huit angles droits la somme des angles plans de P et de P'; mais la somme des angles plans de P et de P' vaut quatre angles droits multipliés par l'excès de la somme des nombres de leur angles solides sur quatre, ou quatre angles droits multipliés par l'excès du nombre des angles solides de P'' sur quatre. Donc la valeur de la somme des angles plans de P'' est quatre angles droits multipliés par l'excès du nombre de ces angles solides sur deux. Donc, quant à la relation qui règne entre la valeur des angles plans de P'' et le nombre de ses angles solides, le polyhèdre P'' est conforme au Théorème d'*Euler*.

Puisqu'on a: $V = 4(S - 2)$

et $F + S = A + 3$; ou $S - 2 = A - F + 1$,

il y a $V = 4(A - F + 1)$.

Partant, à cet égard, le solide P″ donne lieu à exception; la valeur de ses angles plans est quatre angles droits multipliés par un nombre supérieur d'une unité à l'excès du nombre des arrêtes sur le nombre de ses faces. Cette exception est d'autant plus grande que le nombre des applications de deux faces, faites conformement à la supposition, est plus grand.

§. 12. Dans les solides, dont je viens de parler comme donnant lieu à une exception au théorème d'*Euler*, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse le nombre des arrêtes de plus que de deux unités. Je passe à une exception contraire, et je vais montrer qu'il y a des solides, dans lesquels l'excès de la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides sur le nombre des arrêtes est moindre que deux unités; de manière que non seulement cet excès peut être réduit à l'unité, ou être nul, mais encore le nombre des arrêtes peut être plus grand que la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides. Cette exception s'est présentée à moi la première, en poursuivant les conséquences de la décomposition d'un polyhèdre en troncs prismatiques aïant pour bases les projections de ses faces sur le plan de l'une d'elles, conformement au §. 9, Scholie; ou bien, en composant un solide par les appli-

cations de troncs prismatiques droits par leurs faces latérales.

En effet, qu'on parvienne, par les applications successives de troncs prismatiques par leurs faces latérales, à un solide ouvert ou percé de part en part, de manière que l'ouverture puisse être remplie par un solide prismatique; j'affirme que dans ce solide la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse d'une unité seulement le nombre des arrêtes.

Soit P le solide ouvert, et soit P′ le solide qui diffère de lui seulement entant que l'ouverture est comblée. Soit *n* le nombre des faces de l'ouverture.

Premier cas.

Que les arrêtes qui forment le bord supérieur de l'ouverture soient dans un même plan, et que dans ce plan il n'y ait aucune face appartenante au solide P.

Le solide P a $n-1$ faces de plus que le solide P′; il a *n* angles solides de plus que lui, et $2n$ arrêtes de plus que lui. Partant l'excès de la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides sur le nombre des arrêtes est moindre d'une unité dans le solide P que l'excès correspondant dans le solide P′. Mais dans le solide P′ cet excès est de deux unités; donc dans le solide P cet excès est d'une unité seulement.

Second cas.

Que les arrêtes qui forment le contour supérieur de l'ouverture dans P ne soient pas toutes dans un même plan.

Les différences des nombres des faces et des nombres des arrêtes des solides P et P′ varient d'un même nombre d'unités, et la différence du nombre des angles solides demeure la même. Partant la différence entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides et le nombre des arrêtes du solide P demeure la même, savoir l'unité.

Les solides ouverts, ou percés de part en part par des ouvertures prismatiques, peuvent donc donner lieu à une exception au théorème d'*Euler*, dans le sens contraire à la première. Soit faite une seconde ouverture par le retranchement d'une seconde face; le solide ainsi ouvert aura un nombre d'arrêtes égal à la somme du nombre de ses faces et du nombre de ses angles solides. Qu'on procède de la même manière à un plus grand nombre d'ouvertures détachées; on obtient un solide dans lequel le nombre des arrêtes surpasse la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides d'autant d'unités qu'il y a d'ouvertures au-de-là de deux.

Dans ce qui précède j'ai regardé le solide comme percé de part en part perpendiculairement à une de ses faces prise pour base. Que le solide soit percé de part en part de manière à retrancher complétement deux des faces du polyhèdre. Dans le solide ainsi ouvert la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides est égal au nombre des arrêtes.

Ce que je viens de dire sur les ouvertures prismatiques est aussi vrai des ouvertures pyramidales tronqées; soit que l'ouverture se fasse par un seul tronc pyramidal, soit qu'elle se fasse par deux ou par plusieurs troncs pyramidaux, qui ont deux-à-deux dans l'intérieur du polyhèdre des bases communes supprimées.

Exemple.

Soit un prisme coupé par un plan parallèle à ses bases. Sur le plan de la section, et intérieurement au solide, soit décrit un polygone, dont les côtés soient parallèles aux côtés des bases, et qui ne rencontrent pas la surface prismatique. Par les côtés de cette figure, et par les côtés des bases qui leur sont parallèles, soient menés des plans; ils retranchent deux pyramides tronqées opposées à la base. Que cette base soit supprimée. Dans le solide restant la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides est égal au nombre des arrêtes.

Digitized by Google

Pour que cette espèce d'exception ait lieu, l'ouverture doit se faire en retranchant complètement les faces du polyhèdre. Si l'ouverture laisse à chaque face une couronne polygonale, il n'y a pas lieu, à cet regard, à ce genre d'exception.

Exemple.

Soit un prisme droit percé de part en part, de manière que ses bases conservent des couronnes polygonales. Le solide restant est conforme au théorème d'*Euler*.

L'exception, dont je parle, renferme encore le cas dans lequel un solide a un creux pyramidal, qui a pour base une face supprimée du solide, et qui a pour sommet un des sommets de polyhèdre situé hors de cette face.

Soit P le solide creusé conformément à la supposition; soit P′ le solide non-creusé dont il fait partie. Soit n le nombre des côtés de la face supprimée. Soient F et F′; S et S′; A et A′, les nombres des faces, des angles solides, et des arrêtes des deux polyhèdres. On a:

$$F = F' + (n - 1),$$
$$S = S',$$
$$A = A' + n,$$
$$F + S - A = F' + S' - A' - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Cette source d'exception n'a pas lieu, lorsque la base

du creux est une partie seulement de la face du polyhèdre qui lui sert de base.

Pour chaque creux détaché, conformément à la supposition, la différence entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, et le nombre des arrêtes, diminue d'une unité. Ainsi, pour deux creux de cette espèce la différence est zéro. Pour un nombre de creux supérieur à deux, le nombre des arrêtes surpasse la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides d'autant d'unités, qu'il y a de creux au-delà de deux.

Cette source d'exception évanouit, lorsque la base du creux est une partie seulement d'une face du solide non-creusé, dont le solide creusé fait partie, et lorsque le sommet du creux est un point intérieur au solide, et que la base est une face complete.

Qu'on combine entr'elles les deux sources d'exception dont l'une tend à augmenter la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, comparativement au nombre des arrêtes, et dont l'autre tend à la diminuer. On peut obtenir des solides, dans lesquels l'une ou l'autre de ces deux sources d'exception domine, ou dans lesquels ces deux sources se détruisent; de manière que des solides qui, à l'un ou à l'autre de ces deux égards, paroissent

Digitized by Google

se soustraire au théorème d'*Euler*, y redeviennent conformes, par les compensations qui ont lieu entre ces deux sources d'exceptions.

§. 13. Je vais considérer les solides qui donnent lieu à l'exception du second genre, relativement à la valeur de leurs angles plans.

Soit un solide percé par un trou prismatique, qui retranche entièrement une seule de ses faces. Soit n le nombre des côtés de cette face, ou celui des faces latérales du prisme. Soient F, S, A, V, le nombre des faces, le nombre des angles solides, le nombre des arrêtes, et la valeur des angles plans, d'un solide non-percé P; soient F′, S′, A′, V′, les mêmes quantités pour le solide percé P′.

On a $V' = V - (2n-4) + (2n+4) + 4n = V + 4(n+2)$. Or $V = 4(S-2)$; donc $V' = 4(S+n)$. Mais $S+n = S'$; donc $V' = 4S'$.

Que l'ouverture retranche deux faces, dont chacune a n côtés. On a $V' = V + 4n - 2(2n-4) = V + 4 \cdot 2$; mais $V = 4(S-2)$; donc $V' = 4S$. Mais $S = S'$; donc $V' = 4S'$.

Partant la valeur des angles plans du polyhèdre P′ est quatre angles droits multipliés par le nombre des an-

gles solides; soit qu'on ait retranché une seule face du polyhèdre P, soit qu'on ait retranché deux de ses faces.

Or, dans la premier cas, $F' + S' = A' + 1$, ou $S' = A' - F' + 1$; et dans le second, $F' + S' = A'$, ou $S' = A' - F'$; donc, dans le premier cas, $V = 4(A' - F' + 1)$, et dans le second cas, $V' = 4(A' - F')$. Partant dans le second cas l'expression de la valeur des angles plans dans les arrêtes et dans les faces, devient conforme au théorème d'*Euler*.

§. 14. Les solides ouverts qui donnent lieu à l'exception du second genre, sont les différences de deux solides dont l'un est intérieur à l'autre; de manière à retrancher complètement de celui-ci une ou plusieurs de ses faces. Que le solide retranché soit entièrement intérieur à l'autre; de manière qu'on obtienne un solide aïant une cavité intérieure, dont le contour est détaché du contour extérieur. Dans le solide qui est la différence des deux premiers, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de quatre unités le nombre des arrêtes. Si un polyhèdre a un nombre *n* de parcilles arrêtes, détachées les unes des autres, l'excès de la somme du nombre de ses faces et du nombre de ses angles solides sur le nombre de ses arrêtes est plus

Digitized by Google

grand que deux, de deux fois le même nombre, en sorte qu'on a $F + S = A + 2 + 2n$.

Scholie.

Comme les élémens des solides qu'on considère principalement, sont leurs angles solides, leurs faces et leurs inclinaisons entr'elles, ou les angles planiques, et que le nombre des angles planiques est égal au nombre des arrêtes: il me paroît qu'il eût été plus conforme aux principes de la polyhèdromètre, d'énoncer comme il suit la proposition d'*Euler*: Dans un polyhèdre de la première classe la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des angles planiques.

OBSERVATIONS D'UNE COMÈTE,

FAITES À L'OBSERVATOIRE ROYAL DE COPENHAGUE, EN OCTOBRE, NOVEMBRE ET DECEMBRE 1807.

PAR

Mr. THOMAS BUGGE.

Présenté à la Conférence le 11 Mai 1808.

Copenhague a été entièrement cernée, et nous n'avons pas eu des postes depuis la Mi-Août jusqu'à la fin de Novembre. J'ose donc prétendre d'avoir fait moi-même la découverte de la comète le 1 Octobre 1807. Ce nouveau citoyen de nôtre système planétaire a du moins servi à adoucir et à dissiper ma juste douleur, causée par la perte de ma bibliothèque, de mes manuscrits, de mes instrumens, de mes cartes, et de mes meubles.

À cause du bombardement de Copenhague les instrumens de l'Observatoire, si on en excepte le mural de 6 pieds de rayon et le secteur de 12 pieds, étoient démontés et gardés dans les souterrains. Dans ces circonstances désagréables on a été obligé d'employer les moyens bien simples, dont on étoit le maître. Avec un sextant de *Hadley* on a mesuré les distances entre la comète et

Digitized by Google

deux étoiles fixes, qui étoient Gemma dans la couronne boréale, Arcturus dans Bootès, et Végа de la Lyre. L'attouchement, ou la coincidence de deux petits points lumineux, est en verité un peu difficile à saisir. Le ciel étant beau et serain, on peut se fier aux observations jusqu'à 15″ ou 30″; mais s'il y a des vapeurs, ou s'il fait clair de lune, l'erreur peut monter à 45″ ou 60″.

Il faut corriger les distances observées, ou apparentes, de l'effet de la réfraction et de la parallaxe. Soit C le lieu apparent de la comète et G de l'étoile; par le zénith Z on tire deux cercles ZH et ZR. HR est l'horizon. La parallaxe de la comète étant très petite, le vrai lieu de la comète sera plus bas en *c* par l'effet réuni de la retraction et de la parallaxe, et le lieu vrai de l'étoile sera en *g*; ainsi CG est la distance apparente et *cg* la distance vraie. Sans erreur sensible on peut regarder les deux arcs CG et *cg* comme parallèles; on tire *ca* et *gb* perpendiculaires à CG. Tab. I. Fig. 4.

Dans le triangle sphérique ZCG sont donnés les trois côtés GZ et CZ, ou les distances apparentes de zénith, et CG, qui est la distance apparente. On cherche l'angle x; en faisant $\frac{GZ + CZ + CG}{2} = P$, on aura:

$$\sin.\tfrac{1}{2}x = \sqrt{\left(\frac{\sin.(P - CG)\,.\,\sin.(P - CZ)\,r^2}{\sin.CG\,.\,\sin.CZ}\right)}.$$

On cherche l'angle y:

Digitized by Google

$$\sin. y = \frac{\sin. x \,.\, \sin. CZ}{\sin. GZ}.$$

Les deux très petits triangles Cca et Ggb peuvent être regardés comme rectilignes; alors:

$$Ca = \frac{\cos. x \,.\, Cc}{r}, \qquad Gb = \frac{\cos. y \,.\, Gg}{r}.$$

Par ces deux lignes Ca et Gb la distance apparente CG est reduite à la vraie cg. Quand l'angle x est aigu, on a $gc = GC + Ca - Gb$; quand l'angle x est obtus, on a $gc = GC - Ca + Gb$; quand l'angle x est droit, on a $gc = GC + Gb$.

Par exemple le 22 Oct. 1807, temps moyen de Copenhague $7^h\ 18'\ 20''$, la distance apparente de la comète à Véga $= 33°.\ 24'.\ 30''$; la hauteur de la comète $= 32°.\ 30'$, et celle de Véga $= 62°.\ 45'$. La réfraction pour la comète $= 1'.\ 29''$, et pour Véga $= 29''$. On trouve l'angle $x = 18°.\ 27'.\ 10''$; l'angle $y = 35°.\ 39'.\ 50''$; $Ca = 1'.\ 24'',4$; $Gb = 23'',6$, et finalement la distance vraie $cg = 33°.\ 24'.\ 30'' + 1'.\ 24'',4 - 23'',6 = 33°.\ 25'.\ 30'',8$.

Il y a plusieurs méthodes analytiques pour corriger les distances apparentes. Celle de Mr. *de Borda* (Déscription et usage du cercle de reflexion pag. 76 et 77), quoique elle ne soit pas la plus courte, est du moins très élégante et de la dernière précision. Il a omis le quarré du rayon, ce qui peut dérouter ceux qui ne sont pas fort versés dans la Trigonométrie analytique. On peut

Digitized by Google

exprimer la formule sous une forme plus claire et plus commode. Soit :

la hauteur appar. de la comète $= h$	la distance apparente $= D$
la hauteur vraie $= h'$	la distance vraie . $= D'$
la hauteur appar. de l'étoile $= H$	un angle auxiliaire $= A$
la hauteur vraie $= H'$	

$$(\sin. A)^2 = \frac{\cos. h' . \cos. H' . \cos. \tfrac{1}{2}(H + h + D) . \cos. \tfrac{1}{2}(H + h - D) . r^2}{\cos. h . \cos. H . (\cos. (\frac{H' + h'}{2}))^2}$$

et enfin $\sin. \tfrac{1}{2} D' = \dfrac{\cos. (\frac{H' + h'}{2}) . \cos. A}{r}$. En appliquant cette formule à la distance observée le 22 Octobre à $7^h.18'.20''$, on trouve $A = 64°.45'.5''$ et $D' = 33°.25'.32''$, ce qui ne diffère du résultat trouvé par la méthode synthétique que de $1'',2$. Cette différence provient de l'incertitude des derniers chiffres des logarithmes.

Ayant pris les ascensions droites et les déclinaisons de Gemma, Arcturus et Véga dans le cathlogue de Mr. *Piazzi*, ayant tenu compte de l'aberration et de la nutation, on a calculé les ascensions droites, les déclinaisons, les longitudes et les latitudes de la comète, qui sont comprises dans le table suivante.

Ascensions droites et déclinaisons de la comète, calculées d'après les distances entre la comète et deux étoiles.

1807	Tems moyen de Copenhague	Ascensions droites	Déclinaisons Boréales	Étoiles	Longitudes	Latitudes Boréales
4 Oct.	$7^h.45'.\ 0''$	$226°.50'\ 40''$	$5°.34'.30''$	Arcturus et Gemma	$222°.39'.39''$	$22°.13.28$
5 —	7 45. 20	227. 55. 10	6. 30. 10		223. 28 32	23. 25. 29
8 —	8. 13. 0	231. 1. 20	9. 9 40		225. 53 24	26. 51. 1
13 —	7. 1. 15	236. 3. 50	13. 28. 10		230. 0. 52	32. 20. 28
14 —	7. 3. 0	237. 4. 30	14. 16 58		230 53. 23	33. 22. 59
21 —	6. 37. 3	243. 52. 50	19. 44 30		237. 6. 27	40. 16 9
22 —	6. 56. 0	244. 51. 56	20. 28. 58		238. 4. 25	41. 12. 5
22 —	7. 18. 20	244. 53. 00	20 30. 00	Vega et Gemma	238. 5 24	41. 13. 17
23 —	7. 16. 6	245. 51. 10	21. 14. 00		239. 3. 18	42. 8. 18
24 —	7. 8. 10	246. 51. 52	21. 54. 4		240. 5. 1	42. 59. 25
28	6. 46. 30	250. 44. 47	24 39. 15		244. 14 13	46. 24. 43
6 Nov.	6. 38. 5	259. 49. 24	30. 9. 3		255 15 31	53. 5. 47

Tab. I. Fig. 5. On a aussi observé la comète avec un Micromètre circulaire. La différence des ascensions se trouve facilement par l'entrée de l'étoile en D, et de la comète en A, et par leurs sorties en H et I. On suppose la valeur du diamètre BE connue en parties d'un grand cercle. Soit $\frac{1}{2}BE = CA = CD = r$. Sans erreur sensible on peut regarder les déclinaisons de la comète et de l'étoile comme égales. On connoît la valeur de DH en tems, et, en multipliant par 15, en dégrés $= b$; ce qui doit encore être multiplié par le cosinus de la déclinaison $= d$; donc $\frac{1}{2}DX = \frac{1}{2}b \cdot \cos. d$. De même on sait la valeur de AI

en degrés $= \beta$, et $\frac{1}{2} AI = \frac{1}{2} \beta . \cos. d$. La différence de déclinaison étant $= FG = \delta$, on aura :

$$\delta = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} b^2 . (\cos. d)^2)} \pm \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} \beta^2 (\cos. d)^2)}.$$

Dans le cas, que la comète et l'étoile sont de différens côtés du centre, il faudra employer le signe $+$; mais si elles sont du même côté, on employe le signe —. En se rappellant que :

$$r^2 - \frac{1}{4} b^2 (\cos. d)^2 = (r + \frac{1}{2} b . \cos. d)(r - \frac{1}{2} b . \cos. d),$$

on peut faire le calcul par les logarithmes.

La réfraction influe sur les ascensions et sur les déclinaisons observées. Soit P le pole, Z le zénith, F la comète, FK la différence entre la réfraction de l'étoile et celle de la comète $= \zeta$. On tire les cercles de déclinaison PE et PD et la perpendiculaire KI. Alors FI est la réfraction en déclinaison et DE en ascension droite. Sachant la hauteur de la comète, les trois côtés sont donnés dans le triangle PFZ, et on peut calculer l'angle de position $= m$, que fait le cercle de déclinaison PD avec le vertical ZM. Si l'angle horaire EPQ est donné, le calcul de l'angle de position est plus court. La réfraction en déclinaison $FI = \frac{\zeta . \cos. m}{r}$ et $KI = \frac{\zeta . \sin. m}{r}$. Dans le triangle PIK on a $\sin. PK : r = \sin. IK : \sin. q$, ou sin. DE, et $\sin. DE = \frac{r . \sin. IK}{\sin. PK}$, ou par une expression équivalente Tab. I. Fig. 6.

DE = réfr. en asc. droite $= \frac{\zeta \, . \, \sin. m}{\cos. d}$. Par exemple le 22 Novembre, à 12^h. 4'. 39", la hauteur de la comète = 9°. 30' et celle de l'étoile = 10°. 8'. La différence des réfractions = ζ = 20"; l'angle de position = m = 71°. 27'. 40". L'ascension droite de la comète = 277°. 18'. 13"; et la déclinaison apparente = 37°. 58'. 54". La réfraction en ascension droite = 24",1 et en déclinaison = 6",4; par conséquent l'ascension droite corrigée = 277°. 17'. 48",9 et la déclinaison = 37°. 58'. 47",6. La hauteur de la comète surpassant 20°, ces corrections sont très petites, et on peut les négliger. Par le milieu du champ de la lunette passe un fil d'argent, qui dans chaque observation étoit tourné de manière à être parallèle à l'équateur. On a toujours repeté les observations par le Micromètre circulaire, et on s'est arrêté au nombre moyen. Par exemple le 24. Octobre.

Différence de l'ascension droite de la comète et de β d'Hercule:	
1. Observation	5'. 37",5
2.	5. 33,7
3.	5 36,5
en tems	5 35,9
en degrés	1°. 23'. 58",5
Asc. droite app. β Hercule	245. 29. 15,5
Asc. dr. app. de la comète à 8^h. 1'. 31". t. m.	246. 53. 14.

Différence les déclinaisons:	
1. Observation	1'. 16",1
2.	1. 18,6
3.	1. 17 8
	+ 1. 17,5
Déclinaison apparente de β d'Hercule	21°. 55'. 14",7
Déclinaison apparente de la comète	21. 56 32,2 B.

Digitized by Google

Lieux de la comète
observés par le micromètre circulaire.

1807	Tems moyen de Copenhague	Ascension droite	Declinaison Boreale	nombre des observations	Les étoiles comparées	Longitude	Latitude Boréale
21 Oct.	8h.33'. 8"	243°.59'. 6"	. . . .	3.	γ Hercule	. . .	. . .
23 —	7. 50. 54	245. 54. 2	21°.15'.18"	3.	β Hercule	239°. 6'.25"	42°.10'. 8"
24 —	8. 1. 31	246. 53. 14	21. 56. 32	3.	β Hercule	240 7. 18	43. 2. 17
19 Nov.	6. 32. 25	273. 41. 42	36. 35. 11	5.	k. Lyre	275. 56. 8	59. 8. 36
21 —	7. 47. 58	275. 58. 35	37. 32. 31	4.	Anonyme	279. 44. 41	60. 48. 24
22 —	12. 4. 39	277. 17. 49	37. 58. 48	5.	Vega	281. 59. 1	61. 8. 40
24 —	6. 34. 8	279. 16. 58	38. 40. 13	5.	N. 60. Lyre Bode	285. 22. 34	61. 38. 30
25 —	10. 56. 5	280. 37. 49	39 7 26	3.	ε Lyre	287. 42. 41	61. 56. 20
4 Dec.	7 32. 39	290. 46. 28	42. 1. 36	4.	N. 63. Cygne Bode	305. 25. 6	62. 57. 32
6 —	6. 46. 27	293. 3. 6	42 35. 42	4.	N 63. Cygne Bode	309. 19. 38	62. 56. 44

On a fait plusieurs autres observations avec le Micromètre circulaire, jusqu'à la fin de Décembre; mais malheuresement la comète étoit seulement dans le voisinage des étoiles téléscopiques, qu'on ne trouve pas dans les catalogues, et dont on n'a pas pu déterminer les positions par d'autres étoiles connues ou déterminées. Je suppose la parallaxe de la comète moindre que celle du soleil, et insensible après son passage par le périhélie. Je n'ai calculé ni l'aberration ni la nutation de la comète, et sous ce point de vue les lieux de la comète sont apparents.

OBSERVATIONS
FAITES À L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE WILNA
EN 1811.

PAR

J. SNIADECKI.

Présenté à la Conférence le 15 Mai et 5 Juin 1811.

Observations de *Pallas.*

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	A. R. appar.	Déclinaison apparente	Étoiles de comparaison
16 Avr.	8h. 4'.54",67	145°.13.45",55	8°.57'.57". bor.	π. Leonis. *Piazzi.*
17 —	8. 1. 38,61	145. 23. 30,33	9. 12. 45,85	idem
18 —	7. 58. 23,9	145. 33. 47,13	9. 27. 13,33	idem
19 —	7. 55. 9,54	145. 44. 11,23	9. 41. 23,80	idem
20 —	7. 51. 57,09	145. 55. 0,88	9. 55. 4,83	ομικρον Leonis
21 —	7. 48. 44,68	146. 6. 10,08	10. 8. 18,66	idem
22 —	7. 45. 32,5	146. 17. 42,08	10. 21. 21,27	idem

Observations de *Junon.*

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	A. R. appar.	Déclinaison apparente	Étoiles de comparaison
20 —	12. 35. 45.	217. 4. 30,50	1. 11. 32,22 austr.	φ Virgin. *Piazzi.*
21 —	12. 31. 1.	216. 52. 51,46	1. 5. 10,88	idem
22 —	12. 26. 21.	216. 41. 4,16	0. 58. 34,51	idem
23 —	12. 21. 33.	216. 28. 39,56	0. 52. 6,16*	dout. nuages. idem
24 —	12. 16. 52.	216. 16. 38,26	0. 45. 37,70	idem
25 —	12. 12. 11.	216. 5. 21,46	0. 39. 34,38	idem
26 —	12. 7. 29.	215. 53. 34,46	0. 33. 15,12	idem
27 —	12. 2. 45.	215. 41. 47,66	0. 27. 25,38*	dout. φ Virginis
28 —	11. 58. 2,5.	215. 29. 42	0. 21. 21,75	ζ. Virginis
29 —	11. 53. 16,29	215. 17. 40,13	0. 15. 25,55	idem
4 Mai	11. 30. 6,68	214. 18. 54,55	0. 12. 13,19 bor.	idem
6 —	11. 20. 20,14	213. 55. 58,35	0. 23. 30,66 bor.*	dout. idem
7 —	11. 15. 39,52	213. 44. 41,45		la lune empêchait
8 —	11. 11. 0,6	213. 33. 32,15		de voir la plan: au Mural.

Continuation des Observations de *Junon.*

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	A. R. appar.	Déclinaison apparente	Étoiles de comparaison
10 Mai	11h. 1'.40",6	213°.11'.13",55	0°.41'. 1",57 bor.	ζ Virginis
11 —	10. 56 59,07	213. 0. 19,25	0. 44. 55,75	idem
13 —	10. 47. 42,7	212. 39. 8,25	0. 53. 24,38	idem
15 —	10. 38. 30,15	212. 18. 19,85	1. 0. 46,94	idem
16 —	10. 33. 54,2	212. 8 25,75 *	1. 4. 31,94	idem
17 —	10. 29. 18,75	211. 58. 31,65	1. 8. 5,88	idem

Observations de *Cérès.*

15 Févr.	12. 56. 16.	159. 7. 33,01	26. 4. 4,79 bor.	54. Leon. *Piazzi.*
16 —	12. 51. 29,14	158. 54. 45,91	26. 11. 28,26	idem
17 —	12. 46. 44,25	158. 42. 28,91	26. 18. 24,35	idem
18 —	12. 41. 54,26	158. 28. 56,71	26. 25. 28,45	idem
19 —	12. 37. 5,68	158. 15. 48,23	26. 32. 5,37	μ Leonis *Piazzi.*
21 —	12. 27. 28,27	157. 49. 13,83	26. 45. 11,01	idem
22 —	12. 22. 41,47	157. 36. 34,33	26. 51. 16,14	idem
23 —	12. 17. 49,29	157. 22. 39,53	26. 57 22,32	idem
24 —	12. 12. 59,35	157. 8. 59,83	27. 3. 12,47	idem
25 —	12. 8. 10,49	156. 54. 38,16	27. 8. 42,92	β Tauri. Maskel.
13 Mars	10. 52. 1,06	153. 35. 59,32	28. 5. 19,11	β II. Pollux Mask.
17 —	10. 33. 31,94	152. 55. 0,12	28. 9. 14,94	idem
18 —	10. 29. 0,94	152. 45. 43,52	28. 9. 44,6	β II. Poll. Maskel.
19 —	10. 24. 28,91	152. 36. 42,12	28. 9. 46,90	idem
20 —	10. 19. 57,45	152 28. 1,37	28. 9. 44,69	idem
24 —	10. 2. 9,46	151. 56. 41,27	28. 6. 53,37	idem
30 —	9. 36. 12,59	151. 21. 19,55	27. 55. 56,20	idem
3 Avr.	9. 19. 30,69	151. 6. 42,70	27. 44. 13,41	μ. Leonis. *Piazzi.*
4 —	9. 15. 25,08	151. 4. 4,80	27. 04. 50,31	idem
7 —	9. 3. 14,62	150. 58. 26,35	27. 29. 36,84	idam
8 —	8. 59. 14,69	150. 57. 26,15	27. 25. 30,92	idem
9 —	8. 55. 16,59	150. 56. 41,05	27. 21. 10,66	idem
13 —	8. 39. 38,39	150. 58. 33,90	27. 2. 23,28	idem
16 —	8. 28. 11,93	151. 3. 43,95	26. 46. 44,22	54. Leon. *Piazzi.*
17 —	8. 24. 26,38	151. 6. 13,05	26. 41. 11,35	k. Leonis.
8 —	8. 20. 42,68	151. 9. 13.55	26. 35. 30,27	idem
9 —	8. 16. 59,34	151. 12. 29,10	26. 29. 39,18	idem
0 —	8. 13. 19,59	151. 16. 21,82	26. 23. 44,15	idem
1 —	8. 9. 39,22	151. 20 29,97	26. 17. 26,02	idem
2 —	8. 6. 3,43	151. 25. 8,22	26. 11. 26,96	idem
4 —	7. 58. 51,08	151. 35. 26,37	25. 58. 25,73	54. Leon. *Piazzi.*
5 —	7. 55 17,77	151. 40. 57,32	25. 52. 3,77	idem

Par le manque de Tables des nouvelles Planètes, si l'on tire le moment de leur opposition du mouvement géocentrique, il résulte :

Pour *Cérès.*

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	Longit. Géoc. de Cérès	Longitude du Soleil	Tables du Bureau
18 Févr.	12. 56′. 16″,16	5. 0°. 7′. 43″,8	10ˢ. 29°. 27′. 28″. 91	
19 —	12. 37. 5,68	4. 29. 53. 47	11. 0. 27. 49,71	
	23. 55. 11,42	0. 0. 13. 56,8	0. 1. 0. 20,80	

Donc ☍ eut lieu le 19 Fevrier 1811 à 1ʰ. 39′. 25″,06 t. moyen à Wilna, alors longitude géocentr. appar. de Cérès 5ˢ. 0°. 0′. 10″,46; celle du Soleil 11ˢ. 0°. 0′. 10″,46.

Pour *Junon.*

24 Avr.	12ʰ. 16′. 32″,15	7. 4°. 12′. 32″,31	1. 3°. 49′. 6″,41
25 —	12. 12. 11,3	7. 3. 59. 33,99	1. 4. 47. 18,85
	23. 55. 19,15	0. 0. 12. 58,32	0. 0. 58. 12,44

Donc le tems moyen de l'opposition à Wilna: 24 Avril 20ʰ. 9′. 21″,95 ; alors longitude géocentrique appar. de Junon 7ˢ. 4°. 8′. 16″,1 ; celle du soleil, selon les Tables du Bureau, 1ˢ. 4°. 8′. 16″,1.

Observations de *Mars* ♂.

du s	Tems moyen à Wilna	A. R. appar.	Déclinaison australe apparente	Longitude ♂ géocentrique	Latitude australe géocentr.	Étoile de comparais.	Longit. ☉ au moment de passage ♂.
ai	12ʰ.27′.42″,35	242° 38′ 47″,55	22°.12′.15″,82	8ˢ.4°.49′. 7″,54	1°. 6′. 8″,04	δ Scorp.	1ˢ.27°. 1′.33″
-	12. 22 23,68	242. 17. 51.67	22. 11. 51,19	8. 4. 29 59,86	1. 9. 17,96	idem	1. 27. 59. 4,05
-	12. 11. 38,8	241. 34. 45,21	22. 10. 57,6	8. 3. 50 35,8	1. 15. 54,06	idem	1. 29. 54. 1,22
-	12 6. 15,48	241. 12. 41,61	22. 10. 12,83	8. 3. 30. 24,75	1. 19. 3,58	idem	2. 0. 51. 28.52
-	12. 0. 51,15	240. 50. 30,41	22. 9. 24,0	8. 3. 10. 5,31	1. 22. 13,64	idem	2. 1. 48 55,74
-	11. 55. 26,5	240. 28 12,22	22. 8. 31,38	8. 2. 49. 39,1	1. 25. 24,0	idem	2. 2. 46. 19,25
-	11. 50. 1,0	240. 5. 46,02	22. 7. 44,28	8. 2. 29. 6,95	1. 28. 43,9	idem	2. 3. 43. 38,45

Lieux héliocentriques vrais de ♂.

Jours du Mois	Observés		tirés des Tables de Triesnecher de 1805.		Erreurs des Tables	
	Longitude vraie	Latit. austr.	Longitude	Latitude	En longitude	En latitude
18 Mai	7ˢ.29°.38′. 6″,84	0°.22′.9″,9	7ˢ.29°.38′.12″,62	0°.22′.14″,6	— 5″,78	— 4″,7
19 —	8. 0. 9. 36,16	0. 23 8	8. 0. 9. 40,42	0. 23. 14,38	— 4,26	— 6,38
21 —	8. 1. 12 41,5	0. 25. 9,79	8. 1. 12. 44,84	0. 25. 13,81	— 3,34	— 4,02
22 —	8. 1. 44. 17,25	0. 26. 8	8. 1. 44. 20,96	0. 26. 13,4	— 3,71	— 5,4
23 —	8. 2. 15. 58,72	0. 27. 6,56	8. 2. 16. 1,9	0. 27. 13,0	— 3,18	— 6,44
24 —	8. 2. 47. 42,91	0. 28. 4,6	8. 2. 47. 45,2	0. 28. 12,6	— 2,3	— 8,00

Le milieu des erreurs tiré de 6 observations donne l'erreur des tables en longit. — 3″,76, en latitude — 5″,82: les tables étant corrigées de ces erreurs donnent, ce qui suit.

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	Longit. hélioc. de ♂.	Terre	le 24.
23 Mai	12ʰ. 0′.51″,45	8ˢ.2°.15′.58″,14	8ˢ.1°.49′.15″.74	8ˢ.2°.47′.41″,44
24 —	11. 55. 26,50	8. 2. 47 41,44	8. 2. 46 30,25	8. 2. 46. 39,25
	23. 54. 35,05	. . 31. 43,30	. . 57. 23,51	. . 1. 2,19

Donc ☍ ☉ ♂. eût lieu le 24. Mai 12ʰ. 53′. 22″ t. moy. à Wilna: alors la longitude héliocentrique de Mars 8ˢ. 2°. 48′. 58″,29; celle du Soleil 2ˢ. 2°. 48′. 58″,29.

Digitized by Google

Observations d'*Uranus*.

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	A. R. appar.	Déclinaison apparente australe	Étoile de compar.
4 Mai	12^h.11'.17",25	224°.38'.15",36	16°.34'.34",82 austr.	61. Virg.
7 —	11. 58. 35,93	224. 30. 44,16	16. 32. 21,54	idem
8 —	11. 54. 31,1	224. 28. 6,26	16. 31. 40,42	idem
10 —	11. 46. 20,1	224. 23. 12,96	16. 30. 15,53	idem
11 —	11. 42. 17,8 * nuage	224. 20. 27,66 * doute	16. 29. 29,85	idem
13 —	11. 34. 0,3	224. 15. 26,76	16. 28. 9,49	idem
15 —	11. 25. 50,7	224. 10. 40,96	16. 26. 44 79	idem
16 —	11. 21. 44,3	224. 8. 2,96	16. 26. 4,26	idem
17 —	11. 17. 38,25	224. 5. 40,06	16. 25. 17,82	idem

Pour 5 premieres observations ayant trouvé les longitudes et les latitudes géocentriques, et de celles-ci les longitudes et les latitudes héliocentriques vraies, on a ces deux derniers élémens tirés de l'observation. Par les Tables d'*Uranus* de Delambre publiées en 1791 par *Wurm* à Gotha ayant calculé les lieux de cette Planète, et ayant comparé les longitudes et les latitudes héliocentriques tirées des Tables avec celles, que donne l'observation, on a obtenu les erreurs des Tables suivantes :

En longit. hélioc.	En latitude hélioc.
+ 9",92	+ 34",45
+ 6,76	+ 35,7
+ 3,74	+ 35,2
+ 11,58	+ 35,7
+ 0	+ 35,37
le milieu + 6,4	le milieu + 35,28

Digitized by Google

Ayant corrigé en conséquence les Tables d'*Uranus*, et faisant usage pour le soleil de celles du Bureau, il en résulte.

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	Terre	Uranus	
7 Mai	11h.58'.35",93	7s.16°.24'.11",26	7s.16°.50'.36",18	7s.16°.50'.36",18
8 —	11. 54. 31,1	7. 17. 21. 56,41	7. 16. 51. 20,63	7. 16. 24. 11,26
	23. 55. 55,17 = m	. . 57. 45,15 = n	. . 44. 45 = p	. . 26. 24,92 = q

$\frac{qm}{n-p}$ = 11h. 5'. 18",9, donc ☍. ☉ *Uranus* eût lieu le 7 Mai 23h. 3'. 54",83 tems moyen à Wilna ; et alors la longitude héliocentrique d'*Uranus* 7s. 16°. 50'. 56",77 ; celle du soleil . . . 1s. 16°. 50'. 56",77.

Observations de *Vesta*.

Jours du Mois	Tems moyen à Wilna	A. R. appar.	Déclinais. australe apparente	Étoile de comparaison
18 Mai	12h.37 51",2	245°.11'.22",05	12°.27' 27",02	λ. Virgin. *Piazzi.*
19 —	12 32. 59	244. 56. 57,15	12. 27. 36,28	idem
21 —	12. 23. 13	244. 27. 44,95	12. 28. 18,36	idem
22 —	12. 18. 16,51	244. 12. 57,45	12. 28. 44,4	idem
23 —	12. 13. 20,78	243. 57. 55,05	12. 29. 15,71	idem
24 —	12. 8. 24,89	243. 42. 51,23	12. 29. 56,55	idem
25 —	12. 3. 29	243. 27. 48,83	12. 30. 36,64	idem
26 —	11. 58. 33	243. 12. 46,33	12. 31. 30,70	idem
27 —	11. 53. 37,5	242. 57. 36,33	12. 32. 19,31	idem
2 Juin	11. 23. 53	241. 27. 59,03	12. 40. 10,63	idem
3 —	11. 18. 57	241. 13 26,73	12. 41. 51,85	idem

Digitized by Google

L'opposition tirée des observations de 25 et 26 Mai.

Jours du Mois	Tems moy. à Wilna	Vesta	Terre	le 25 Mai
25 Mai	$12^h. 3'. 29''$	$8^s.3^o.57'.25'',5$	$8^s.3^o.44'.30'',79$	$8^s.3^o.57'.25'',5$
26 —	11. 58. 33	8. 3. 43. 1,2	8. 4. 41. 58,3	8. 3. 44. 30,79
	23. 55. 4	. . 14. 24,3	. . 57. 27,51	. . 12. 54,71

Donc l'opposition de *Vesta* eût lieu à Wilna le 25 Mai à $16^h. 21'. 18'',7$ tems moyen :

alors la longitude de *Vesta* $8^s. 3^o. 54'. 49''$.

celle du Soleil 2. 3. 54. 49.

Digitized by Google

POSITION GÉOGRAPHIQUE DE QUELQUES LIEUX DE L'EMPIRE RUSSE.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 6 Nov. 1811.

Les lieux dont je vais donner, dans ce mémoire, la latitude et la longitude, sont d'une très-grande importance pour la géographie de la Russie, étant situés dans une partie de ce vaste empire, qui n'est que peu connue, savoir au-delà du lac Baïkal, et sur les confins de la Chine. Les observations astronomiques qui ont servi à déterminer leurs positions, ont été faites depuis le 10 Octobre 1805 jusqu'au 13 Juin 1806, par le Major *Thesleff*, observateur très-habile, et avantageusement connu par plusieurs observations que j'ai communiquées à l'Académie, lequel suivit l'ambassade jusqu'à Ourga, muni des instrumens que je lui avais confiés lors de mon départ d'Irkoutsk.

La masse de ces observations est composée de plus de 3300 hauteurs correspondantes du Soleil pour vérifier

la marche du chronomètre, d'à-peu-près 1300 hauteurs *circumméridiennes* du Soleil pour déterminer la latitude, et de 250 distances de la Lune au Soleil, avec 300 hauteurs de ces deux astres, pour trouver la longitude. J'ai calculé toutes ces observations montant au-delà de cinq mille, et je n'en ai trouvé que très-peu qui dûssent être rejetées comme fautives, de sorte que je suis parfaitement convaincu de leur exactitude, et que je crois pouvoir répondre de la latitude à 2 secondes près; malheureusement, la longitude n'admet pas la même précision, par ce que le tems n'a permis d'observer aucune occultation d'étoile. Pour rendre à Mr. *Thesleff* toute la justice qui lui est dûe, il faut savoir que presque toutes ces observations ont été faites par un froid très-rigoureux, le thermomètre de Réaumur étant à Ourga toujours au-delà de 20 degrés, souvent à 24 et 25, et quelquefois même à 29 et 30 degrés.

Voici les résultats de ces observations, dans lesquels toutes les longitudes sont comptées du méridien de l'observatoire de Paris à l'orient.

I. *Ourga* ou *Kurée*, capitale de la Mongolie ou Tatarie Chinoise, résidence du *Van* (Vice-Roi Chinois), et du *Koutoukhta* (Prêtre immortel).

Dans le courant du Janvier le thermomètre était continuellement entre 20 et 30 degrés de Réaumur, et la hauteur moyenne du baromètre, avec très-peu de variation, à 24 pouces 1 ligne, mesure d'Angleterre.

Latitude = 47° 54′ 59″,0. Milieu pris d'entre 152 observations.

Longitude = 6^h 57′ 24″ = 104° 21′ 0″. C'est le milieu entre 42 distances de la Lune au Soleil, dont les résultats extrêmes sont 6^h 56′ 58″,0 et 6^h 57′ 59″,8.

II. *Troitzkosafsk*, dans le gouvernement d'Irkoutsk.

Latitude = 50° 21′ 25″. Milieu entre 359 observations.

Longitude = 6^h 56′ 49″,1 = 104° 12′ 16″,5. Milieu entre 66 distances de la Lune, dont les extrêmes donnent 6^h 55′ 38″ et 6^h 57′ 53″.

La hauteur moyenne du baromètre était de 25 pouces $9\frac{1}{3}$ lignes.

III. *Werkhnéoudinsk*, ville de district du gouvernement d'Irkoutsk.

Latitude = 51° 49′ 15″,2. Milieu entre 89 observations.

Longitude = 7^h 1′ 39″,1 = 105° 24′ 46″. Cette

longitude ne se fonde que sur la marche du chronomètre, faute d'observations de distances de la Lune.

IV. *Bargousinn*, ville de district du même gouvernement.

Latitude = 53° 36′ 29″,6. Milieu entre 139 observations.

Longitude = 7^h 8′ 25″,55 = 107° 6′ 23″. Milieu entre 18 distances de la Lune au Soleil, dont les extrêmes donnent 7^h 8′ 12″,0 et 7^h 8′ 40″,4.

V. *Tourkinnsk*, sources d'eau bouillante dans le gouvernement d'Irkoutsk.

Latitude = 52° 59′ 10″,0. Milieu entre 37 observations.

Longitude = 7^h 3′ 10″,05 = 105° 47′ 31″. Milieu entre 18 distances de la Lune, dont les extrêmes donnent 7^h 2′ 45″,5 et 7^h 3′ 33″,2.

VI. *Nertschinnsk*, ville de district du même gouvernement.

Latitude = 51° 55′ 33″,8. Milieu entre 96 observations.

Longitude = 7^h 36′ 49″,4 = 114° 12′ 21″. Milieu entre 24 distances, dont les extrêmes donnent 7^h 36′ 44″,3 et 7^h 36′ 57″,1.

Digitized by Google

VII. La grande *Mine* de *Nertschinnsk.*

Latitude = 51° 18′ 26″,7. Milieu entre 51 obvations.

Longitude = 7^h 48′ 3″,3 = 117° 0′ 50″. Milieu entre 9 distances, dont les extrêmes donnent 7^h 47′ 43″,0 et 7^h 48′ 21″,3.

VIII. *Abagaïtouyefsk, Karaoul* ou poste de Casaques, dans le district de Nertschinnsk, 4 verstes de la frontiere de la Chine, où la riviere de Kaïlas prend le nom d'Argoun.

Latitude = 49° 34′ 19″,7. Milieu entre 42 observations.

Longitude = 7^h 43′ 7″,0 = 115° 46′ 45″. Milieu entre 9 distances: les résultats extrêmes sont 7^h 43′ 1″,3 et 7^h 43′ 17″,6.

IX. *Tschindantouroukouyefsk*, petite forteresse dans le gouvernement d'Irkoutsk, sur la riviere d'Ononn.

Latitude = 50° 34′ 20″,9. Milieu entre 71 observations.

Longitude = 7^h 32′ 11″,8 = 113° 2′ 57″. Milieu entre 21 distances, dont les extrêmes donnent 7^h 31′ 50″,8 et 7^h 32′ 34″,4.

X. *Oustrellotchnoï Karaoul,* poste militaire auprès de la

réunion des deux rivieres Schilka et Argoun, dans le gouvernement d'Irkoutsk.

Latitude = 53° 19′ 35″. Milieu entre 43 observations.

Longitude = 7^h 55′ 42″,1 = 118° 55′ 31″. Milieu entre 15 distances, dont les résultats extrêmes sont 7^h 55′ 23″,4 et 7^h 56′ 13″,7.

Digitized by Google

OBSERVATIONS MÉRIDIENNES
DE LA COMÈTE DE 1811,
FAITES À L'OBSERVATOIRE DE ST. PÉTERSBOURG.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 13 Nov. 1811.

Du premier moment où cette grande comète se fit voir ici, sa déclinaison boréale surpassait l'élévation de l'équateur à St. Pétersbourg, et croissait de jour en jour, de sorte que la comète se trouvait toujours sur l'horison. Comme les observations qui se font au méridien avec l'instrument des passages et un bon quart-de-cercle, sont les plus exactes, je résolus de me borner à ces observations, tant qu'il serait possible d'en faire, en me fesant un devoir d'y vaquer chaque nuit sans aucune omission, pendant tout le tems que la comète passerait par le demi-cercle septentrional du méridien au-dessus de l'horison, c'est-à-dire, jusqu'au 20 Octobre V. St., où la comète se coucha ici pour la premiere fois. Comme il n'y a rien de plus ordinaire dans notre atmosphère, que les changemens brusques et inattendus, j'ai passé, pendant ce tems,

chaque nuit à l'observatoire, pour ne pas manquer le moment favorable; et j'ai eu la satisfaction d'attraper par ce moyen une couple d'observations, où le ciel, un moment avant et après le passage de la comète, était complètement couvert. Mais, plus souvent ma peine a été frustrée, par les nuages qui couvrent notre ciel presque continuellement dans cette saison. Toutes les observations méridiennes que j'ai pu faire, vont du 25 Août jusqu'au 15 Octobre V. St., et renferment une partie de l'orbite, dans laquelle la comète a passé par son périhélie, et décrit autour du soleil un angle de 60 degrés, dont environ 8° tombent avant le périhélie, et 52° après.

Comme le grand quart-de-cercle mural de l'observatoire est suspendu de maniere, à ne pouvoir être retourné, j'étais obligé d'employer un quart-de-cercle mobile de $2\frac{1}{2}$ pieds, fait par Sisson, lequel je plaçai dans le méridien près de l'instrument des passages, pour pouvoir observer à la fois le tems du passage et la hauteur de la comète. Afin de rendre ces observations aussi exactes que possible, j'ai observé, chaque jour où les nuages le permettaient, plusieurs étoiles, tant à la lunette méridienne qu'au quart-de-cercle, pour vérifier l'ascension droite et la déclinaison. Mais, on verra par le journal de mes observations, que ce moyen, si essentiel, surtout

Digitized by Google

par rapport au quart-de-cercle dont le fil était souvent exposé à un très-gros vent, a pareillement été frustré plus d'une fois par les nuages; de sorte que, parmi ces observations, il y a quelques-unes qui sont affectées d'une petite incertitude.

J'avais toujours espéré que je pourrais observer la comète au moment de sa culmination, surtout dans le dernier tems où, ne passant qu'une fois par le méridien, elle culminait 4 heures après le soleil, de sorte que, malgré sa faible lumière, il paraissait qu'elle devait être visible dans la lunette méridienne achromatique. Mais, malheureusement, tous les essais que je n'ai jamais manqué de faire, ont été rendus inutiles, par les nuages qui couvrent le ciel depuis un mois. Je crois donc pouvoir regarder mes observations méridiennes comme finies, et par conséquent devoir les publier. Je le ferai avec tout le détail, afin que ceux qui voudront s'en servir, pour calculer les élémens de l'orbite, soient à même de réduire ces observations, sans être obligés de se fier aux résultats que j'en ai tirés.

Vieux Style	Passage au méridien	Tems de la pendule	Hauteur	Baromètre	Thermomètre	
25 Août	Soleil	10. 57′. 20″,3	—			
	Wega	18. 31. 4,0.	—			
	Comète	22. 42. 17,46.	10°. 17′. 44″,5.	28′. 3″,7.	+ 5°,0.	
26 —	Comète	22. 46. 27,35.	—	—	—	
27 —	Capella	17. 3. 18,04.	—			
	Comète	22. 50. 43,20	8′,22 avant le passage = 11° 11′. 22″. 2,63 après = 11°. 10′. 36″; ce qui donne la hauteur mérid. 11°. 10′ 31″,03. et 11. 10. 30, 78.	27. 10,7	+ 4,5.	
28 —	Capella	17. 3. 16,82.	15. 44. 14.	27. 11,5	+ 7,8.	
29 —	Soleil	11. 11. 44,84.	—			
	Capella	17. 3. 16,55.	15. 44. 10.	28. 0,0.	+ 8,0.	
	Comète	22. 59. 41,78.	12. 6. 53.	28. 0,5.	+ 6,0.	
30 —	Soleil	11. 15. 20,36.	—			
31 —	Comète	23. 9. 23,78.	13. 2. 18.	27. 8,4.	+ 5,0.	Gros vent.
1 Sept.	Soleil	11. 27. 31,66.	—			Le 1. 2. 3. et 4. le tems était nébuleux et orageux la comète à peine visible aux fils des lunettes; et le bruit que fesait le vent, rendait très-difficile d'entendre la pendule.
	Comète	23. 14. 32,70.	13. 30. 15.	27. 10,0.	+ 3,8.	
	ψ Urs. maj.	—	15. 27. 57.			
2 —	Capella	17. 3. 17,72.	—			
	Comète	23. 19. 51,80.	13. 57. 47.	27. 9,7.	+ 1,0.	
	ψ Urs. maj.	—	15. 27. 57.			
	ω —	—	14. 8. 33.			
3 —	Comète	23. 25. 23,22.	14. 24. 45.	27. 11,2.	+ 2,8.	
4 —	Capella	17. 3. 17,83.	—			
	Comète	23. 31. 8,56.	14. 51. 26.	28. 0,6.	+ 0,1.	
	ψ Urs. maj.	—	15. 27. 47.			
	ω —	—	14. 8. 32.			
6 —	Soleil	11. 40. 30,93.				
7 —	Soleil	11. 44. 6,60.				
	Capella	17. 3. 18,52.	15. 44. 12.	27. 11,8.	+ 3,5.	

Vieux Style	Passage au méridien.	Tems de la pendule	Hauteur	Baromètre	Thermomètre
9 Sept.	Comète	24h. 3′.23″,92.	16°.56′. 6″.	28′.2″,6.	+ 2°,0.
	♆ Urs. maj.	22 59. 29,00	15. 27. 55.		
	ω —	—	14. 8. 33.		
10 —	Comète	0. 10. 36,90	17. 18. 28.	28. 5,2	+ 3,2.
11 —	♆ Urs. maj.	22. 59. 27,67.	15. 27. 54.		
	Comète	0. 18. 2,34.	17. 39. 13.5.	28. 6,3.	3,5.
12 —	Soleil	12. 2 2,30.	—		
	Capella	17. 3. 16,00.	15. 44. 11.		
	Comète	0. 25. 46,60.	17. 59. 0.	28. 6,6.	+ 2,8
13 —	Soleil	12. 5 37,60.	—		
	Capella	17. 3. 15,02.	15. 44 13.		
	Comète	0. 33. 44,52.	18. 17. 32.	28. 6,3.	+ 2,8.
14 —	Soleil	12. 9. 12,74.	—		
	Capella	17. 3. 14,06.	15. 44. 12.		
	Comète	0. 42. 0,88.	18 34 15	28 5,4.	+ 1,6.
15 —	Soleil	12. 12. 48,10.	—		
	Capella	17. 3. 12,60.	15 44. 12.		
	Comète	0. 50 32,14.	18 48. 34	28. 4,0.	+ 4,0.
16 —	Soleil	12. 16. 23,40.	—		
	Capella	17. 3. 11,84.	—		
	Comète	0. 59. 16,00.	—		
17 —	Capella	17. 3. 11,52.	—		
19 —	Capella	17. 3 10 62.	—		
20 —	Comète	1 36. 40,30	19. 27 34.	27. 10,8.	3,7.
21 —	Capella	17 3. 9,60.	15 44. 14	28 0,0	4,8.
22 —	Capella	17. 3. 0,00.	15 44 3.	28. 2,2.	+ 3,5.
23 —	Capella	17. 3. 10,00	1[illegible]. 4[illegible] 12.	28. 2,3.	+ 5,0.
	Comète	2 6. 50,42.	9. 17. 14.	28. 3,5.	+ 1,2.
26 —	Soleil	12. 52. 41,75.	—		
	η Urs maj.	1. 40 [illegible] 4.	20 11. 16.		
	γ Bootis	2 24 51,00.	9. 7. 20.		
	Comète	2. 37. 48,20.	8 37 6.	27 10.6	— 0,5.

Le 14. 15. et 16 un tems nébuleux et orageux. Le 16, la faiblesse de la lumiere de la comète ne supportait pas la moindre illumination des fils de sorte que c'est plutôt une estimation qu'une observation.

Depuis le 17 jusqu'au 26, le ciel était presque continuellement couvert, surtout pendant la nuit. Le 20 et le 23 la comète se fit voir un instant, de sorte que je ne pus l'observer qu'à un seul fil. Le 26 le ciel nébuleux rendait la lueur de la comète presqu'imperceptible.

Vieux Style	Passage au méridien	Tems de la pendule	Hauteur	Baromètre	Thermomètre
30 Sept.	η Urs. maj.	1h.40'.29",04.	—		
	λ Bootis	2. 9. 36,00.	16°.54'.12".		
	γ —	2. 24. 53,16.	9. 7. 18.		
	β —	2. 55. 13,52.	11. 6. 35.	27'.11",8.	— 5,0.
	Comète	3. 18. 42,80.	16. 54. 57.		
1 Oct.	Soleil	13. 11. 7,37.			
	Capella	17. 3. 13,38.	15. 44. 8,0.	27. 10,3.	0,2.
2 —	β Bootis	2. 55. 12,65.	—		
4 —	β —	2. 55. 11,48.	—		
	φ Hercul.	—	15. 23. 30.		
	Comète	3. 57. 23,16.	14. 23. 10.	28. 4,4.	— 4,6.
5 —	Soleil	13. 25. 56,88.	—		
6 —	φ Hercul.	4. 3. 9,92.	15. 22. 27.		
	Comète	4. 15. 27,96.	12. 50. 27.	28. 4,6.	— 3,8.
	σ Hercul.	4. 28. 21,92.	12. 47. 6.		
11 —	Soleil	13. 48. 35,94.	—		
13 —	φ Hercul.	4. 3. 10,30.	15. 23. 25.	28. 2,0.	— 7,3.
	σ —	4. 28. 22,36.	12. 47. 55.		
14 —	Soleil	14. 0. 0,56.	—		
	Capella	17. 3. 9,72.	15. 44. 9.	28. 3,0.	— 4,8.
	φ Hercul.	4. 3. 8,90.	15. 24. 5.		
	σ —	4. 28. 21,20.	12 48. 23.		
	π —	5. 8. 48,90.	7. 4. 27.		
	Comète	5. 17. 36,58.	5. 44. 7.	28. 3,5.	— 10,3
15 —	Soleil	14. 3. 50,52.	—		
	Capella	17. 3. 10,10	15. 44. 12.	28. 2,8.	— 4,2.
	φ Hercul.	4. 3. 8,96.	15. 23. 11.		
	σ —	—	12. 47. 46.		
	π —	—	7. 3. 5.		
	Comète	5. 24. 13,10.	4. 47. 0.	28. 2,6.	— 9,2.
16 —	Soleil	14. 7. 40,70.	—		
	Capella	17. 3. 9,14.	—		

de sorte que je ne pus éclairer les fils que très - peu.

Le 6, les fils peu éclairés, à cause de la faible lumière de la comète.

Les nuits du 13, 14, et 15, le ciel était serein; mais le gros vent auquel le quart-de-cercle était exposé, remuait le fil à plomb de manière qu'il était impossible de vérifier sa position. J'observai donc la hauteur de π Hercul. pour la comparer à celle de la comète, peu distante de cette étoile, sans toucher au quart-de-cercle entre les passages de ces deux astres.

Digitized by Google

Pour calculer ces observations, j'ai employé les élémens suivans.

	Ascension droite moyenne	Aberration	Nutation	Ascension droite apparente	
25 Août	277°. 38'. 24",65.	+ 10",473.	— 1",374.	277°. 38'. 33",75.	Wega
27 —	75. 41. 54,05	— 0,899	— 2,848	75. 41. 50,30	Capella
29 —	. . 54,41	— 0,082	— 2,889	. . 51,44	—
2 Sept.	. . 55,13	+ 1,960	— 2,978	. . 54,11	—
4 —	. . 55,49	+ 2,937	— 3,019	. . 55,41	—
7 —	. . 56,03	+ 4,403	— 3,081	. . 57,37	—
12 —	. . 56,94	+ 6,897	— 3,191	. 42. 0,64	—
13 —	. . 57,12	+ 7,371	— 3,213	. . 1,27	—
14 —	. . 57,30	+ 7,845	— 3,235	. . 1,91	—
15 —	. . 57,48	+ 8,318	— 3,257	. . 2,54	—
16 —	. . 57,66	+ 8,792	— 3,279	. . 3,17	—
17 —	. . 57,84	+ 9,266	— 3,301	. . 3,80	—
19 —	. . 58,20	+ 10,190	— 3,342	. . 5,05	—
21 —	. . 58,56	+ 11,113	— 3,384	. . 6,29	—
22 —	. . 58,74	+ 11,575	— 3,404	. . 6,91	—
23 —	. . 58,92	+ 12,021	— 3,426	. . 7,51	—
1 Oct.	. 42. 0,36	+ 15,515	— 3,601	. . 12,28	—
14 —	. . 2,71	+ 20,560	— 3,884	. . 19,38	—
15 —	. . 2,89	+ 20,910	— 3,904	. . 19,89	—
16 —	75. 42. 3,07	+ 21,259	— 3,925	75. 42. 20,40	—

	Déclinaison moyenne	Aberration	Nutation	Déclinaison apparente	
27 Août	45°.47′ 32″,38.	— 7″,96.	— 9″,51.	45°.47′ 14″,91.	Capella
29 —	. . 32,41.	— 7,90.	— 9,51.	. . 15,00.	—
4 Sept.	. . 32,49.	— 7,67.	— 9,51.	. . 15,31.	—
12 —	. . 32,60.	— 7,24.	— 9,50.	. . 15,85.	—
13 —	. . 32,61.	— 7,17.	— 9,50.	. . 15,94.	—
16 —	. . 32,65.	— 6,97.	— 9,50.	. . 16,18.	—
23 —	. . 32,75.	— 6,42.	— 9,50.	. . 16,83.	—
1 Sept.	—	—	—	45. 31. 12,4.	ψ Urs. maj.
5 —	—	—	—	. . 11,5.	- —
9 —	—	—	—	. . 10,6.	- —
2 —	—	—	—	44. 11. 31,2.	ω —
9 —	—	—	—	. . 31,1.	- —
26 —	—	—	—	50. 15. 40,05.	η —
30 —	—	—	—	. . 38,73.	- —
30 —	—	—	—	46. 57. 41,70.	λ Bootis
2 Oct.	—	—	—	41. 8. 42,04.	β —
4 —	—	—	—	45. 26. 23,4.	φ Hercul.
6 —	—	—	—	. . 22,8.	- —
6 —	—	—	—	42. 50. 14,4.	σ —
14 —	—	—	—	37. 2. 8,56.	π —
15 —	—	—	—	. . 8,1.	- —

Les ascensions droites donnent la marche de la pendule suivante.

	Tems de la pendule	Ascension droite apparente de l'étoile	Avance sur le tems sidéral
25 Août	18h.31′. 4″,00.	18h.30′.34″,25.	29″,75.
27 —	17. 3. 18,04.	17. 2. 47,35.	30,69.
28 —	. . 16,82.	. . 47,39.	29,43.
29 —	. . 16,55.	. . 47,43.	29,12.
2 Sept.	. . 17,72.	. . 47,61.	30,11.
4 —	. . 17,83.	. . 47,69.	30,14.
7 —	. . 18,52.	. . 47,82.	30,70.
12 —	. . 16,00.	. . 48,04.	27,96.
13 —	. . 15,02.	. . 48,08.	26,94.
14 —	. . 14,06.	. . 48,13.	25,93.
15 —	. . 12,60.	. . 48,17.	24,43.
16 —	. . 11,84.	. . 48,21.	23,63.
17 —	. . 11,52.	. . 48,25.	23,27.
19 —	. . 10,62.	. . 48,34.	22,28.
21 —	. . 9,60.	. . 48,42.	21,18.
22 —	. . 10,00.	. . 48,46.	21,54.
23 —	. . 10,00.	. . 48,50.	21,50.
1 Oct	. . 13,38.	. . 48,82.	24,56.
14 —	. . 9,72.	. . 49,29.	20,43.
15 —	. . 10,10.	. . 49,33.	20,77.
16 —	. . 9,14.	. . 49,36.	19,78.

Ces passages au méridien, combinées avec les culminations du soleil, lorsque celles de Capella sont trop éloignées l'une de l'autre, donnent, par interpolation, le vrai tems sidéral à l'instant des passages de la comète; et par conséquent, ses ascensions droites, telles qu'on va les voir.

	Passage au méridien	Corr. de la pendule	Ascension droite de la comète en tems	en degrès
25 Août	22ʰ.42′.17″,46.	— 29″,83.	10ʰ.41′.47″,63.	160°.26′.54″,45.
26 —	. 46. 27,35.	— 30,32.	. 45. 57,03.	161. 29. 15,45.
27 —	. 50. 43,20.	— 30,38.	. 50. 12,82.	162. 3. 12,30.
29 —	. 59. 41,78.	— 29,04.	. 59. 12,74.	164. 48. 11,10.
31 —	23. 9. 23,78.	— 29,68.	11. 8. 54,10.	167. 13. 31,50.
1 Sept.	. 14. 32,70.	— 29,93.	. 14. 2,77.	168. 30. 41,55.
2 —	. 19. 51,80.	— 30,11.	. 19. 21,69.	169. 50. 25,35.
3 —	. 25. 23,22.	— 30,13.	. 24. 53,09.	171. 13. 16,35.
4 —	. 31. 8,56.	— 30,19.	. 30. 38,37.	172. 39. 35,55.
9 —	0. 3. 23,92.	— 29,44.	12. 2. 54,48.	180. 43. 37,20.
10 —	. 10. 36,90.	— 28,89.	. 10. 8,01.	182. 32. 0,15.
11 —	. 18. 2,34.	— 28,34.	. 17. 34,00.	184. 23. 30,00.
12 —	. 25. 46,60.	— 27,65.	. 25. 18,95.	186. 19. 44,25.
13 —	. 33. 44,52.	— 26,61.	. 33. 17,91.	188. 19. 28,65.
14 —	. 42. 0,88.	— 25,45.	. 41. 35,43.	190. 23. 51,45.
15 —	. 50. 32,14.	— 24,17.	. 50. 7,97.	192. 31. 59,55.
16 —	. 59. 16,00.	— 23,51.	. 58. 52,49.	194. 43. 7,35.
20 —	1. 36. 46,30.	— 21,53.	13. 36. 24,77.	204. 6. 11,55.
23 —	2. 6. 50,42.	— 21,50.	14. 6. 28,92.	211. 37. 13,80.
26 —	2. 37. 48,20.	— 22,93.	14. 37. 25,27.	219. 21. 19,05.
30 —	3. 18. 42,80.	— 24,46.	15. 18. 18,34.	229. 34. 35,10.
4 Oct.	3. 57. 23,16.	— 22,52.	15. 57. 0,64.	239. 15. 9,60.
6 —	4. 15. 27,96.	— 23,24.	16. 15. 4,72.	243. 46. 10,80.
14 —	5. 17. 36,58.	— 20,60.	17. 17. 15,98.	259. 18. 59,70.
15 —	5. 24. 13,10.	— 20,26.	17. 23. 52,84.	260. 58. 12,60.

Pour ce qui regarde les hauteurs, un premier calcul m'a fait voir que l'erreur de collimation du quart-de-cercle est tel, qu'il faut augmenter chaque hauteur d'à peu près 3′. J'ai donc commencé la réduction des hauteurs, par ajouter 3′ à chaque angle mesuré; mais cette correction ne m'a servi que pour calculer la réfraction. Aprés celà, la comparaison immédiate de la hauteur de

Digitized by Google

la comète avec celle d'une étoile voisine, m'a donné la différence de leurs déclinaisons.

	Hauteur augmentée de 3′, et corrigée par la réfraction de l'étoile	 de la comète	Différence des deux hauteurs et déclinaisons	Déclinaison de l'étoile	Déclinaison de la comète
25 Août	—	10°. 20′. 44″, 5. Réfr. 5. 16,3 10. 15. 28,2.	— 5°. 28′. 23″, 0.	40°. 47′. 15″.	40°. 18′. 52″, 0.
27 —	—	11. 13 30,9. — 4. 48,4. 11. 8. 42,5.	— 4. 35. 8,7	45. 47. 15.	41. 12. 6,3.
28 —	15°. 47′. 14″. Réfr. 3. 22,8. 15. 43 51,2.	—			
29 —	15. 47. 10. — 3. 22,9. 15. 43. 47,1.	12. 9. 53. — 4. 26,4. 12. 5. 26,6.	— 3 38. 20,5.	45. 47. 15.	[illegible]2. 8. 54,[illegible]
31 —	—	13. 5. 18. — 4. 6,0. 13. 1. 12,0.	— 2. 42. 35,1.	45. 47. 15.	43. 4. 39,9.
1 Sept.	15. 30 57. — 3. 29,5. 15. 27. 27,5.	13. 33. 15. — 3. 59,6. 13 29. 15,4	— 1. 58. 12,1.	45. 31. 12,4	43. 33. 0,3.
2 —	15. 30. 57. — 3. 32,2. 15. 27. 24,8. 14. 11. 33. — 3. 52,2. 14. 7. 40,8.	14. 0. 47. — 3. 55,1. 13. 56. 51,9.	— 1. 30. 32,9. — 0. 10. 48,9.	45 31. 12,2. 44. 11. 31,2.	44. 0. 39,3. 44. 0. 42,3.
3 —	—	14 2[illegible]. 45. — 3. 46,9. 14. 23. 58,1.	— 1. 3. 26,7. + 0. 16. 17,3.	45. 31. 12,2. 44. 11. 31,2.	44. 27. 45,5. 44. 27. 48,5.

	Hauteur augmentée de 3′, et corrigée par la réfraction de l'étoile	de la comète	Différence des deux hauteurs et déclinaisons	Déclinaison de l'étoile	Déclinaison de la comète
4 Sept.	15°.30′.47″. — 3. 34,9. 15. 27. 12,1. 14. 11. 32. — 3. 55,2. 14. 7. 36,8.	14°.54′.26″. — 3. 43,7. 14. 50. 42,3.	— 0°.36′.59″,8. + 0. 43. 5,5.	45° 31′.11″,7. 44. 11. 31,2.	44°.54′.41″,9. 44. 54. 36,7.
9 —	15. 30. 55. — 3. 34,2. 15. 27. 20,8. 14. 11. 33. — 3. 53,4. 14. 7. 39,6.	16. 59. 6. — 3. 15,1. 16. 55. 50,9.	+ 1. 28. 30,1. + 2. 43. 11,3.	45. 31. 10,6. 44. 11. 31,1.	46. 59. 40,7 . . 42,4.
10 —	—	17. 21. 28. — 3. 11,2. 17. 18. 16,8.	+ 1. 50. 56,0. + 3. 10. 37,2.	45. 31. 10,6. 44. 11. 31,1.	47. 22. 6,6. . . 8,3.
11 —	15. 30. 54. — 3. 35,0. 15. 27. 19.	17. 42. 13,5. — 3. 7,0. 17. 39. 6,5.	+ 2. 11. 47,5.	45. 31. 10,3.	47. 42. 57,8.
12 —	15. 47. 11. — 3. 31,9. 15. 43. 39,1.	18. 2. 0. — 3. 4,7. 17. 58. 55,3.	+ 2. 15. 16,2.	45. 47. 15,8.	48. 2. 32,0.
13 —	15. 47. 13. — 3. 31,7 15. 43. 41,3.	18. 20. 32. — 3. 1,3. 18. 17. 30,7.	+ 2. 33. 49,4.	45. 47. 15,9.	48. 21. 5,3.
14 —	15. 47. 12. — 3. 32,1. 16. 43. 39,9.	18. 37. 15. — 2. 59,1. 18. 34. 15,9.	+ 2. 50. 36,0.	45. 47. 16,0.	48. 37. 52,0.
15 —	15. 47. 12. — 3. 28,3. 15. 43. 43,7.	18. 51. 34. — 2. 53,8. 18. 48. 40,2.	+ 3. 4. 56,5.	45. 47. 16,2.	48. 52. 12,7.
20 —	—	19. 30. 34. — 2. 45,4. 19. 27. 48,6.	+ 3. 44. 4,9.	45. 47. 16,2.	49. 31. 21,1.

Digitized by Google

	Hauteur augmentée de 3', et corrigée par la réfraction		Différence des deux hauteurs et déclinaisons	Déclinaison de l'étoile	Déclinaison de la comète
	de l'étoile	de la comète			
23 Sept.	15°.47'.12". — 3.27,2. 15.43.44,8.	19°.20'.14". — 2.51,8. 19.17.22,2	+ 3°.33'.37",4.	45°.47'.16",8.	49°.20'.64",2.
26 —	20.14.16. — 2.42,2. 20.11.33,8.	18.40. 6. — 2.57,4. 18.37. 8,6.	— 1.34.25,2.	50.15.40,0.	48.41.14,8.
30 —	16.57.12. — 3.20,8. 16.53.51,2. 11. 9.35. — 5. 5,2. 11. 4.29,8.	16.57.57. — 3.20,6. 16.54.36,4.	+ 0. 0.45,2. + 5.50. 6,6.	46.57.41,7. 41. 8.42,0.	46.58.26,9. . . 48,8.
4 Oct.	15.26.30. — 3.43,6. 15.22.46,4.	14.26.10. — 3.59,3. 14.22.10,7.	— 1. 0.35,7.	45.26.23,4.	44.25.47,7.
6 —	15.25.27. — 3.43,1. 15.21.43,9. 12.50. 6. — 4.27,9. 12.45.38,1.	12.53.27. — 4.27,2. 12.48.59,8.	— 2.32.44,1. + 0. 3.21,7.	45.26.22,8. 42.50.14,4.	42.53.38,7. . . 36,1.
14 —	7. 7.27. — 7.59,9. 6.59.27,1.	5.47. 7. — 9.29,8. 5.37.37,2.	— 1.21.49,9.	37. 2. 8,6.	35.40.18,7.
16 —	7. 6. 5. — 7.57,0. 6.58. 8.	4.50. 0. — 10.42,8. 4.39.17,2.	— 2.18.50,8.	37. 2. 8,1.	34.43.17,3.

Voici donc les résultats de mes observations méridiennes.

Digitized by Google

Vieux Style	Tems moyen de St. Pétersbourg	Ascension droite apparente de la comète	Déclinaison apparente
25 Août	11ʰ.41'.29",8.	160°.26'.54",45.	40°.18'.52",0.
26 —	. 41. 42,7.	161. 29. 15,45.	—
27 —	. 42. 1,8.	162. 33. 12,30.	41. 12. 6,3.
29 —	. 43. 8,5.	164. 48. 11,10.	42. 8. 54,5.
31 —	. 44. 56,4.	167. 13. 31,50.	43. 4. 39,9.
1 Sept.	. 46. 8,3.	168. 30. 41,55.	43. 33. 0,3.
2 —	. 47. 30,5.	169. 50. 25,35.	44. 0. 40,8.
3 —	. 49. 5,0.	171. 13. 16,35.	44. 27. 47,0.
4 —	. 50. 53,5.	172. 39. 35,55.	44. 54. 39,3.
9 —	12. 3. 24,8.	180. 43. 37,20.	46. 59. 41,5.
10 —	. 6. 41,2.	182. 32. 0,15.	47. 22. 7,4.
11 —	. 10. 10,1.	184. 23. 30,00.	47. 42. 57,8.
12 —	. 13. 57,8.	186. 19. 44,25.	48. 2. 32,0.
13 —	. 17. 59,6.	188. 19. 28,65.	48. 21. 5,3.
14 —	. 22. 19,8.	190. 23. 51,45.	48. 37. 52,0.
15 —	. 26. 55,1.	192. 31. 59,55.	48. 52. 12,7.
16 —	. 31. 42,2.	194. 43. 7,35.	—
20 —	. 53. 24,8.	204. 6. 11,55.	49. 31. 21,1.
23 —	13. 11. 36,3.	211. 37. 13,80.	49. 20. 54,2.
26 —	. 30. 39,8.	219. 21. 19,05.	48. 41. 14,8.
30 —	. 55. 42,6.	229. 34. 35,10.	46. 58. 37,8. (?)
4 Oct.	14. 18. 34,9.	239. 15. 9,60.	44. 25. 47,7.
6 —	. 28. 44,3.	243. 46. 10,80.	42. 53. 37,4.
14 —	. 59. 18,2.	259. 18. 59,70.	35. 40. 18,7.
15 —	15. 1. 58,1.	260. 58. 12,60.	34. 43. 17,3.

II.
SECTION
DES
SCIENCES PHYSIQUES.

Digitized by Google

Digitized by Google

DISSERTATIO
EXHIBENS
NOVISSIMAS PLANTAS SIBIRIAE ORIENTALIS;
AUCTORE
J. H. RUDOLPHO.

Conventui exhibita die 1 Martii 1809.

In descriptione novae speciei Fumariae (Mém. de l'Acad. T. I. pag. 379), de summis fructibus ex itinere cl. viri *Redowski* pro augenda re botanica expectandis, egi: at eheu! in terra remotissima mortem subitaneam obiit amicus noster amantissimus. *Molliter ossa quiescant.* —

Facile quiscunque mecum in memoriam revocet Ciceronis *) dicta: *Si oppetenda mors esset, domi atque in patria mallem, quam in externis atque alienis locis.* Lugubre dolemus obitum illius, meliora sperantes.

Thesauri rerum naturalium imprimis ad rem herbarian spectantium, a beato *Redowsky* collectarum, post fata illius, pars continens plantas siccas in Sibiria orientali et

*) Epist. famil.

Davuria habitantes, quarum plures putredine, proh dolor! erant confectae, ad nos pervenit: nullibi vero de proprio loco natali aliisque notatu dignis, schedulam vel ullam animadversionem collectoris inveni.

Plantis istis, beati *Redowsky* reliquiis, sedulo exploratis; novas sive nondum descriptas cum rei botanicae cultoribus communicare, triadem pro ratione dissertationes, ex pluribus aliis selectam, in medium nunc ferre, meum esse arbitror.

Campanula expansa.

C. glabra; caule simplici, foliis linearibus integris. Laciniis corollae dispessis (expansis).

Descriptio.

Radix gracilis, fibrosa, repens? Rudimenta tantum sunt relicta.

Caulis simplex, ex protuberantia exili rhizomatoidea adsurgens, dein strictus, spithamaeus et dodrantalis, superne nudus floresque ferens terminales.

Folia: *radicalia* in omnibus speciminibus nulla, *caulina* linearia, integerrima, costa prominente pagina inferiori pallidiora: ima brevissima, saepius foliorum rudimenta: sursum sensim majora, pollices fere duos longa et lineam unam ad lineas duas lata,

horizontalia, sessilia, ad basin cuneata sive angustiora, ad apicem lanceolato - acuminata. Folia superiora magnitudine decrescentia.

Flores penduli, raro tres (plurima specimina sunt monantha); coerulescentes, suffulti bracteis angustissimis, longitudine pedunculorum et calycis.

Pedunculi breves, in gyrum deflexi.

Calyx ad normam generis; laciniis quinque, subulatis, patentibus.

Corolla ad basin fere usque quinquefida (in speciminibus nonnullis quadrifida), laciniis dispessis, lanceolatis, acutis. Quae itaque formam ferens fere corollae rotatae, magis vero expansae (ne critici censores irascantur); nomen triviale huic speciei accomodatum, suppeditavit.

Nectarium, Stigma, Stamina, Pistillum ad normam generis *Capsula* et *Semina* in nostris speciminibus nulla.

Obs. Miror, quod neque *Ammanus* neque alius peregrinatorum botanicorum hanc singularem Campanulae speciem meminerit.

Sedum cyaneum.

S. foliis planis, sublinearibus, integris, sessilibus; cyma foliosa; caulibus simplicibus.

Descriptio.

Caudex descendens herbaceus, procumbens, radicans, nudus.

Caudex adscendens ramis adsurgentibus, purpurascentibus, simplicibus, foliosis, 2 — 3 pollices longis.

Folia integerrima, sparsa, sessilia (in ramis sterilibus conferta, lanceolato-acuminata, terminalia), linearia obtusa, glauca punctis purpureis notata, margine hyalino.

Flores cymam umbellatam, paucifloram, fastigiatam colligunt; pedunculis glabris stritis foliolisque forma foliorum caulis obsitis.

Calyx 5-partitus, laciniis angustis, acutis, glauco-purpurascentibus.

Corolla pentapetala: petalis oblongo-acuminatis, patulis, calyce multo majoribus, cyaneis.

Nectaria (re vera *Glandulae*) quinque, minima, pallescentia, oblonga, integra, ad basin ovariorum.

Stamina decem; *filamentis* subulatis, atro-purpureis, petalis pistillisque majoribus. *Antherae* rotundatae, erectae, nigrae, angulatae quatuor segmentis, pollen sulphureum continentes; dehiscentes ineunt similitudinem capsulae maturae Marchantiae cruciatae

Germina 5, approximata, basi gibba, purpurascentia; *Stigmatibus* subulatis, reflexis, acuminata.

zed by Google

Capsula et *Semina* in nostris speciminibus nulla.

Adnotatio

I. Quantumvis specimina nostra plura, caule gaudent simplici: veruntamen perplures ex uno caudice enasci caules, probat specimen (Fig.) et adfine S. Anacampseros.

II. Sedum coeruleum *Vahlii* Symb. II. p. 51, proxime accedit ad similitudinem Sedi nostri; differt vero; foliis basi solutis et cyma bifida; adde: nullos in nostro esse ramos altitudine et structura caulis, neque folia teretia, neque pedunculos divaricatos, flexuosos nec pedicellos alternos patentissimos.

III. Sedum coeruleum L. (Mant. p. 241.), primus notavit *Hallerus* (Hort. Gott. p. 135.), nomine: Sedum africanum, flore caeruleo, hexapetalo et heptapetalo, adjecta littera *r* indicit: hanc plantam hortulanorum incuria et perfidia periisse. *Willich* (in observationibus de plantis Gott. 1762. p. 29. n°. 58.) nonnihil ulterius exposuit characterem: *Folia ut in Sedo albo L. obtusa, teretiuscula, sessilia, alterna. Sed flores gerit non ramis ramosis uti album, sed in ramis simplicibus, brachiatis, praelongis, racemosos eleganter coeruleos.*

Neque *Zinn* (catal. plant. horti et agri Gott.), neque *Murray* (Prodr. designat. stirp Gott.) meminerunt hanc plantam; *Linnaeus* ipse et in Specierum editione utraque et in Systemate naturae omisit plantam dubiam, quam fidè Willichii adsumserat. *Reichard* (Syst. plant. T. II. p. 384. n°. 14.) memoriam renovare studuit patriamque dedit *Promontorium Cap. b. Spei*, ubi et solertissimus botanicus cl. *Thunberg* ne vestigium ullius Sedi vidit. Forsan optime plantam hanc obscuram *Sedo heptapetalo* adscripsit cl. *Lamarck* Diction. bot. Vol. IV. p. 630, et cl. *Persoon* Synops. pl. I. p. 512. n°. 12.

IV. A Sedo coeruleo *Vahlii* nihil differt: Sedum azureum *Desfont.* Flor. Atlant. Tom. I. p. 362, teste auctore ipsissimo; est una eademque planta in uno eodemque loco ab his botanicis summis collecta.

V. S. anacampseros L. foliis cuneiformibus, supremis ovatis: cymis ovatis satis est distinctum.

VI. Icon S. coerulei *Vahlii* in itinere *Shawii* (Edit. germ. Lips. 1765, 4°. p. 402. n°. 241. t. 25.) perquam rudis refert magis paniculam quam cymam foliis caulinis oblongis apice callosis.

Digitized by Google

Pedicularis longiflora.

Caule ramoso, foliis pinnatifidis, pinnis repandis crenulatis; calycibus subbilabiatis oblongis; corollae tubo longissimo.

Descriptio.

Caudex tuberosus, *descendens:* format radices nonnullas cylindraceas, obliquas, 3—5 pollices longas, fibrillis remotis ad morem plurium plantarum aquaticarum.

Caudex adscendens, est truncus herbaceus, ramosus; ex rhizomate exsurgunt in nonnullis speciminibus, caules nudi, flexuosi, foliis floribusque terminalibus; in plurimis est truncus unicus, subangulosus, ramosus.

Folia radicalia longe petiolata, lanceolato-linearia, margine repando-crenulata. *Caulina* alterna, pinnatifida, pinnis confluentibus, crenulatis.

Flores terminales bini et terni raro simplices, ex axillis petiolorum membranaceorum dilatatorum, coloris sulphurei.

Calyx axillaris, pedunculatus, oblongus, subbilabiatus, segmentis crenatis.

Corolla monopetala, ringens: *Labium superius* incurvatum, ad basin compressum, ventricosum, lacinulis por-

rectis obtusis; dein in tubum, apice oblique truncato, subulatum, incurvum subiens. *Labium inferius* patulum, semitrifidum, lobis emarginatis, intermedio angustiori. Tubus corollae gracilis, cylindraceus, longissimus, pollices duos et ultra longus.

Nota. Quis adspiciens tubum istum, non meminerit Mirabilem longifloram? Quae et ansam dedit denominationis plantae describendae.

Stamina didynama, sub ventre galeae recondita non excedentia galeam uti in Rhinantho orientali.

Germen subrotundum. *Stylus* filiformis, tubum galeae excedens. *Stigma* inflexum, turbinatum s. pyriforme.

Capsula calyce persistente, oblonga, compressa, mucronata, superne planior inferne subventricosa, bilocularis dissepimento contrario, apice dehiscens.

Semina — proh dolor! imperfecta.

Habitat, teste cl. *Adams*, comite peregrinatoris nostri per plures regiones, ad lacum Baicalensem.

Respuunt characterem primarium genericum Pedicularidis a clarissimis botanicis acceptum, scilicet: calycem 5-fidum; plures species sub genere Pedicularidum militantes; v. g. P. palustris, euphrasioides, spicata, resupinata, lapponica, striata, canadensis et nostra.

Quid interest separare hasce species et peculiare genus constituere? Si quis velit itaque genus proprium stabilire, non repugnabo; at novo generi malim supponere memoriam botanici indefessi ac eheu! infelicis *Redowski*. Sequutus vestigia clarissimorum botanicorum *Schreberi* et *Willdenowii*, nolui esse asseclam recentiorum plurium botanicorum, ex nonnullis haud eminentibus saepe futilibus differentiis, neglecto habitu generico, novum genus conficientium: adnumeravi proinde speciem nostram perquam singularem Pedicularidum generi, quantumvis flos accedat ad summam similitudinem *Rhinanthi orientatis*; attamen Calyx, Capsula et habitus plantae totius vetant ad hocce genus referre. An planta hybrida? —

Explicatio Tab. II.

Campanula expansa.

Fig. I. Totam plantam in magnitudine naturali repraesentat.

a. Protuberantia rhizomatoidea. *b.* Stigma clausum.

Fig. II. Caulis triflorus a latere, flores inferiores jam erant emarcidi.

a, a, a. Bracteae. *b, b.* Pedunculi deflexi.

c. Stigma expansum tripartitum.

Fig. III. Corollam sistit quadrifidam.

Tab. II. *Sedum cyaneum.*

Fig. I. Planta in naturali magnitudine.
a. Caudex descendens. *b*. rudimentum caulis.
c. Folia radicalia oblonga, acuminata, imbricata.
d. Caulis adscendens. *e*. Pedunculi cum foliolis.
Fig. II. Alia plantula cum surculo (*a*) folioso.
Fig. III. Calyx et Corolla, magnitudine aucta.
Fig. IV. Germina cum glandulis subjectis, forma aucta.
Fig. V. Filamentum cum Anthera.
Fig. VI. Figura eadem magis aucta.
Fig. VII. Folium auctum cum margine hyalino.

Pedicularis longiflora. Tab. III.

Fig. I. Plantam sistit secundum magnitudinem naturalem.
a. Caudex tuberosus.
b, b, b. Folia radicalia. *c, c*. Caules radicales laterales.
d. Truncus plerumque solitarius.
Fig. II. *a*. Calyx. *b*. Tubus. *c*. Labium inferius. *d*. Labium superius subulatum s. galea.
Fig. III. Labium superius dissectum et auctum.
a. Pars gibbosa antheras recondens.
b. Lacinula prominens obtusa ad faucem.

c. Stigma turbinatum ex orificio tubi galeae prominens.

IV. Fig. Florem sistit a tergo.

V. Fig. Truncum refert capsulasque in elongatis pedunculis.

VI. Fig. Capsula aucta forma secundum longitudinem dissecta, *a.* mucro ad apicem. *b.* Dissepimentum contrarium.

EXAMEN ULTÉRIEUR DES CRISTAUX DE SÉLÉNITE DE POLTAWA.

PAR

B. SEWERGUINE.

Présenté à la Conférence le 16 Janv. 1811.

Le gouvernement de Poltawa est peu connû pour sa partie minéralogique. Des argiles, quelques indices d'albâtre, des pierres de grés, des cailloux, de la tourbe, des terres salpetrées, c'est presque tout ce qu'on en sait. Peut-être même que par une suite de la nature du sol qui est de formation tertiaire, ce pays n'est pas assez riche en diflérens produits minéraux.

Cependant un des élèves de l'institut pedagogique, Mr. *Corounoffsky*, y a trouvé récemment de très beaux cristaux de sélénite, dont il a envoyé quelques échantillons à l'Académie.

En les ayant soumis à un examen ultérieur, ils m'ont parû meriter d'en faire ici une mention particuliére tant pour completer l'histoire naturelle de ces corps, que pour celle du pays dont on les a retiré.

Les cristaux dont je vais donner ici une déscription,

sont au nombre de Seize. Les tous solitaires et bien caracterisés, pour la plûpart de la longueur d'un pouce, quelques uns transparens, mais presque tous de couleur jaune sâle.

Les variétés principales en sont celles de la chaux sulfatée trapèzienne, prismatoïde et lenticulaire dans le sens que les prend le celèbre *Haüy*.

Et comme il m'a parû que ces variétés principales se rapprochent, par gradation, l'une de l'autre, de sorte que le cristal trapèzien se raccourcit pour former la variété prismatoïde, et cette dernière s'applatit pour former la lenticulaire, c'est encore sous ce point de vue que je les envisage en les distribuant en familles suivantes.

Déscription des cristaux.

A.

Chaux sulfatée trapèzienne.

Trois variétés, qui se rapprochent de celles de la trapèzienne.

1) allongée.
2) élargie.
3) Hémitrope.

B.

Chaux sulfatée prismatoïde.

4) Prisme à 6 pans, dont les deux cotés sont plus larges que les quatres autres, terminé aux deux extrémités par un pointement à 4 faces placés sur les quatre bords latéraux, qui terminent les deux faces plus larges.

5) Le même terminé aux deux extrémités par un pointement à 3 faces, dont l'une est plus large que l'autre, et celle ci plus que la troisième.

6) Le même terminé aux deux extrémités par un pointement à 3 faces, dont l'une est convexe.

7) Le même terminé aux deux extrémités par deux faces, et qui se rapproche du trapézien alongé. *Cristal intermédiaire.*

8) Le même terminé aux deux extrémités par 3 faces, dont deux sont plus larges que la troisième.

9) Le même.

10) Le même, dont quatre faces latérales opposées sont convexes, terminé aux deux extremités par un pointement à 3 faces, dont deux sont plus larges que la troisième.

NB. Les faces latérales de ces variétés sont d'une largeur presque égale.

11) Le même dont deux faces latérales opposées sont plus larges, et deux très étroites, terminé par un pointement à 3 faces, dont une est très petite et convexe.

C.

Chaux sulfatée lenticulaire.

Prismes applatis.

12) Prisme à 6 pans applatis, terminé aux deux bouts par trois faces. — Quatre faces latérales opposées sont convéxe.

13) Le même à faces latérales planes.

14) Le même très court dont une des faces est beaucoup plus large que les deux autres.

16) Le même à 4 pans opposés convéxe, terminé aux deux bouts par trois faces, dont une est plus large que les deux autres.

17) Le même maclé.

Observations particulières.

J'ai déja dit que quelques unes de ces variétés sont transparentes et de couleur blanchâtre, particulièrement celles de la variété prismatoïde. Les autres sont d'une couleur jaunâtre sâle. Quelques unes sont irisées, il y en a aussi de nacrées. Leur attouchement est

gras, et la lueur grasse à la surface des cristaux tandis qu'elle est vitreuse dans l'intérieur.

Mais ce qu'il y a de particulier dans ces cristaux, c'est qu'ils font sentir quelque saveur styptique, étant mis sur la langue, ce qui n'a point été remarqué dans les variétés blanches. Du moins c'est un des caractères de ces cristaux de Poltawa.

Gissement et localités.

C'est dans une terre argilleuse blanchâtre que se trouvent ces cristaux parsemés, et dont ils sont récouverts ordinairement, mais dont ils se laissent aisément dégager. Leur gissement est près d'un village nommé Petrowka 10 werstes de la ville Poltawa, dans un sol un peu élevé argilleux avec des couches de gypse et de pierre de grès; ils sont accompagnés de pétrifications de Belemnites. Tout l'endroit est rempli d'excavations, apparement par la suite de la décomposition des couches de gypse, operée par les eaux qui s'infiltrent à travers les couches.

Ces excavations ont quelque fois jusqu'à 10 et plus de sajènes de profondeur et se trouvent remplies de débris de granits, de gneiss, de Quartz et de pierres de grès roulés.

Digitized by Google

Les granits sont à gros grains, et consistent de Feldspath rougeâtre, de Quartz et de mica brunâtres.

Enfin outre l'argile blanche et assez fine, on y trouve des couches argilleuses rouges et jaunâtre.

Formation.

L'eau en s'infiltrant à travers les argiles, dissout la matière séléniteuse, et trouvant dans son passage un vuide où il puisse rester en repos, depose la matière, qui par des circonstances favorables prend une forme cristalline, tandis que par une chute plus violente et en entrainant une plus grande quantité de matière gypseuse dissoute, elle occasionne des excavations plus ou moins profondes, ce qui lui est d'autant plus facile que les couches sont argilleuses, qu'elle ramollit et renverse en même tems, de sorte qu'il est à presumer que ces cristaux sont de formation encore plus récente, que celle des couches où ils se trouvent.

DÉSCRIPTION D'UNE NOUVELLE ESPÈCE DE QUADRUPÈDE DU GENRE MARTE.

PAR

A. SEWASTIANOFF.

Présenté à la Conférence le 23 Janvier 1811.

Dans la collection, vraiment précieuse d'objets d'histoire Naturelle, rassemblés pendant le voyage autour du monde de Mr. le Capitaine de la flotte du premier rang et Chevalier *Krusenstern* et envoyés par les héritiers du defunt Chambellant et Chevalier *Résanoff* à l'Académie Impériale des Sciences, il se trouva un quadrupède du genre Marte, tellement endommagé par les teignes, qu'à peine eu-je le tems de le faire dessiner, parce que les poils tomboient en flocons a la moindre traction. J'en donne ici le dessin, et la déscription aussi détaillée, qu'il m'étoit possible de faire d'aprés un animal empaillé.

Tab. IV. Sa grandeur est celle de la Marte rousse de Sibérie (Mustela Sibirica L.) nommée en russe Колонокъ (Kolonok); mais par son port extérieur il approche plutôt de l'Hermine (Mustela erminea L.); il en differe cependant

Digitized by Google

par plusieurs caractères saillants, comme on le verra par la déscription suivante.

Les poils qui couvrent le dessus du corps et les quatre pieds sont d'un fauve-clair, avec une teinte très foible de jaune verdâtre. Le haut de la tête, le front, la nucque sont d'une couleur brune noirâtre, et la partie supérieure du chanfrein presque noire. La machoire inférieure jusqu'à la lèvre et le tour de la racine des oreilles sont d'un blanc tirant sur le jaune; les joues portent quelques poils d'un brun clair. Entre les yeux il-y-a une tâche blanche presque quarrée un peu arrondie par en bas. Les oreilles sont plus longues que ceux de l'Hermine, elles ont la même forme, mais le poil qui les couvre est très court, tandis que dans l'Hermine il est assez touffu.

Le ventre et tout le dessous du corps, ainsi que la partie intérieure des pieds est d'une jaune blanchâtre, et chez l'Hermine toutes ces parties sont blanches, même pendant l'été. Tout le poil du corps est très luisant et ras. Le bout de la queue porte une touffe de poils noirs qui n'a pas plus d'un pouce de longueur; la queue y compris cette touffe, en a 8 et $\frac{1}{2}$. Il y a cinq doigts à chaque pied; les ongles en sont très aigus, applatis par les cotés et d'une couleur blanche; le poil de la queue

est court, couché, excepté le flocon noir de son bout, qui est touffu, et dont les poils sont plus longs. Le corps de l'animal, depuis le bout du nez jusqu'à la racine de la queue a 12 pouces ou un pied anglois.

Seba a décrit dans son Thesaurus rerum naturalium une marte de Java, qui a le bout de la queue aussi noir; mais dans sa déscription qui est très courte, il ne fait aucune mention de la couleur des autres parties du corps. A juger d'après la figure mentionnée la Marte de Java a la queue proportionnellement plus courte que celle de l'Animal que nous décrivons, et en général il paroit plutôt avoir le port d'une Marte Zibeline que celui de l'Hermine. *Valentin* dans sa déscription des Indes lui donne le nom de Kayer-angan.

Son Excellence Mr. de *Pallas*, dans sa Fauna Rossica actuellement sous presse, p. 92, article de l'Hermine fait mention d'une espèce de Marte, qu'il a vu empaillée a Amsterdam dans la collection du Marchand *Meyer*. Il la regarde comme une variété de l'Hermine, et dit qu'elle a été envoyée des Indes Orientales. Voici ses propres termes: „Ipsum enim Saebae specimen ex India adlatum vidi quondam Amstelaedami in Museo amici mercatoris *C. P. Meyer* et non potui non pro varietate Erminei

Digitized by Google

agnoscere." Il ajoute après ce passage dans une note: „Specimen illud cum Ermineo tunc contuli, et formae nullam omnino diversitatem deprehendi: Colore diluti rufo, paulo ab aestivis Europaeis diverso erat, subtus album, ut et pedes interius et digitorum apices. Arcus obsoletus albus inter oculos transversus. Caudae apex e ferrugineo-ater. Majores nostrates aequabat. *Valentin* l. c. drodidit in montibus insularum Java et Borneo vulgarem esse; cicurari ad capiendos glires et pugnaturam cum serpentibus corpus inflare."

Je laisse aux naturalistes plus habiles que moi à décider si l'animal dont je présente au public la déscription doit former une espèce particulière; mais je suis enclin à le croire et voici mes raisons. Les caractères distinctifs specifiques de quelques espèces de ce genre sont très peu saïllants; prenons pour exemple la Fouine et la Marte commune; il n'y a qu'un très petite différence du pelage de leurs corps et les taches de la gorge, qui blanche chez l'une et jaune-blanchâtre chez l'autre, servent à les distinguer entre elles; il faut y ajouter encore que l'espèce de la Marte vulgaire s'est propagée plus loin vers le nord. Mais le caractères spécifiques, par lesquels l'Hermine du nord ou le Roselet diffère de l'espèce

que j'ose régarder comme nouvelle, sont plus tranchants et en plus grand nombre.

1. La longueur du corps de notre Marte, qui a 12 pouces depuis le bout du nez jusqu'à la racine de la queue, surpasse celle de l'Hermine qui ne parvient jamais en longueur au dela de 10 pouces et demi.

2. Sa queue est aussi en proportion plus longue que celle du roselet, qui n'a que 4 pouces, celle de notre animal en ayant 8.

3. Le poil de la partie inférieure du corps, ainsi que de l'intérieur des pieds est d'une fauve clair, tandis qu'il est tout-à-fait blanc chez l'Hermine.

4. Notre animal en diffère particulièrement par la tache transversale blanche et presque carrée, située entre les yeux; et les taches d'un blanc sale, qui bordent la racine des oreilles, et qui ne peuvent pas être produites accidentellement, surtout la première, parceque le Kangerangan de Java et de borneo du Musée de *Meyer*, et la Marte de Bresil que nous décrivons ici conservent constamment ce caractère distinctif.

5. Cette dernière diffère aussi de l'Hermine par le pélage du dessus du corps, que l'Hermine a plus foncé ou d'un brun-marron en été.

Digitized by Google

6. Il habite aussi un climat infiniment plus chaud, et par conséquent il est plus que probable, que son poil conserve la même couleur dans toutes les saisons. Il me semble donc que cet animal, naturel au pays situé entre les tropiques et n'outre-passant jamais ces bornes, parce qu'on ne l'a vu jusqu'à ce tems que dans les montagnes des Isles de Java et de Borneo et dans le Bresil, d'où l'on a apporté celui que je décris maintenant, forme une espèce tout-à-fait distincte de ses congenères, et est plutôt le représantant de nôtre Hermine du Nord et des contrées temperés de l'Europe, comme le Cougouar ou le Puma et le Jagouar sont les représentans de nos Tigres et de nos Léopards dans le nouveau Monde. Je n'ai pas eu l'occasion de lire la déscription des Hermines ou Roselets des Isles Molluques, dont le Savant illustre, cité ci-dessus, fait mention dans son premier voyage en Russie *); mais *Buffon* dit positivement que les Hermines sont rares dans les pays, même temperés, et ne se trouvent point dans les pays chauds. En effet il est très difficile de concevoir, comment la même espèce qui habite les contrées les plus froides de notre Hemisphère, telles

*) Voyage de *Pallas* Tom. I. pag. 229, dans une note, traduction françoise.

que la Norvège et la Lapponie, puisse habiter les pays chauds situés entre les tropiques; ou que l'Hermine du Nord, dont la ferocité et le naturel sauvage sont connus de tout le monde, eut été transporté dans ce dernier pays, et s'y étant propagé, y a formé une varieté de son espèce.

L'homme seul habite tous les climats, et ceux des mammiferes qui, étant domptés par ce maître de la Nature, dociles et fidèles compagnons de son sort et de ses destinées, le suivent partout, partagent ses fatigues et s'accoûtument sous sa main protectrice à supporter également les glaces du cercle polaire et le ciel brûlant de la zone torride; ou ces êtres charmants et legers, doués des organes propres à les transporter à des distances immenses dans les vastes régions des airs, qui nonobstant le changement des saisons, jouissent presque toujours de la même température, en abandonnant les contrées qu'ils trouvent ou trop chaudes ou trop froides pour leur existance, et en se rendant en troupes vagabondes dans d'autres et s'y domiciliant pour quelque tems; ou bien ces animaux à sang froid, habitants du vaste Océan, ou de l'élément fluide des eaux, dont la température est peu sujete à varier, et que nous nommons poissons. Enfin sans entrer à ce sujet dans des discussions plus longues, je me

bornerai à exposer les caractères spécifiques de cette nouvelle espèce, si c'en est une, qui sont les suivants :

Mustela corpore supra dilute-rufo in viride vergente, subtus dilute flavo; cauda longa, apice nigro, macula inter oculos transversa sub-quadrangularis.

CAMPANULAE
CAPENSES
DESCRIPTAE ET DEPICTAE
A
C. P. THUNBERG.

Conventui exhibitae die 10 Aprilis 1811.

Externo habitu, imprimis foliatione, pleraeque *Campanulae*, quae campos Promontorii bonae spei exornant, a ceteris congeneribus abludunt; et singulare omnino est, quod, diem in hisce terris, major pars vegetabilium frutescere solet, Campanularum species, fere omnes, sint tenerrimae, herbaceae, debiles, foliis tenuissimis instructae.

Campanula *peregrina* hujus regionis certe incola non est; *fructicosa* et *prismatocarpos*, a *Willdenowio*, in spec. Plant. I. p. 912 et 913. memoratae, ambae mihi incognitae sunt, et *porosa* rectius ad Samolum referri debet. Praeter *hispidulam* et *Capensem* reliquae omnes a memet, ut novae, detectae fuerunt, quales jam proponuntur Botanophilis descriptae, delineataeque; quales mihi in patica ipsarum obvenerunt olim.

A cognatis generibus Campanula dignoscitur:

Corolla campanulata, fundo clausa valvulis staminiferis.
Stigmate trifido.
Capsula infera, poris lateralibus dehiscente.

Specierum *Characteres:*

1. C. *capillacea:* foliis lineari-filiformibus integris glabris.
2. C. *linéaris:* foliis linearibus integris glabris, caule erecto.
3. C. *fessiliflora:* foliis linearibus integris glabris, ramis cernuis.
4. C. *cinerea:* foliis lanceolatis integris glabris, caule lanato.
5. C. *ciliata:* foliis lanceolatis ciliatis; floribus solitariis, caule glabro.
6. C. *adpressa:* foliis lanceolatis ciliatis, panicula decomposita.
7. C. *subulata:* foliis lanceolato-trigonis ciliatis, floribus paniculatis.
8. C. *hispidula:* foliis lanceolatis, ramis diffusis hispidis.
9. C. *paniculata:* foliis lanceolatis undatis hirtis, caule paniculato.
10. C. *tenella:* foliis ovatis integris dentatisque, caule decumbente.
11. C. *unidentata:* foliis lanceolatis denticulatis, caule simplici.

12. C. *fasciculata:* foliis ovatis denticulatis, caule frutescente.

13. C. *bracteata:* foliis trigonis integris, bracteis ovatis ciliatis.

14. C. *stellata:* foliis ternis linearibus, floribus axillaribus.

15. C. *undulata:* foliis lanceolatis undatis glabris, caule calycibusque glabris.

16. C. *capensis:* foliis lanceolatis dentato-undatis hirtis, calycibus hispidis.

17. C. *cernua:* foliis ovatis undatis villosis, calycibus glabris.

18. C. *procumbens:* foliis ovatis crenatis glabris, caule decumbente.

Tab. V. 1. C. *capillacea.* Linn. Supplement. p. 139.

Lightfootia subulata. Willdenow. Spec. Plant. T. I. P. 2. p. 888.

Caulis teres, brevissimus, prope radicem ramosus, totus glaber, erectus.

Rami subradicales plures, filiformes, flexuoso-erecti, simplices, pedales.

Folia sparsa, filiformi-linearia, integra, margine revoluto, in axillis foliosis aggregata, patula, unguicularia.

Flores terminales, subracemosi, coerulei.

Pedunculi capillares, uniflori, cernui.
Calyx glaber laciniis setaceis.
Stigma trifidum.

2. C. *linearis*. Willdenow. Spec. Plant. I. p. 895. Tab. V.
Crescit in sabulosis campis prope Heeren Logement.
Floret Octobri.
Caulis annuus, filiformis, simplex, flexuoso - erectus, purpurascens, glaber, palmaris.
Folia alterna, linearia, marginata, integra, glabra, patula, remota, unguicularia.
Flores subpaniculati, albi.
Pedunculi et *pedicelli* capillares, floriferi cernui, fructiferi erecti.
Bracteae foliis similes.
Calyx et *Capsulae* hispidae pilis albis.

3. C. *sessiliflora*. Willden. Sp. Pl. I. p. 896. Tab. V.
Caulis herbaceus, teres, erectiusculus, pedalis.
Rami prope radicem saepe aggregati, elongati, subsimplices, subangulato - filiformes, purpurascentes, tenuissime villosi, apice nutantes.
Folia sparsa, sessilia, linearia, integra margine reflexo, patentia vel parum reflexa, glabra, unguicularia.

Flores versus summitates axillares, subsessiles, alterni, erecti, albi.

Stigma trifidum.

Tab. VI. 4. C. *cinerea.* Willdenow, Spec. Pl. I. p. 906.

Crescit trans Swellendam in campis graminosis.

Floret Octobri et sequentibus mensibus.

Caulis basi suffruticosus, teres, cinereo-tomentosus, pedalis.

Rami aggregati, sparsi, inaequales, patulo-erecti.

Folia subfasciculata, sessilia, lanceolata, integra margine revoluto, imbricata, glabra, unguicularia.

Flores in apicibus ramorum terminales, subsessiles, solitarii, albidi.

Calyx hirsutus.

Stigma trifidum.

5. C. *ciliata.* *Caulis* filiformis, subsimplex, erectus, glaber, apice ramosus, debilis, pedalis.

Folia glomerata, lanceolata, acuta, ciliata, margine revoluta, glabra, lineam longa.

Flores in ramis terminales.

Tab. VI. 6. C. *adpressa.* Willdenow Spec. Plant. I. p. 905.

Caulis teres, vel a foliis decurrentibus striato-angulatus, simplex, totus glaber, erectus, pedalis et ultra.

Digitized by Google

Folia sparsa, sessilia, decurrentia, lanceolata margine re-revoluto, dentata, basi ciliata ciliis albis, recurvata, unguicularia.

Flores in superiori caule aphyllo paniculati.

Paniculae alternae, supradecompositae.

Pedunculi filiformes, erecti.

Pedicelli capillares.

7. C. *subulata.* Willden. Spec. Pl. I. p. 906. Tab. VI.

Crescit in montibus prope Hex-rivier.

Floret Octobri, Novembri.

Caulis herbaceus, filiformis, purpurascens, glaber, erectus, ramosus, sesquipedalis.

Rami sparsi, elongati, capillares, glabri, supra aphylli.

Folia sessilia, subfasciculata, trigono-lanceolata, subulato-acuta, marginata, basi ciliata, apice reflexo-patentia, inaequalia, unguicularia.

Flores terminales, paniculati.

Pedunculi et *pedicelli* capillares, glabri, divaricati.

Corollae minutae calycibus glabris.

8. C. *hispidula.* Willden. Spec. plant. I. p. 906.

Crescit in Swartlandiae collibus sabulosis.

Floret Septembri.

Caulis herbaceus, uti tota planta hispidus, brevissimus, saepe vix pollicaris, interdum palmaris.

Rami vel nulli, vel rari e radice et simplices, vel ramosi et diffusi, teretes, scabri, cinereo-purpurascentes.

Folia alterna, sessilia, lanceolata, integra margine reflexo, margine et costa ciliata ciliis albis.

Flores terminales, erecti, coerulei et albi.

Laciniae calycis similes foliis, longitudine corollae florentis.

Antherae lineares, sagittatae, erectae.

Stigma trifidum.

Capsulae valde hispidae ciliis cartilagineis niveis.

Tab. VII. 9. C. *paniculata.* Willden. Spec. Plant. I. p. 906.

Caulis basi suffructicosus, angulatus, totus pilis albis hispidus, erectiusculus, pedalis.

Rami paniculati, patentes, ramulosi ramulis sensim capillaribus, flexuosis.

Folia alterna, sessilia, lanceolata, integra, marginata, villosa, unguicularia.

Flores in ramulis ultimis vel pedunculis racemosis terminales, albi.

Calycis laciniae lineari-setaceae, hirtae.

Stigma trifidum.

Variat foliis subdenticulatis et glabris.

10. C. *tenella*. * *Lightfootia* oxycoccoides. Willden. Tab. VII.
Spec. Plant. I. p. 887. 915.

Crescit in proclivis infra frontem Taffelberg.

Floret Januario.

Caulis herbaceus, filiformis, uti tota planta glaber, decumbens, subpedalis, ramosus.

Rami sparsi, capillares, patulo-diffusi.

Folia sparsa, sessilia, ovata, saepius integra, raro utrinque unidentata, marginata, reflexa, vix lineam longa. Interdum axillae aliis foliis onustae.

Flores in ramulis terminales, solitarii, pedunculati.

Pedunculi a ramulis continuati, capillares.

Calyx angulatus, glaber.

Stigmata subterna, revoluta, capitata.

11. C. *unidentata*. Willdenow. Sp. Pl. I. p. 897. Tab. V.

Caulis herbaceus, filiformis, purpurascens, glaber, erectus, apice cernuus, simplex, foliis tectus, pedalis et ultra.

Folia sparsa, sessilia, subhastata, lanceolata, margine reflexa, infra medium dente utrinque unico armata, imbricato-adpressa, glabra, unguicularia.

Flores in summitate caulis racemosi, racemo coarctato digitali, coerulei.

Pedunculi capillares, uniflori usque triflori.

Bracteae foliis similes, sed minores et saepe integrae.

Stigma trifidum.

Differt a C. *tenella* foliis adpressis, utrinque dentatis et caule erecto.

Tab. VI. 12. C. *fasciculata*. Willden. Spec. Pl. I. p. 897.

Caulis frutescens, teres, subfiliformis, cinereo-purpurascens, hirtus, erectus, subsimplex, pedalis et ultra.

Rami apicis pauci, breves.

Folia per totum caulem sparsa, e foliolis axillaribus minoribus glomeratis subfasciculata, sessilia, ovata, integra et utrinque unidentata, marginata margine reflexo, undulata, recurvato-imbricata, glabra, semiunguicularia.

Flores in ramis terminales, aggregato-subpaniculati.

Stigma trifidum.

13. C. *bracteata*. *Caulis* fruticescens, teres, cinereus, pubescens, flexuoso-erectus, ramosus, pedalis et ultra.

Rami alterni, subsecundi, simplices, cauli similes, digitales.

Folia sessilia, alterna, foliolis axillaribus onusta, lineari-trigona, integra, acuta, reflexa, glabra, lineam longa.

Flores in apice ramorum terminales, sessiles, subsolitarii, bracteis obvallati.

Bracteae ovatae, acuminatae, ciliatae.

14. C. *stellata.* *Caulis* fruticescens, teres, fuscus, totus glaber, ramosus, erectiusculus, palmaris.

Rami alterni, simplices, curvato-erecti.

Folia terna, sessilia, linearia, acuta, integra, imbricata, unguicularia.

Flores in summitate ramorum axillares, solitarii, pedunculati.

Pedunculus capillaris, flexuosus, pollicaris.

15. C. *undulata.* Willden. Spec. Plant. I. p. 895.

Crescit in Swartland, prope Bergrivier, et alibi.

Floret Septembri, Octobri.

Caulis herbaceus, inferne a foliis decurrentibus angulatus, simplex, glaber, erectus, bipedalis.

Folia alterna, sessilia, lanceolata, undulata, marginata, pilis raris albis adspersa, patentia, pollicaria; superiora lanceolata magis et angustiora.

Flores in caule terminales, subracemosi, erecti, coerulei.

Pedunculi subpollicares et calyces glabri.

Variat ramis dichotomis, elongatis.

Tab. VI. 16. C. *capensis.* Willden. Sp. Plant. I. p. 915.

Crescit cum priori in Swartland.

Floret Septembri.

Caulis herbaceus, basi decumbens, dein erectus, subsimplex, striatus, uti tota planta hirsutus, apice aphyllus, nutans, pedalis.

Folia alterna, sessilia, lanceolata, undulato-dentata, utrinque hirsuta, patentia, pollicaria.

Flores in caule elongato terminales, solitarii, cernui.

Calyx totus valde hispidus villis albis.

Valde affines sunt C. *capensi* et *undulatae*, sed tamen satis ac sufficienter distinctae.

Tab. VII. 17. C. *cernua.* Willden. Spec. Plant. I. p. 907.

Caulis herbaceus, capillaris, vix ramosus nisi pedunculi elongati, hirtus, erectus, spithamaeus.

Folia alterna, oblonga, inferne attenuata, obtusa, undato-dentata, integra, villosa, erecto-patentia, unguicularia.

Flores terminales, solitarii, coerulei et albi.

Pedunculi alterni, plures, capillares, flexuosi, striati, glabri, palmares.

Calyx glaber.

Digitized by Google

18. C. *procumbens.* Willden. Spec. Pl. I. p. 915.

Crescit prope urbem Cap, in fossis aquosis.

Floret majo et sequentibus mensibus.

Caulis herbaceus, tenellus, totus glaber.

Rami capillares, diffusi, digitales vel ultra.

Folia opposita, subsessilia, ovato-subrotunda, obtusissima, obsolete crenata, glabra, reflexa, semiunguicularia.

Flores axillares, solitarii, erectiusculi.

Pedunculi capillares, uniflori.

Stigma trifidum.

COLEOPTERA ROSTRATA CAPENSIA,

A

C. P. THUNBERG

ILLUSTRATA.

Conventui exhibita die 11 Dec. 1811.

Primus sine dubio fuit hortulanus *Auge*, qui Insecta Capensia collegit in vastis illis regionibus Promontorii bonae spei, quas impensis Gubernatoris Tulbagh saepius peragraverat. Ille vero, Entomologiae omnino ignarus, vix aliis speciebus Musaea Curiosorum ditavit, quam quae vel grandiora, vel pulchriora, vel singularia ipsi visa sunt. Ex hisce collectionibus species nonnullas ipse Gubernator ad Illustr. *Linnaeum* transmissit; plurimas vero ipse *Auge* peregrinatoribus, angulum maxime australem Africes salutantibus, numerata pecunia vendidit. Vix tamen integra Centuria Entomologis cognita erat ante meum in hoc promontorium adventum, ubi, sub trienni commoratione, amplam mihi contigit Insectorum omnis generis colligere messem, et ubi Coloni, meo exhortati et edocti exemplo, deinde copiam ingentem venalem ad portum adportarunt,

sic ut sub ultimis seculi elapsi Decenniis non pauca fuerint descripta, et quandoque coloribus vivis illustrata ab Entomologis illustribus, *Fabricio*, de *Geerio*, *Stellio*, *Wolffio*, *Wulffenio*, *Goldfussio*, *Voetio*, *Olivierio* aliisque.

Non paucas hujus remoto regionis insecta, ante dudum, a memet quoque descripta inveniuntur, non modo in variis Actis litterariis Acadamiarum Scientiarum, sed imprimis in Dissertationibus a me editis, sub Titulo Novarum Insectorum Specierum; sed cum forsan nemini adhuc contigerit illa felicitas, tot colligendi, examinandi et describendi Insecta Capensia, credidi meum fore officium haec ipsa non modo recensere, sed etiam, quae adhuc incognita sunt, in Musaeo proprio adservata, describere et publici juris facere. Sique aliquam habent utilitatem (et adferunt certe summam) Specialiores Florae Faunaeque diversarum regionum, sperare fas erit, ut non omnino infructuoso sit huic Entomologiae particulae mea dicata opera.

Rostro instructa Coleoptera omnium primo illustrissimae Scientiarum Academiae Imperiali offero. Si vitam concedat Benevot. Numen, sensim sequentur reliquae phalanges.

CORDYLE.

C. *longipes*: ferrugineus rostro cylindrico, apice dilato exciso. *

Calandra longipes. Fabric. Eleuterat. 2. p. 431.

Variat. α. rostro apice bifido, supra sulcato, serie duplici noduloso - serrato.

β. rostro apice dilatato quadrilobo, supra sulcato, serie duplici noduloso - serrato.

γ. rostro apice dilatato quadrilobo, supra obsolete costato laevi.

Observari tamen ulterius meretur, an hae varietates sint ejusdem, vel forsan diversae speciei. Omnes instruuntur pedibus anticis elongatis, licet rostrum valde sit diversum.

C. *variegatus:* rufo nigroque varius, rostro apice nigro. †.

Calandra variegata. Fabric. Eleuter. 2. p. 434.

LIXUS.

L. *brunneus:* femoribus dentatis brunneus, rostro fusco, elytris testaceis punctato - striatis. †.

Lixus brunneus. Fabric. Eleut. 2. p. 505.

L. *quadripustulatus:* niger elytris maculis duabus ferrugineis. †.

Lixus 4 - pustulatus. Fabric. Eleut. 2. p. 501.

L. *octolineatus:* niger thorace elytrisque lineis quatuor albis. †.

Lixus 8 - lieatus. Fabric. Eleuterat. 2. p. 500.

L. *tricostalis:* niger, luteo-pulverulentus, thorace costis tribus, elytris basi impressis. *.

Corpus latitudine L. *paraplectici*, sed laevius, oblongum, totum nigrum, pulvere luteo tectum.

Caput nigrum.

Rostrum cylindricum, incurvum, nigrum, longitudine thoracis.

Thorax teres, postice latior, costis tribus elevatis, quarum laterales breviores, intermedia ad medium dorsi producta.

Elytra punctato-striata, apice attenuata, mucronata, prope basin in singulo fovea depressa et sulcis utrinque tribus brevissimis.

Femora vix dentata.

Similis L. *paraplectico*.

Lixus tricostalis. Act. Upsal. Vol. 7. p. 113.

RYNCHAENUS.

R. *Zamiae:* femoribus dentatis castaneus, elytris striatis, rostro quadruplo longiore. *.

Curculio Zamiae. Act. Upsal. Vol. 4. p. 29. tab. 1. f. 1. 2.

Rynchaenus haustellatus. Fabric. Eleut. 2. p. 488.

Habitat in Strobilis Zamiae Caffrae femineis.

R. *gravis:* femoribus dentatis canaliculatis, niger, elytris ferrugineo - variis. †.

Curculio gravis. Fabric. Ent. Syst. I. p. 435. et Rynchaenus gravis. Ejusd. Eleut. 2. p. 481.

R. *stolidus:* femoribus dentatis fuscus, tibiis posticis incurvis dentatis. †.

Rynchaenus stolidus. Fabric. Eleuterat. 2. p. 470.

R. *vacca:* femoribus dentatis supra ferrugineo - tomentosus, subtus argenteus, rosto piceo. *.

Rynchaenus vacca. Act. Upsal. Vol. 7. p. 115.

Rostrum filiforme, incurvatum, glabrum, fusco - ferrugineum, capite thoraceque longius.

R. *vitellus:* femoribus dentatis virescenti - tomentosus. *.

Rynchaenus vitellus. Act. Upsal. vol. 7. p. 115.

R. *canus:* femoribus dentatis totus cinereo - tomentosus, thorace elytrisque hirtis. *.

Rynchaenus canus. Act. Upsal. Vol. 1. p. 115.

Rostrum filiforme, incurvatum, purpureum apice nigro, capitis thoracisque longitudine.

R. *armiger* femoribus bidentatis, elytris linea fasciaque albis. *.

Rynchaenus armiger. Act. Upsal. V. 7. p. 114.

R. *campanulae:* femoribus muticis cinereo - fuscus, elytris striatis ovatis. *.

Rynchaenus campanulae. Fabric. Eleut. 2. p. 448.

Omnino similis europaeo, minori varietati, subpubescens.

R. *fimbriatus:* femoribus muticis ater, elytris purpureis margine nigro. *.

Rynchaenus fimbriatus. Act. Ups. V. 7. p. 115.

Magnitudo pulicis.

Rostrum longum, filiforme, nigrum longitudine capitis thoracisque.

Antennae nigrae.

R. *vetulus:* femoribus muticis ater, pilis albis irroratus, tibiis tarsisque rubris. *.

Rynchaenus vetulus. Act. Upsal. V. 7. p. 116.

Rostrum cylindricum, longitudine thoracis.

R. *amylaceus:* femoribus muticis subtus albus, supra totus albo irroratus. *.

Rynchaenus amylaceus. Act. Upsal. V. 7. p. 116.

Rostrum filiforme, incurvum, atrum, capite thoraceque longius, fere longitudine corporis.

Antennae rubrae clava fusca.

R. *bovinus:* femoribus muticis ferrugineo-tomentosus, antennis rufis. *.

Rynchaenus bovinus. Act. Upsal. Vol. 7. p. 116. et Curculio bovinus. Ibid. p. 120. idem.

Rostrum cylindricum, rufescens, longitudine thoracis.

*Elytra margine externo saturatius colorata.

APION.

A. *craccae:* nigrum opacum, elytris striatis. *.

Magnitudine pulicis, globosum, nigrum, opacum, omnino simile A. craccae, europaeo.

A. *limbatum:* cinereo-fuscum, elytrorum sutura basi margineque externo albidis.

Magnitudo minoris pediculi; totum glabrum, cinereo-coerulescens.

Elytra striata sutura basi margineque externo albo.

Pedes inermes.

CURCULIO.

C. *sticticus:* thorace elytrisque variolosis nigris-albo-punctatis. †.

Curculio sticticus. Fabric. Eleuter. 2. p. 531.

C. *succinctus:* ater elytris margine lineolisque duabus albis. †.

Curculio succinctus. Fabric. Eleut. 2. p. 531.

C. *histrionicus:* griseus thorace lineis lateralibus fulvis, elytris albis: maculis atris fulvisque. †.

Curculio histrionicus. Fabric. Eleut. 2. p. 533.

C. *verrucosus:* aeneo-niger, papillosus, elytris postice verrucosis. *.

Curculio verrucosus. Fabric. Eleuter. 2. p. 534.

Corpus inter majores, oblongum, totum aeneo - nigrum, glabrum.

Rostrum crassum, apice crassius, supra cinereum, sulcis quinque, duobus utrinque minoribus.

Antennae moniliformes, ultimo articulo globoso, infimo filiformi, fuscae, hirtae.

Thorax papillosus papillis obtusis.

Elytra oblonga, acuminata, costata costis serratis, in singulo elytro tribus majoribus; inter has ordo duplex tuberculorum parvorum fuscorum.

Elytra terminata acumine, bifida.

Femora mutica, curva.

Brachycerus verrucosus. Fabric. Entomol. System. vol. I. p. 381. idem.

C. *capensis:* ater thorace papilloso, elytris striato-crenatis. *.

Curculio capensis. Fabric. Eleut. 2. p. 534.

Corpus C. *abietis* paulo majus, totum atrum, glabrum.

Rostrum crassum, tetragonum, obtusissimum, incurvum, rugosum, quinquecostatum, vix capite longius.

Caput convexum, antice trisulcatum.

Thorax subglobosus, papillosus papillis globosis laevibus punctatis.

Elytra obtusa, sulcata costis et sulcis scabris.

Femora mutica.

C. *inaequalis:* griseus thorace inaequali antice prominulo, elytris sulcatis postice bidentatis, rostro trisulcato. †.

Curculio inaequalis. Fabric. Eleuter. 2. p. 535.

C. *recurvus:* albidus thorace elytrisque atro-papillosis, acuminatis. †.

Curculio recurvus. Fabric. Eleuter. 2. p. 535.

C. *capistratus:* fuscus elytris acuminatis crenato-striatis, rostro sexsulcato. *.

Curculio capistratus. Fabric. Eleut. 2. p. 535.

Corpus C. *abietis* duplo majus, atrum cum intersparsa hinc inde albedine.

Rostrum crassum, tetragonum, obtusissimum, rugosum, sulcis sex albis, totidemque costis longitudinalibus, longitudine thoracis.

Thorax subglobosus, papillosus papillis sparsis, globosis, sulco medio obsoleto.

Elytra acuminata, sulcata sulcis punctatis, costis octo crenatis scabris, postice pilosa, nigra cum albedine laterali.

Pedes hirti, femoribus muticis.

C. *papillaris:* cinereus thorace subspinoso elytrisque nigro-tuberculatis. *.

Digitized by Google

Corpus magnitudine Scarabaei stercorarii, ovato-oblongum, totum cinereo-albidum.

Caput parvum oculis nigris.

Rostrum breve, latum, inaequali-planum, angulatum, punctatum, medio costa elevata nigra.

Antennae moniliformes articulo ultimo globoso.

Thorax ad latera tuberculis nigris; supra rugis nigris punctatis; in media linea alba; latera protuberantia in spinam obtusissimam.

Elytra clausa, incurva, grisea ex pilis brevissimis atomisque fuscis; in singulo circiter octodecim ordines tuberculorum nigrorum, quae tubercula inferius et postice confluunt.

Pectus et abdomen magis albicant punctis parvis nigris sparsis.

Abdominis tria ultima segmenta nigricant.

Pedes cinerei, pilosi punctis minimis nigris sparsis.

Femora mutica tarsis bifidis.

C. *crispatus:* thorace papilloso, elytrorum costis spinosis. *.

Curculio crispatus. Fabric. Eleuter. 2. p. 535.

Paulo major C. *abictis*, totus cinereo-fuscus, pilis tenuissimis imbricatis tomentosus.

Rostrum crassum, tetragonum, obtusissimum, sulco medio

majori, tribusque utrinque lateralibus, thoracis longitudine.

Thorax globosus, papillosus papillis sparsis, sulco medio obsoleto.

Elytra obtusa, sulcata sulcis papillosis costisque octo serratis serraturis pilosis.

Subtus magis cinereus et pilosus femoribus muticis.

C. *tribulus*: cinereus thorace papilloso antice impresso, elytris spinosis. †.

Curculio tribulus. Fabric. Eleuter. 2. p. 536.

C. *quadrispinosus*: albidus elytris quadrispinosis, rosto fusco. †.

Curculio 4-spinosus. Fabric. Eleut. 2. p. 481.

C. *nodulosus*: thorace costis sex papillosis, elytris acuminatis spinosis. *.

Curculio nodulosus. Fabric. Eleuter. 2. p. 536.

Duplo major C. *abietis*, totus supra pulvere, subtus villositate cinereus.

Rostrum tetragonum, apice latius, sulcis sex totidemque costis laevibus atris, longitudine capitis thoracisque.

Thorax subglobosus, callo laterali obsolete spinosus, costis sex papillosis papillis rotundatis atris et sulco medio distincto.

Elytra acuminata, subsulcata, costata costis utrinque sesquitertiis, antice papillosis, postice spinosis; series utrinque papillorum lateralium inermium; in basi calli duo majores.

Abdomen nigrum, cinereo-maculatum.

Femora mutica.

C. *rubifer:* cinereus thorace scabro, elytris spinis elevatis sanguineis. †.

Curculio rubifer. Fabric. Eleuter. 2. p. 536.

C. *globifer:* cinereus thorace papilloso, elytris acuminatis spinosis. *.

Curculio globifer. Fabric. Eleut. 2. p. 536.

Corpus grande, totum cinereum cum albedine interspar-sa, imprimis lateribus et subtus.

Rostrum tetragono-clavatum, medio depressum, thoracis longitudine.

Thorax subglobosus, callo obsoleto spinosus, papillosus papillis globosis atris ordine utrinque quadruplici.

Elytra acuminata, vix sulcata, costis papillosis papillis antice muticis, postice spinosis, nigris; interstitia papillis sparsis et inter haec series papillorum minutissimorum.

Femora mutica.

Variat magnitudine et colore; costa in sulco thoracis elevata et obsoleta.

C. *spectrum:* thorace noduloso utrinque spinoso, elytris serrato - tuberculatis acuminatis. †.

Curculio spectrum. Fabric. Eleut. 2. p. 537.

C. *pilularius:* thorace papilloso spinoso, elytris tuberculatis acuminatis. *.

Curculio pilularius. Fabric. Eleuter. 2. p. 537.

Magnitudine C. *globiferi*, totus cinereo - niger.

Rostrum clavatum, medio depressum, longitudine capitis thoracisque.

Thorax rotundatus, spinosus, papillosus; costa sulci media nigra, papillis rotundatis punctatis.

Elytra acuminata, vix sulcata; costae et interstitia papillosa papillis obtusis; postice aucta. In regione ani costae duae in formam cristae elevatiores.

Femora mutica.

C. *glandifer:* obscurus thorace scabro, elytris costis tribus spinosis. †.

Curculio glandifer. Fabric. Eleuter. 2. p. 537.

C. *gibbosus:* fuscus thorace papilloso, elytris crenato - scabris pilosis. *.

Corpus C. abiete duplo majus, totum cinereo - tomentosum.

Digitized by Google

Rostrum crassum, tetragonum sulcis sex totidemque costis, longitudine thoracis.

Caput atrum, laeve.

Thorax globosus, papillosus: papillis sparsis, minutis, obtusis, medio sulco fere obsoleto.

Elytra obtusa, sulcata obsolete, costis plurimis papillosis: papillis scabris, pilosis.

Abdomen et pedes mutici, magis atri.

C. *analis:* ater thorace laevi, elytris punctatis postice scabris. *.

Corpus magnitudine C. *laevigati* vel C. *morio* paulo minus, atrum, glabrum.

Rostrum tetragonum, obtusum, laeve, vix capite longius.

Thorax convexus, laevis.

Elytra convexa, postice deflexa, striata striis punctatis, pone medium papilloso - scabra.

Femora crassa, mutica.

C. *armatus:* cinereus thorace laevi, elytris tuberculatis. *.

Corpus magnitudine C. pini, totum cinereum.

Rostrum subangulatum, apice nigrum, costa media obsoleta.

Curculio armatus. Act. Upsal. V. 7. p. 119.

C. *caffer:* ater thorace albolineato papilloso, elytris obtusis punctato - sulcatis. *.

Curculio caffer. Thunb. Act. Upsal. Vol. 7. p. 120.

Caput retusum.

Rostrum crassum, tetragonum apice callo glabro, sulcatum, costis quinque laevibus.

C. *lacunosus:* ater thorace papilloso, elytris sulcis foveolatis rugosis. *.

Curculio lacunosus. Act. Upsal. Vol. 7. p. 120.

Caput rugosum postice laevius.

Rostrum tetragonum, obtusissimum, rugosum, costis quinque obsoletis laevibus.

C. *felinus:* cinereus, albo fuscoque irroratus, rostro sulcato *.

Magnitudine C. *tereticollis*, oblongus, cinereus, albido nigroque irroratus imprimis lateribus.

Rostrum sulcatum.

Pedes omnes inermes.

C. *cyaneus:* cinereus, pubescens thoracis elytrorumque lateribus viridibus. *.

Magnitudine minoris pulicis, globosus, cinereus, lateribus viridibus in thorace et elytris, tenuissime pubescens.

Pedes inermes.

C. *elongatus:* oblongus, fuscus marginibus elytrorum pallidis. *.

Digitized by Google

Similis C. *incano* magnitudine, statura, colore; sed latera elytrorum albida et thorax convexus.

Rostrum obsolete bisulcatum.

Elytra profunde striata, punctata.

Femora inermia.

C. *cinctus:* globosus, cinereus, arcu elytrorum albido. *.

Thorax costis tribus obsoletis notatus, globosus.

Elytra fusco-cinerea, profunde striata, postice scabra; pone medium dorsi arcus communis albidus, obsoletus.

Pedes inermes.

Magnitudine et similitudine C. *coryli*, globosus, totus cinereus.

Differt a C. *brevicolli*, quod globosus sit, nec oblongus.

C. *octoguttatus:* cinereus elytris maculis elevatis octo albis.

Habitat in Fransche Hoek, regione montana.

Corpus magnitudine A. albino majus, oblongum, totum cinereum, tenuissime tomentosum punctis minutis frequentissimis impressum.

Caput et thorax fusco-cinerea, oculis nigris.

Rostrum crassum, inflexum, obtusum, medio carinatum, thorace brevius.

Antennae clavato-subfiliformes.

Thorax teretiusculus, lineis quatuor albus.

Elytra deflexa, cinerea, medio fusca; singulum striis excavatis decem cum punctis impressis papillisque quatuor albis; tribus in medio longitudinaliter dispositis, quarum antica oblonga, ceterae rotundatae; quarta parum ante et extra anticam.

Pectus fusco-cinereum: lineola alba pone oculos.

Abdomen cinereo-album.

Femora inermia, fusco-cinerea, intus puncto minutissimo albo. *Tibiae* intus serrato-spinosae. *Tarsi* articulis tribus lunaribus, supra convexis, cinereis, subtus bilobis lutescentibus; *unguibus* binis.

C. *Zebrae:* albo nigroque variegatus papillis nigris sparsis. †.

Corpus magnitudine C. *verrucosi*, tenuissime tomentosum.

Caput lutescens.

Rostrum teres, crassum, incurvum, lutescens, thorace brevius.

Antennae clavatae, lutescentes, rostro longiores.

Thorax lutescens lineis tribus latis albis punctisque sparsis elevatis atris.

Elytra lutescentia, reticulatim albo-maculata, papillis plurimis sparsis atris.

Pectus lutescens linea utrinque alba obsoleta.

Abdomen lutescens, albo nigroque varium.

Femora mutica, supra genu angustata; Tibiae inermes.

C. *margaritaceus*: ater, albomaculatus elytris lineis sex niveis. †.

Habitat in regionibus Fransche Hoek.

Corpus magnitudine et statura C. *verrucosi*, oblongo-ovatum, atrum, glabrum.

Caput supra lunula nivea infra oculos.

Rostrum crassum, planum, incurvum, obtusum, thorace brevius, latere utroque linea alba, apice pilosum, subtus utrinque callo oblongo.

Antennae clavatae articulis novem: articulo baseos oblongo, subclavato; intermediis globosis pilosis; ultimo ovato crassiori.

Thorax teretiusculus utrinque lineis duabus niveis, serie sextuplici callorum costaque elevata: singula series constat duabus vel tribus lineis, inordinatis callorum subglobosorum.

Pectus albomaculatum.

Elytra longitudine abdominis, deflexa, acuta, subforficata. Singulum lineis tribus postice coalitis niveis, totidemque costis crenatis; singulam costam utrinque adjacet ordo papillarum minutarum.

Abdomen albo nigroque varium.

Femora subclavata, inermia, albo nigroque variegata.

Tibiae unispinosae, pilosae. *Tarsi* articulis tribus, lunaribus.

Valde similis et affinis C. *verrucoso*.

C. *brunnipes:* fuscus thorace pedibusque obscure brunneis, femoribus dentatis. †.

Curculio brunnipes. Fabric. Eleut. 2. p. 538.

C. *punctum:* niger scutello niveo, femoribus anticis dentatis. †.

Curculio punctum. Fabric. Eleut. 2. p. 538.

BRACHYCERUS.

B. *apterus:* thorace spinoso; cruce impressa, elytris reticulatis ferrugineis. *.

Brachycerus apterus. Thunb. Act. Upsal. Vol. 6. p. 17. Fabric. Eleut. 2. p. 412.

Thorax in medio cruce nigra quasi inusta notatur. Supra crucem figura semilunaris, dentata, nigra, elevata.

Pectus nigrum, punctatum, lateribus fulvum.

Elytra clausa, incurvata, atra maculis quadratis rubris, per ordines dispositis, dense tesselatis.

Abdomen fere inclusum Elytris, atrum, punctatum segmentis utrinque ad latera macula rubra.

Variat et magnitudine et colore saturatiori.

Digitized by Google

B. *obesus*; thorace spinoso trisulcato, elytris punctatis pedibusque rufis. *.

Brachycerus obesus. Act. Ups. V. 6. p. 18. Fabric. Eleuter. 2. p. 413.

Elytra arcte clausa, flavo-lineata et reticulata, punctis interclusis rufescenti-fuscis pellucidis.

Pectus nigrum uti et abdomen incisuris tribus rubris.

Pedes rufescentes geniculis nigris. *Femora* mutica compressa.

B. *globosus*: thorace spinoso trisulcato, elytris laevibus nigris. *.

Brachycerus globosus. Act. Ups. vol. 6. p. 18. Fabr. Eleut. 2. p. 413.

Rostrum breve, crassum, latum, basi sulco duplici oblique ad latera exeunte, medio fovea duplici impressa, apice inaequale foveis impressis. In medio costae quasi litteram ψ formant.

Pedes nigri, punctati. *Femora* mutica, compressa. *Tibiae* pilososcabrae.

B. *scalaris*: thorace spinoso trisulcato, elytris striis octo rufodenticulatis. *.

Brachycerus scalaris. Act. Upsal. V. 6. p. 19. Fabr. Eleut. 2. p. 412.

B. *papillosus:* thorace spinoso unisulcato punctato, elytris papilloso-scabris. *.

Brachycerus papillosus. Act. Upsal. V. 6. p. 20.

B. *globiferus:* thorace spinoso unisulcato varioloso, elytris papillosis nigris. *.

Branchycerus globiferus. Act. Ups. V. 6. p. 21.

B. *detritus:* thorace spinoso unisulcato punctato, elytris obsolete papillosis nigris. *.

Brachycerus detritus. Act. Ups. V. 6. p. 21.

B. *cordiger:* thorace spinoso canaliculato punctato, elytris papillosis striatis. †.

Brachycerus cordiger. Fabric. Eleut. 2. p. 413.

B. *barbarus:* thorace spinoso unisulcato, elytris cinereis, costis duabus crenatis nigris. *.

Brachycerus barbarus. Act. Upsal. V. 6. p. 24. Fabric. Eleuterat. 2. p. 414.

B. *serratus:* thorace spinoso unisulcato varioloso, elytris variolosis: costis duabus serratis pilosis. *.

Brachycerus serratus. Act. Upsal. V. 6. p. 25.

B. *pisiferus:* thorace spinoso trisulcato, elytris papillosis nigris. *.

Brachycorus pisiferus. Act. Upsal. Vol. 6. p. 23.

B, *emeritus:* thorace spinoso obsolete trisulcato, elytris variolosis postice papilloso-spinosis pilosis. *.

Brachycerus emeritus. Act. Ups. Vol. 6. p. 29.
Curculio emeritus. Fabric. Eleut. 2. p. 535.

B. *rugosus*: thorace spinoso papilloso, elytris variolosis, costis duabus subserratis nigris. *.
Brachycerus rugosus. Act. Upsal. V. 6. p. 27.

B. *inaequalis*: thorace spinoso papilloso, elytrorum costis duabus nodulosis punctatis. *.
Brachycerus inaequalis. Act. Upsal. Vol. 6. pag. 27. Fabric. Eleuterat. 2. p. 414.

B. *gemmatus*: thorace spinoso varioloso, elytris serie sextuplici papillorum globosorum. *.
Brachycerus gemmatus: Act. Upsal. Vol. 6. p. 22.

B. *juvencus*: thorace spinoso varioloso, elytris papillosis serie sextuplici, interstitiisque papillosis. *.
Brachycerus juvencus. Act. Upsal. V. 6. p. 12.

B. *uva*: thorace spinoso inaequali, elytris papillosis: papillis numerosis obtusis. *.
Brachycerus uva. Act. Upsal. V. 6. p. 23. Fabric. Eleuter. 2. p. 416.

B. *areolatus*: thorace spinoso, costa duplici crenata, elytris crenato-rugosis. *.
Brachycerus areolatus. Act. Upsal. V. 6. p. 31.

B. *taeniatus*: thorace spinoso tricostato, elytris punctatis: costis quatuor spinosis. *.

Brachycerus taeniatus. Act. Upsal. Vol. 6. p. 28.

B. *griseus:* thorace papilloso-scabro, elytris variolosis. †.

Brachycerus griseus. Fabric. Eleuterat. 2. p. 415.

B. *rostratus:* thorace inermi trisulcato, elytrorum costis quatuor spinosis. *.

Brachycerus rostratus. Fabric. Eleuter. 2. pag. 413. Thunb. Act. Upsal. Vol. 6. p. 32.

B. *excisus:* thorace inermi trisulcato papilloso, elytrorum costis sex, capite exciso. *.

Brachycerus excisus. Act. Upsal. V. 2. p. 32.

B. *praemorsus:* thorace inermi bisulcato cruce impressa, elytris retusis: costis quatuor crenatis. *.

Brachycerus praemorsus. Act. Upsal. V. 6. p. 33.

B. *bimaculatus:* thorace inermi rugoso, elytrorum costa sesquitertia spinosa, in medio maculis binis triangularibus nigris. *.

Brachycerus bimaculatus. Thunb. Act. Upsal. V. 6. p. 33.

B. *retusus:* thorace inermi trisulcato, elytrorum costa postice dentata lineisque tribus albis. *.

Brachycerus retusus. Act. Ups. V. 6. p. 34. Fabr. Eleut. 2. p. 415.

B. *tetragonus:* thorace inermi punctato, elytris reticulatis cinereis: costa sesquitertia papillosa. *.

Brachycerus tetragonus. Act. Ups. V. 6. p. 34.

3. *planus:* thorace quadrato plano, elytrorum costa quadruplici papillosa. *.

Brachycerus planus. Act. Upsal. V. 6. p. 35.

3. *spectrum:* thorace inermi papilloso, elytris porcatis serie quadruplici papillosis. *.

Brachycerus spectrum. Act. Upsal. V. 6. p. 35. Fabric. Eleuter. 2. p. 415.

3. *vacca:* thorace inermi papilloso-rugoso, elytrorum costis plurimis papillosis, rostro bicorni. *.

Brachycerus vacca. Act. Upsal. V. 6. p. 36.

3. *pertusus:* thorace inermi punctato, elytris sulcatis porcatis nigris. *.

Brachycerus pertusus. Act. Upsal. V. 6. p. 36.

3. *morio:* ater thorace elytrisque variolosis. †.

Brachycerus morio. Fabric. Eleuter. 2. p. 416.

3. *cristatus:* thorace crista duplici, elytris dorso planis reticulatis. †.

Brachycerus cristatus. Fabric. Eleuter. 2. p. 415.

PLATYRYNCHOS.

1. *nebulosus:* ater, opacus elytris obsolete fasciatis. *.

Platyrynchos nebulosus. Act. Upsal. V. 7. p. 123.

ATTELABUS.

A. *pectoralis:* sanguineus elytris costa, margine maculaque media fuscis, pectore albomaculato. *.

Attelabus pectoralis. Act. Upsal. V. 7. p. 124.

A. *gemmatus:* ferrugineus tuberculis nigris sparsis. *.

Attelabus gemmatus. Fabric. Eleuter. 2. 418.

A. *spinosus:* ferrugineus thorace elytrisque spinosis. †.

Attelabus spinosus. Fabric. Eleut. 2. p. 420.

A. *nigripennis:* ferrugineus elytris laevibus atris. †.

Attelabus nigripennis. Fabric. Eleuter. 2. p. 419.

RHINOMACER.

R. *varius:* nigro alboque varius. †.

Rhinomacer varius. Fabric. Eleut. 2. p. 428.

Digitized by Google

IPOMOEA KRUSENSTERNII NOVA SPECIES, DESCRIPTA A C. F. LEDEBOUR.

Conventui exhibita die 13 Maj. 1812.

I. foliis cordatis acuminatis, pedunculis subbifloris, laciniis calycinis ellipticis mucronatis, corollis hypocrataeriformibus amplissimis. Tab. VIII.

Radix fibrosa.

Caulis fruticosus volubilis, tortilis, angulato-striatus, glabriusculus.

Petioli foliis sesquilongiores (7-pollices longi vel longiores).

Folia petiolata, cordata, acuminata, integerrima, rarius dente uno alterove minutissimo instructa, utrinque glaberrima, in pagina inferiori pallidiora, nervoso-venosa; nervis undecim subtus prominentibus; patentissima.

Pedunculi 4- vel 5-pollicares, axillares uni-vel biflori, rarius triflori; pedicelli laciniis calycinis duplo fere longiores, versus apicem incrassati.

Flores speciosissimi, albi.

Calyx corolla multoties minor, persistens, post anthesin reflexus, quinquepartitus; laciniis semipollicaribus, ellipticis, mucronatis, margine membranaceis.

Corolla hypocrataeriformis; tubo pedunculo longiori, crassitie pennam anserinam superante; limbo plicato, tubo sesquilongiori, quinquelobo; lobis rotundatis in mucronem parvum exeuntibus.

Stamina tubo corollae exserta.

Stylus staminibus paullo longior.

Stigma capitatum bilobum.

Capsula ovata, trigona, trilocularis, trivalvis; loculamentis monospermis; magnitudine ovi columbini in planta culta (in planta spontanea magnitudinem fructus Iuglandis regiae superare dicitur)?

Semina ossea, alba, globoso-subtrigona, in planta culta fructu Pisi sativi majora (in spontanea Viciae Fabae equinae magnitudinem aequare traditur)?

Hab. in? Japonia ♄. — Colitur apud nos in Caldario. — Floret per totam fere aestatem.

Obs. Speciosissimam hanc plantam a celeberrimo *Krusensternio* comitibusque ejus repertam, atque semina ejus in nostras regiones allata esse dicitur, quam ob rem in ejus honorem nomen dixi triviale.

Digitized by Google

DESCRIPTIONES
PLANTARUM RARIORUM HORTI IMPERIALIS ACADEMIAE SCIENTIARUM PETROPOLITANAE ICONIBUS ILLUSTRATAE.

AUCTORE

T. SMELOVSKY.

Conventui exhibitae die 20 Maj. 1812.

ALOE PERFOLIATA λ. A. vera. Tab. IX.

A. Foliis spinosis confertis dentatis vaginantibus planis maculatis. Willd. Sp. pl. T. II. p. 1. pag. 186.

Radix fibrosa, *fibris* filiformibus crassitiae pennae anserinae, externe ex albo-flavescentibus, parenchymate albido, *fibrillis* descendentibus carnosis, raris, saporis herbacei vix vix amariusculi.

Caulis solitarius prope radicem et in altitudinis medio cauliculos protrudens, superne foliosus bi-tripedalis et ultra, flexuose ut plurimum erectus, teres, squamis ab adultiorum foliorum lapsu relictis obvallatus, intus pulpa carnosa fartus.

Folia conferta, erecta, ensiformia, trifariam saepe alternantia, amplexicaulia vaginantia, immaculata, glauca,

crassa, carnosa; inferiora facie planiuscula, dorso convexa, superiora canaliculata, pedalia et ultra, marginibus spinosa; spinis e luteo-virescentibus, regulariter distantibus hamiformibus. *Parenchyma* foliorum pulpaceum coloris prasini, saporis amari.

Pedunculus terminalis adscendens, teres, spathaceus.

Spathae monophyllae squamaeformes lanceolato-acuminatae, ex albo-fuscae persistentes; inferiores sparsae, superiores confertae.

Flores racemosi approximati reflexi, in fundo flavi, striis longitudinalibus virescentibus perfusi, nostro clymate abortientes.

Corolla monopetala, subcylindrica sexfida. *Tubus* gibbus.

Limbus patulus, parvus, fundo nectarifero.

Stamina: Filamenta sex, subulata, longitudine corollam fere superantia, receptaculo inserta. *Antherae* oblongae, incumbentes.

Pistillum: Germen ovatum. *Stylus* simplex, longitudine staminum. *Stigma* obtusum subtrifidum.

LOBELIA SYPHILITICA. Tab. X.

L. Caule erecto, foliis ovato-lanceolatis subserratis, calycum sinubus reflexis. Willd. Sp. pl. T. I. p. II. p. 945.

Digitized by Google

Caulis simplex, erectus, pedalis et altior, angulatus pilis rigidulis a foliorum marginibus decurrentibus, obsitus.

Folia alterna, latius lanceolata, subserrata, scabriuscula, inferiora in petiolum desinentia, superiora sessilia.

Flores axillares solitarii, breviter pedunculati, erecti coerulei, abortientes.

Calyx quinquedentatus, dentibus lanceolato-acuminatis, sinubus reflexis, germini circumnatus.

Corolla monopetala angulata irregularis. *Tubus* cylindraceus, calyce longior, superne longitudinaliter divisus. *Limbus* quinquepartitus; *laciniis* lanceolatis; quarum *duae superiores* minores, angustiores, magis reflexae, profundius divisae constituentes labium superius: *tres inferiores* magis patentes, majores, latiores. In palato 2 gibbositates.

Stamina: Filamenta quinque, subulata, longitudine fere tubi. *Antherae* in cylindrum oblongum connatae, basi quinquefariam dehiscentes:

Pistillum: Germen acuminatum. *Stylus* cylindraceus, longitudine staminum. *Stigma* obtusum, hispidum.

ICONUM ET DESCRIPTIONUM PISCIUM CAMTSCHATICORUM CONTINUATIO TERTIA TENTAMEN MONOGRAPHIAE GENERIS *AGONI* BLOCHIANI SISTENS.

AUCTORE

TILESIO.

CUM TABULIS VI. AENEIS.

Conventui exhibita die 11 Decembris 1811.

Tab. XI.	Agonus acoipenserinus.
Tab. XII.	Agonus stegophthalmus.
Tab. XIII.	Agonus dodecaedron.
Tab. XIV.	Agonus rostratus,
Tab. XV.	Cyprinus rostratus et cultratus Drachinus trichodon.
Tab. XVI.	Epinephelus ciliatus.

De novis piscium generibus, Agono *Blochii* et Phalangiste cel. *Pallassii*, propter synonymiam conjungendis.

Cottus piscium genus a *Linnaeo* constitutum a recentioribus varie mutatum est. *Blochius* nuperrime defunctus, Ichthyologorum Germaniae princeps, cotti species capite depresso vel plagioplateo distinctas ab hoc genere separavit et in novum sub nomine *Platicephalorum* denominatum genus collegit. Idemque speciebus sub Cotti genere

comprehensis paulo post denuo perlustratis easdem in duas diversas dividendas esse familias intellexit, illos nempe pisces corpore constanter polygono et varie angulato, in quos character generis Cotti *) a *Linnaeo* constitutus non quadraret, ex Cottis alepidotis elegit inque novum genus Agonus dictum conjunxit, quod et a celeberrimo *Schneidero,* qui opus defuncti egregium posthumum Systema ichthyologiae inscriptum edidit, probatum et receptum est. Non est dubium, quin et *Linnaeus,* Agoni genus a natura ipsa constitutum, Cottos scilicet corpore angulato insignes cataphractos vulgo dictos in familiam separatam, licet eidem generi subjunctam, segregasset, siquidem omnes nunc detectos suo jam aevo, vidisset, sed praeter Cottum cataphractum nullam aliam Agoni generis speciem novit. Cel. *Bloch.* primus fuit, qui secundam speciem, a cel. *Koenig* Tranquebariae detectam sub nomine Cotti, monopterygii descripsit (in Iconibus piscium exoticorum tab. 178. fig. 1 et 2). Tertiam Cotti angulati speciem celeberrimus *Pallas* in spicilegiis Zoologicis (fasciculo VII[mo] tab. 5. fig. 1. 2. 3. p. 30) descripsit ad exemplar piscis exsiccati Academiae Imperiali Petropolitanae scientiarum ab indefesso et immortali *Stellero* ex oceano orientali insulas Curilicas

---

*) Lin Syst. p. 1207. Caput corpore latius spinosum corpus teres alepidotum.

affluente transmissum. Cumque *Stellerus* certiores nos faceret, piscem huncce ad Japonicas usque insulas ascendere, ibique frequentius inveniri, celeberrimus *Pallas* speciei huicce Cotti Japonici nomen imposuit. Quartam denique speciem ex India orientali missam in museo Blochiano conservatam sub nomine decagoni systematis Ichthyologiae auctor ipse descripsit. Operis hujus editor celeberrimus *Schneider* iconem depingi curavit (vid. Iconum systema Ichthyologiae Blochii illustrantium tab. 27. pag. 104.). Observatum est pisces hujus generis arenicolas esse et in fundo maris et sub scopulis plerumque latere, quare forsan plures species in oceano orientali procelloso a piscium peritis nondum satis tentato occultas et nondum detectas esse opinor, quae non nisi maris refluxu et procellarum vi ab undis ad littus ejectae in posterum fortassis detegentur. Celeberrimus interea Bloch jamjam ex quatuor harum specierum contemplatione et comparatione satis superque sibi persuasum habuit, pisces hosce scutatos angulatos et cataphractos cum alepidotis Cottis male prorsus consociari ideoque priores a posterioribus secrevit et ex cataphractis genus Agonorum composuit. Quincunque has quatuor species diligenter comparaverit, ex earum forma et communi structura sibi persuadebit, Agonos non temere aut novandi quadam cupiditate distingui sed ge-

nus novum ab ipsa natura formari, quod eo adhuc confirmari videtur, quod nonsolum Ichthyologus Berolinensis, sed etiam ingenii acumine et historiae naturalis peritia insignis Rossiae Linnaeus non nisi loco et contemplandi modo ab illo differens conaminis hujusce necessitatem intellexerint, ita, ut uno eodemque fere tempore uterque easdem piscium species eligeret, eaeque, quas alter sub nomine Agonorum a Cottis segregaverat ab altero nomine Phalangistarum donarentur.

Phalangistarum enim genus quod celeberrimus *Pallas* in Zoographiae Rosso - Asiaticae *) volumine tertio nuperrime proposuit non nisi notione paulo strictiore vel potius definitione paulo angustiore, ut postea ex speciebus elucebit, ab Agonis Blochii differt; caeterum genus utrumque synonymum est, vel aliis verbis: Phalangistes Pallassi semper est Agonus Blochii. Utrumque enim genus unum eundemque prototypum, unam eandemque speciem europaeam tamquam normalem, Cottum scilicet cataphractum Linnaei prae se fert, quod ex Phalangistarum definitione ipsisque auctoris verbis perspici potest. „Erunt igitur“,

*) Zoographia Rosso Asiatica celeberrimi *Pallas* ad tertiam partem quidem impressa, sed icones animalium, vel tabulae aeneae hoc opus illustrantes, Chalcographo Lipsiensi, a quo etiam delineatae sunt ab auctore demandatae, nondum omnes incisae sunt, quam ob rem opus nondum juris publici fieri potuit.

Pallas scribit, „Cotto cataphracto prius sic appella-„to affines *Phalangistae* mihi et quantum inter se con-„veniant, quantumve a Cottis differant hic breviter indi-„cabo: habitus omnium primum est momentum differen-„tiae: *Caput* multo minus varie aculeatum vel inerme „*oculis lateralibus; corporis forma stricta* nec ventricosa, „*anus* remotior: *rictus* oris angustus et fere edentulus *acu-„lei* supramaxillares et operculorum fere nulli, *pinnae pec-„torales* laterales planae neque alaeformes, nec adeo ver-„sus jugulum productae, *ventrales* minimae sub medio „thorace, *anales* paucorum radiorum. Omnium pinnarum „etiam caudae *radii* simplices, setacei, totum tandem corpus „laminis osseis radiatis *) cataphractum et angulatum."

Sed non omnes pisces cataphracti, corpore angulato insignes, Agonis adnumerandi sunt uti v. gr. *Loricariae, Triglae, Ostraciones, Sygnathi, Pegasi* etc. quoniam non pertinent ad Cottos sed potius ad alia piscium diversa genera (ut Loricariae ad Siluros) quorum notae a charactere Cottis proprio generico plane abhorrent. Sunt ergo *Agoni* non nisi Cotti cataphracti vel pisces octopterygii corpore polygono loricato capite plerumque plagioplateo

---

*) Laminas non in omnibus speciebus *radiatas* esse probat species Sygnathis affinis laevigata Segaliensis. Mémoires de la société Impériale des Naturalistes de Moscou Tom. II.

Digitized by Google

vel depresso. Non verendum erit genus Agonorum a tyronibus cum *Cottis* vel Platycephalis alepidotis capite latiusculo spinis armato, vel cum *Triglis*, *Loricariis*, *Sygnathis* aliisque piscibus loricatis polygonis ex genere alieno ortis prorsus confundi posse. Comparatio cujusvis *Agoni* cum reliquis piscibus polygonis loricatis ex dictis generibus nec non cum *Cottis* ipsis alepidotis, primo obtutu discrepantiam formae demonstrabit.

Majori igitur jure *Agoni* a *Cottis* separandi sunt, quam *Platycephali* ab iisdem, ac *Loricariae* a *Siluris* vel *Polynemus* a *Trigla*. Maxime vero omnium per species novas *Agoni* generis, nuperrime in itinere nautico *Krusensterniano* felicissime circum terram peracto, detectas, novum *Agoni* genus, confirmari videtur. Quamquam nonnullae harum specierum jam ab immortali *Stellero* detectae et in Oceano orientali captae fuisse videantur, uti ex schedis ejus adjectis elucet, nulla tamen huc usque nec ab Ichthyographis Rossiae depicta nec descripta, nec ab Ichthyologis systematicis ordini ac generi naturali inserta exstat; qua propter opere pretium mihi videbatur, iconibus et descriptionibus earum, nonsolum Zoographiam Rosso-Asiaticam augere, sed et novi generis, cujus, ad locupletandum systema Ichthyologiae Monographiam, tentabo, auctoritatem veritatemque confirmare. Antequam vero ad no-

varum Agoni specierum descriptionem transgrediamur, quatuor jam antea cognitas a beato *Blochio* jam descriptas breviter perlustrabimus, earumque cum nuperrime detectis affinitatem demonstrabimus.

Spec. I^ma^. AGONUS *cataphractus.*

Agonus europaeus, aculeis 2 parvis lunaeformibus in apice capitis, cirrhis plurimis ad gulam. Confer.

Blochii Systema Ichthyologiae edit. Schneider. pag. 104. Cottus cataphractus Lin. **Der europäische Steinpikker.** Bloch Naturgesch. der Fische Deutschlands II^r Theil p. 15 — 17. Tab. 38. Fig. 3. 4. Lin. Syst. Nat. Gmel. 1207. Mus. Adolph Fried. 1. p. 70. Brunniche Ichtyol. Massil. pag. 31. n°. 13.

O. Müller Prodrom. Zool. Dan. p. 44. n°. 369. O. Fabriz. Faun. Groenland p. 155. n°. 112. Cottus cirrhis plurimis corpore octagono Artedi gen. p. 49. n°. 4. Synops. p. 77. n°. 5. Spec. p. 87.

Seba Mus. Tom. III. p. 81. Tab. 28. Fig. 6. Jonston pisc. t. 46. f. 5. 6. Ruysch theatr. anim. tab. 46. fig. 5. Gronov. Mus. 1. p. 46. n°. 105. Act. Helvet. T. IV. p. 262. n°. 104. Zoophyl. p. 79. n°. 271.

Cottus cataphractus rostro resimo quatuor ossiculis munito, totus squamis osseis denticulatis contectus. Klein

Digitized by Google

Miss. pisc. IV. p. 42. n°. 1. Willugby ichthyol. p. 212. tab. N. 6. Fig. 2. 3. Raj Synops. pisc. p. 71. Pogge, the atmed bullhead Pennant Zool. Britt. III. p. 191. n°. 99. tab. 93. *Phalangistes* cataphractus capite subtus cirrhoso, ore infero, corpore octaëdro angulis aculeatis, linea laterali integra.

Pallas Zoograph. Rosso-Asiat. Vol. III. n°. 93. Rossis ad borealia maris littora *Lissitza* id est vulpecula (ob caudae longitudinem).

Br. VI. Pect. XV. Ventr. III. Aal. VI. Caud. X. Dors. V — VII.

Descriptio.

Corpus anterius octogonum, posterius hexagonum (quam obrem Islandiae *Sexraending* dicitur). *Caput* loricatum heptagonum, antice rotundatum postice aculeatum, inferius planum, *cirrhi* ordinibus semicircularibus positi, *maxilla* superior prominens, denticuli acuti multi maxillarum *rictus* semicircularis: *nares* geminae, *linea lateralis* vix conspicua, *anus* pone pinnas ventrales biradiatas setaceas, *radii pinnae dorsalis* anterioris subspinosi. *Ventrales* a pectoralibus parum remotae, *analis* ab ano remota, *caudalis* rotundata. *Longitudo* piscis 6 — 8 digitorum. *Charletonus* nulla ratione accipenserinum genus piscium cartilagineorum nu-

mero vel chondropterygiorum subscribendum esse, piscem nostrum ossiculatum sturionem putavit (vid. *Gualteri Charletoni* Onomasticon Zoicon Londini 1668 4^{to} pag. 152.).

Habitat mare balticum et Anglicanum, inter saxa littori vicina degens, ibique Majo ova deponens, uti etiam mare boreum et album aeque ac Atlanticum, non autem in meridionali, Ponto nec in Oceano orientali invenitur. Affinitatem structurae cum Phalangiste accipenserino Pallassii prae se fert, sed habitu et facie tamen differt, ita, ut praeter utriusque patriam longissime remotam, ex iis etiam diversam speciem discernere possis. Caeterum alter alteri ita affinis, ut Agonum accipenserinum jam hic immediate adposuissem, nisi notas et jam descriptas species praemittere maluissem.

Spec. II^{da}. AGONUS *monopterygius.*

A. indicus, corpore angusto antice octagono, postice hexagono scutis laevibus, aculeis binis supra frontem, cirrhis nullis, pinna dorsali solitaria brevi anali opposita, cauda longa attenuata: habitat ad Tranquebariam.

Bloch Syst. Ichthyolog. pag. 105. ejusdemque Naturgeschichte der ausländischen Fische II^r Theil. p. 156. Tab. 178. Fig. 1. 2.

Digitized by Google

Der ostindische Groppe (besser der groppenartige Eckfisch aus Tranquebar). Cottus pinna dorsi unica capite inermi. Linn. Syst. Nat. Gmelin. pag. 1213. n°. 10.
Dors. V. Pect. IV. Vent. V. Anal. V. Caud. VI.

Descriptio.

Oculi praegrandes oblongi ad verticem, pupilla nigra, iride argentea; *mandibula* superior longior spinis duabus retrorsum curvatis horrida, *branchiarum apertura* amplissima, *operculum* lamina simplici constans: *truncus* anterius latiusculus supra ad caudam usque excavatus, scutis octogonis loricatis *anus* capiti propior; *pinnae* cinereae, plurimae radiis fissis, *pectorales* longae lataeque et *caudalis* rotodundata, fuscomaculatae; ventrales angustae radiis simplicibus, dorsalis et analis breves. Haec species simul cum Agono laevigato Segaliensi forma corporis gaudet gracili attenuata et pinna caudali flabelliformi, quare ad sygnathos transitum facere videtur. Habitat ad Tranquebariae littorales scopulos, et in arena, cancrorum vermiumque marinorum progenie victitans; supra fuscus, ad latera cinereus, punctis fasciisque fuscis, subtus maculis albis varius, forma angustus, longus, octogonus, posterius hexagonus.

Spec. III[a]. AGONUS *Japonicus Pallassii.*

A. corpore octäedro superciliis angulo subcornutis, squamis corporis spina obtusa prominulis cirrhis nullis. Cottus Japonicus *Pallas* Spicileg. Zool. fasc. VII. p. 30. tab. V. Der japanische gepanzerte Groppe. S. Pallas Naturgesch. merkwürdiger Thiere Berlin 4to. 7te Samml. p. 32. 35. ejusdemque Zoograph. Rosso-Asiaticae Vol. III. Tab. XVIII. sp. 92. Phalangistes Japonicus.

Cottus corpore octogono squamis osseis aculeatis loricato cirrhis nullis. Linn. syst. Nat. Gmel. p. 1213. sp. 7.

Agonus Japonicus Bloch syst. Ichthyolog. p. 105. A. corpore octogono capite rostrato trunco postice depresso, scutis aculeatis cirrhis nullis, tuberculo conico supra oculos, operculo posteriore inferius exciso: habitat in Oceano Orientali Curillas Insulas et Japoniam alluente. Magnitud. pedalis.

Habitus cataphracti subsimilis, color ex albo subflavus in dorso fuscescens, subtus scaberrimus. In Japonicis Insulis piscem non vidi, melius Curillicus nominandus.

Dors. 6 — 7. *Pect.* 12. *Ventr.* 2. *Anal.* 8. *Caud.* 12.

Descriptio.

Caput longum postice depressum latum, antrorsum angustatum in rostrum obtusum; supra longitudinaliter ca-

Digitized by Google

vatum et stria prominula notatum. *Rostrum* scuto subbiangulato supra maxillas prominens, et supra angulos oris utrinque lamella tridentata cujus dens prior cirrho auctus.

Os parvum maxillis mobilibus, margine intus late scabris. *Lingua* vix notabilis. *Nares* utrinque geminae $2\frac{1}{2}$ lin. a rostri apice, appendicula cutacea interjecta. *Spinula* ante nares recurva linearis, erecta. *Orbitae* ad rostrum utrinque maximae, deorsum declives, supra obumbratae, cranio in *apophysin* supraciliarem, triangularem, planam obliquo producto. *Pupilla* ampla nigra: *Irides* argenteo-inauratae. *Opercula* branchiarum lunata, subtus longitudinaliter amplissime dissecta, postica lamina integra, ad nucham mucronata, anteriore inferne quadridentata, dente postico maximo crasso. Pone orbitam lamina medio tuberculo conico umbonata. Praeterea subtus prominet tuberculum articuli maxillae, et supra ad nucham utrinque tuber planum, callosum. *Membranae branchiales* sub gula transversa cute connatae sexradiatae, scabrae. *Corpus* a lato capite sensim compressum, angulatum ossiculis umbilicatis loricatum. Series ossiculorum primariae utrinque duae exiguis ex muticis a capite ortae ad caudam usque extensae laminis compositae transversim oblongis media spina obtusa umbonatis et ab umbone radiatim striatis. Hae pone pinnam ani contiguam, parallelae; anterius in-

terjectis *scutulis* planis obsoletissime umbilicatis intervallatae; quibus ad caput aliquot inferne extra seriem accedunt insigniter umbilicata. In abdomine *series duae* aliae ossiculorum minorum umbilicatorum, anterius interjecta serie abrupta lamellarum exilium, corioque late scaberrimo distantes, versus pinnam ani approximatae, hinc contiguae minutis coriculis caudam subtus tegunt. Alia *gemina series* dorsum tegit, inter quas pinnae dorsales exseruntur, quaeque in intervallo pinnarum dorsalium insignibus et prominentissimis scutulis constant. Ante pinnam dorsi priorem *nucha* lamellis parvulis striatis obtecta, quarum et aliquae inter initia serierum dorsalium et lateralium spatia explent. *Anus* forma rimae $\frac{1}{3}$ longitudinis ab ore.

Pinna dorsalis anterior nuchae proxima, robustissima, e radiis sex subulatis ad basin utrinque acie angulatis, quorum primi confertissimi, facta. *Corium* inter radios crassum versus pinnae marginem scabrum.

Pinna dorsi altera caudae propior radiorum septem simplicium, sed molliorum.

Pinnae pectorales magnae, latae rotundatae, radiorum 12 quorum summus exilis, omnes simplices.

Pinnae ventrales pectoralibus paulo posteriores, parallelae didactylae. P. *ani* dorsali secundae opposita radiorum octo oppositae dorsali similium, quorum posticus re-

motissimus, exilis penultimus longior reliquis antrorsum per gradus minoribus; membranae inter radios hujus pinnae resectae.

Cauda rotundata, radiorum 12 simplicium, molliumque praeter fulcra utrinque ternata. Hujus et pectoralium pinnarum membrana tenuior. Radii pinnarum omnium toti scaberrimi; scaberrimum praeterea abdomen, qua cute tegitur, totum, lateraque pone pinnas pectorales et gula inter membranas branchiales, harumque radii; nec non margo inferior orbitae et lamina operculorum dentata. *Color* piscis recentis (secundum *Stellerum*) ex albo subflavum qualis in ebore antiquo manibus trito solet, in dorso fuscescens. Pinnae omnes rivulis fuscis fasciatae. In nucha macula lata, rivulis ad oculos et opercula pinnas pectorales diffluens. Rivulus obliquus a pinna dorsi priore ad pectoralem; pone istum rivulus utrinque bicruris, ad pinnam dorsi secundam rivus latior, transversus, rivulique tandem varie cohaerentes circa caudam fusci coloris.

Specimen exsiccatum a *Stellero* immortali ad insulas Curilas lectum et cum descriptione transmissum. Semel tantum a se ipso repertum fuisse piscem, sed in ulterioribus insulis, quantum ex aliorum relatione didicerat, et circa Japoniam copiosius inveniri ipse monet in Adversariis et a Russis, qui una erant, nomine Vulpeculae (Li-

sitza) quod Cotto cataphracto maris Camtschatici tribuunt, appellatum fuisse. Ipsi vero *Stellero* dicitur: „*Cottus cirrhis carens, corpore octagono, squamis osseis striatis in medio obtuso aculeo extante armatis*" seu *Cottus* corpore octagono squamis osseis aculeatis. Immediate nunc *Agonus* meus *stegophtalmos*, nova species segaliensis, quae nuperrime jam inter Icones itineris nautici *Krusensterniani* historiam illustrantes, depicta est, et quae Japonico *Pallassii* admodum affinis est, sequeretur, nisi cognitas, novis speciebus adjiciendis praemittere mallem.

Spec. IV[ta] AGONUS *decagonus Blochii.*

A. corpore depresso, ante anum decagono, pone hexagono, capitis scutis aculeatis, operculo superius exciso, pinnis pectoralibus et caudali longis, rotundatis, fuscofasciatis.

Branch. 6. *Pect.* 18. *Vent.* 2. *Anal.* 8. *Caud.* 12. *Dors.* 6. 7.
Magnitudo pedalis, habitat in maribus Indiae orientalis.
Bloch syst. Ichthyol. Tab. 27. pag. 105. Die zehneckige indische Panzergroppe.

Decagonam et majorem hanc speciem ex *Blochii* tantum, in cujus Museo individuum pedalis magnitudinis conservatur, descriptione perbrevi et incompleta et ex icone in systemate ichthyologiae communicata (Tab. 27.) novimus. Agonus est magnus admodum gracilis ad Sygnathos

Digitized by Google

adspirans; cujus tamen forma incurvata, quae in icone expressa est, non habitus proprius mihi esse videtur sed fortassis potius casu a vase vitreo angustiore vel exsiccando exorta. Caput in icone angulatum ac uncis et aculeis variis armatum, vertex aculeis tribus recurvatis, opercula inferius utrinque tribus et binis minoribus nasalibus muniti. Maxilla superior paulo prominens et in fraeno oris utrinque cirrhis quibusdam fibrillata videtur. Locus natalis non indicatur sed generatim ex India orientali allatus dicitur; caeterum cum Camtschatico Agono sulcató - serràto seu Dodecäedro, nova specie minori hyperborea, celeb. *Palassii* Phalangistes loricatus, ab *Italmenis* vero *Kullnah* dicta quodámodo convenit, licet haec non superiori sed inferiori maxilla paulo prominente distincta sit. Figura secunda in Icone Blochiana (Tab. 27.) delineata, inferiora capitis thoracis et abdominis prono situ repraesentans propter similem scutorum pectoralium structuram prae caeteris hancce comparationem confirmare videtur.

Indicatis jamjam huc usque cognitis Agonorum quatuor speciebus, transgrediamur nunc ad novas totidem nondum descriptas ex Oceano orientali allatas, quae cum una vel altera descriptarum majori minorive affinitatis specie conjunctae novi generis naturam ejusque necessitatem constituendi prorsus confirmabunt.

Spec. V^{ta}, AGONUS *accipenserimus mihi* Tab. XI, *nova*.

A. ore infero cirrhis plurimis obsito, corpore octaëdro, angulis aculeato-serratis, linea laterali antrorsum vix conspicua.

Phalangistes accipenserinus Pallassii (Zoographiae Rosso-Asiaticae Vol. III. N°. 91. Tab. XVII. cujus descriptionem ad tabulam meam explicandam adoptabo).

Cottus cirrhis plurimis *Steller* pisc. Camtsch. descript. Mnscrpt. n°. 32. Ruthenis in Camtschatca *Lisitza* (Лисица) dictus, Aleutis *Koschadanguitsch*, circa insulam Unalaschka, Americae vicinam in mari frequens, unde complura specimina attulit D. D. Merk, specimina mea ex littoribus Camtschaticis lecta sunt et cel. *Steller* ex pluribus regionibus sua collegit et descriptioni suae synonyma Agoni Cataphracti marium Europae, adjecit, quoniam nil nisi varietatem climaticam in iis vidit, ut ex adjecta ejusdem descriptione elucebit. **Der aleutische oder asiatische Steinpicker.**

Descriptio.

Facies eadem ac omnino parvi accipenseris et color Acc. rutheni dilutior. *Caput* tetraëdrum osseum productum *rostro* depresso, supra convexo usque ad *orbitas argute porcato*, subtus plano cirrhifero molli utroque

Digitized by Google

margine argutissimo, denticulato. Aculei rostri quatuor in apice terminales, quorum *duo* recta protensi, duo recurvi, duo utrinque marginales, distantes recurvi, unus supra in medio ante orbitas gemellus, ex una basi. *Os* sub medio rostro lunatum, *maxilla* inferiore multo breviore, utraque labiata denticulis minutissimis raris in margine, aspera et cirrhis marginalibus versus apicem capillaribus subsemipollicaribus crispatis fimbriata. Anguli rictus cute prolixi, cirrhiferi, cirrhis albis circiter 7 in externo margine osseo, praesertim ad verticem prominentissimae, *spina* supraciliari simplici et carina arguta pone oculos longitudinali, lineis lateralibus respondente. *Oculi* circuli instar rotundi, majusculi, iride pallide aurea. *Opercula* branchiarum plana laminis subtiliter striatis, postice ad pinnas pectorales spina brevi marginali. Membrana branchiostega sub operculis fere latens, radiis sex arcuatis. Corpus a capite sensim attenuatum, non compressum, usque ad finem pinnae ani et dorsalium serrato octaëdrum totum loricatum squamis osseis contiguis octuplici serie intervallis angulorum dorsali et ventrali latioribus, planiusculis, latioribus tribus subcanaliculatis. *Cauda* depressa hexangula, angulo dorsali et ventrali (in quos dorsales et ventrales trunci anguli coëunt) obsoletissimis. Squamae loricae omnes in medio ad ipsos angulos postice aculeo recurvo, scabro

umbonatae, et per ambitum *striis* punctato scabris radiantibus ornatae, dorsalium et lateralium angulorum maxime aculeatae et dorsales versus nucham prominentissimae, ventralium aculeo obsoleto in carinam evanescente. *Lineae laterales* inter angulos laterales intermediae rectae interrupto-prominulae usque in caudam, sed antrorsum e regione pinnae ani primae, cum superiore angulorum dorsalium coïncidentes. *Pinnae* hyalinae subnebulosae interdum maculatae radiis setaceis tenuibus; *pectorales* laterales, planae, oblongo latae radiis 17 fascia una alterave obsoletissima, fuscescente ad basin; *ventrales* medio pectore inter pectorales valde approximatae, biradiatae. *Pinna dorsalis prior* lutescens, novemradiata, margine fuscescens et radiis prominulis subserrata, non spinosa; *secunda* octoradiata, immaculata plerumque. *Pinna ani* octoradiata hyalina; *caudae* maculata aequalis rad. XI. simplicibus. Angulorum corporis tantum laterales per caudam argutius continuatae et superiores horum spinis serratae. Color lutescente pallidus supra gryseo fuscus; fasciolae fuscae transversae laterales per suturas scutellorum undulatae. Longitudo a spinis rostralibus ad finem caudae 9″ 3‴ capitis cum operculis 2″ 2‴ caudae sine pinna 4″ 1½‴ pinnae 1″. Rostrum ultra os prominet fere 6‴. Orbitae a summo rostro 1″ 1‴ pinna dorsi prior 2″ 9‴ ejus extensio 1″ 8‴ inde

secundam $2\frac{1}{3}'''$ hujus expansio $1''$ inde ad pinnam caudae $2''\ 11'''$. Pinnarum pectoralium a summo rostro distantia $2''\ 4\frac{1}{2}'''$ eorum longitudo $1''\ 6'''$ ventralium a rostro $2''\ 2'''$. Longitudo $11\frac{1}{2}'''$. Ani distantia a rostro $4''\ 1\frac{1}{2}'''$ ejus extensio $1''$ altitudo capitis ad nucham $1''$ transversus diameter $10'''$.

Stelleri descriptio. (Pisc. Camtsch. desc. n°. 32.)

„Cottus cirrhis plurimis, corpore octagono Artedi spec. 37.
Cataphractus Schoneveld p. 30. Jonston 1. 2.
Charleston on. p. 152. Willughby p. 211.
Raji Synops. p. p. 77.

„Circa mare ab undis ejectus saepe reperitur, a dictis „auctoribus optime descriptus et primo intuitu statim pis„cis *notissimus*. — Differunt tamen pro diversitate locorum. „Quae circa insulas Curillicas occurrunt, 1) caput de„pressum 2) orbitas superius elatiores 3) oras valvae „branchialis vix tuberculis asperas 4) aculeos binos su„pra labium superius et alios binos supra nares exiguos „et obtusos habent 5) septem utrimque anteriores squamae „in dorso minus prominent nec a reliquis figura et asperi„tate differunt.

„Qui vero pisces 8 gradus versus septemtrionem ab „hinc, circa insulam *Karaga* capiuntur iis est, 1) ca„put elatius pone oculos repente depressius, versus api-

„cem rostri acutius, 2) orbitae oculorum elatiores et cras-
„siores ac medium capitis intra orbitas magis concavum.
„3) Orae valvae branchialis brevibus aculeis horridae.
„4) aculei bini supra et ante extremum rostrum et bini
„supra nares majores et acutiores, 5) septem anteriores
„squamae utrimque in dorso in medio acute elatae sunt
„et postica parte in aculeos breves versus caudam spec-
„tantes abeunt, nihilo tamen minus haec in minutis rebus
„diversitas non efficit varias species: in reliquis enim ma-
„joris momenti notis sine ulla exceptione conveniunt.
„Indicandum autem mihi hoc fuit, ne alii diversas sta-
„tuant species, deinde ut ostendam, quid loci diversitas
„in piscibus iisdem mutet, denique ut sententiam meam
„confirmem, pisces marinos loca nativa non mutare et ubi-
„vis in Oceano circumvagari instar Cetaceorum, si enim
„hoc esset, nulla ratio dari posset, qua re pisces pro di-
„versitate locorum formarum varietates ostenderent. Has
„duas inter se differentes species exsiccatas servo, ut cum
„iis conferre possim quae in Gazophylacio Academico as-
„servantur ex Anglia et Holsatia allatis."

Quicunque piscem nostrum Oceani orientalis in tri-
plici situ, quo eundem Tab. XI^ma^ Fig. 1. 2. 3. proposui,
perlustraverit eumque cum Cotto cataphracto in Iconibus Blo-
chianis Tab. XXXIX. fig. 3 et 4 piscium Germaniae optime

Digitized by Google

delineato comparaverit, is facile intelliget, Asiaticam ab Europaea diversam esse speciem, qua de re etiam rerum naturalium peritissimus et acutissimus Pallas sibi optime persuasum habuit. Caeterum omnino maria Europaea inhabitanti Cataphracto simillimus est noster.

Spec. VI^ta AGONUS *stegophthalmus*, *Segaliensis*. *Nova Spec.*

A. corpore octaëdro scutis laevibus spina obtusa prominulis cataphracto, capite depresso superciliis osseis oculum utrinque obtegentibus subconicis, cotyledonibus in jugulo ad membranae branchiostegae intervallum distincto.

B. 6. Pect. 12. D. a 6. p. 7. V. 2 A 8 C. 16.

Die vierekkige Panzergroppe aus dem sachalinischen Meere oder der sachalinische Eckfisch mit den Augendächern und den Saugwarzen an der Kehle. Siehe Krusensterns Reise 4ter Band. Atlas Tab. 87.

Cottus corpore octagono squamis osseis aculatis cirrhis carens auctoribus nondum descriptus *Steller* Manuscript. ichthyol. n°. 34.

Agonus stegophthalmus ab apophysibus osseis tectorum instar oculis superimpositis ita dictus magnitudine et habitu cum Cotto Japonico Pallassii in spicilegiis Zoo-

logicis descripto omnino quidem convenit, sed crassior, robustior, non tam gracilis scutis non striatis, aculeis obtusioribus et pinnis robustissimis nec non cotyledonibus vel papillis in jugulo membranae branchiostegae utrinque quatuor distinctus. Oculi ejusdem, supra obtecti, deorsum versus directi sunt et propterea piscem maris fundum tantum inspicientem non sursum spectantem indicare videntur. Re vera et ipse cum Cottis et Hemilepidotis nuperrime jam descriptis, carcinoidibus et Cancris brachiuris ex genere Majae, Muricibus et Buccinis, in quibus Bernardus asylum occuperverat, Buccinorum ovariis, Aphroditis Amphinomis, Nereïdibus, Asteriae placentis, Flustris denique et spongiis ope retis piscatorii prope insulam *Sachalin* circa patientiae sinum ex fundo maris argilloso-arenosi haud profundo die 30 Julii 1805 extractus est. Semel tantum hunc piscem, rarioribus forsan adscribendum, vidi eundemque ad vivum delineavi, quo cum Cotto Jponico Pallassii conferri possit. Nec dubito, quin alter ab altero, licet meus ex vivo, alter ex specimine exsiccato ut videtur depictus sit nec in Museo Academico repertus, specie abhorreat cum beatus vir ipse meum a suo diversum putaverit.

Descriptio.

A. magnitudo pedalis habitus Cotti Japonici.

Digitized by Google

Caput longum osseum postice depressum latum antrorsum cuneiforme in rostrum obtusum angustatum, supra longitudinaliter excavatum et stria prominula (vid. A. fig. 2.) notatum. *Rostrum* ad oculos dilatatum (*aa*) et supra oculum utrumque in laminam supraciliarem (*aa*) triquetram subconicam diagonali directioni extrorsum versus ascendentem productum, supra nares tuberculo retrorsum curvato (*bb*) exasperatum. *Maxillae* et *opercula* branchialia tuberculata (*cc.* fig. 2.) priores cirrhis sex vel octo brevissimis ornatae (*dd*).

Os parvum, rictu angusto, retractile, maxillis mobilibus margine intus late scabris. Supra oris angulos utrinque lamella tridentata cujus dens prior cirrho auctus (*dd*).

Orbitae ad rostrum utrinque maximae in apophysin supraciliarem triangularem oblique sursum productae. *Oculi* sub tegmine earum obumbrata deorsum directi Uranoscopi oculis contrarii. Pupilla ampla obovata nigra annulo aureo cincta. Iris subradiata coeruleo virens. *Opercula* branchialia lunata subtus longitudinaliter amplissime dissecta, postica lamina integra, ad nucham mucronata, antica inferne tuberculis osseis quadridentata, tuberculo postico maximo crasso aeque ac in *Synanceja Cervo* nuperrime descripto. Pone orbitam lamina media tuberculo conico umbonata. Praeterea subtus prominet tuberculum

maxillae et supra ad nucham utrinque tuber planum callosum, ita, ut totum caput ubique fere ut in Synancejis tuberculatum sit. *Cirrhi* maxillae inferioris in figura prima et tertia tabulae secundae in conspectum veniunt. Membranae utrinque sexradiatae branchiales (fig. 3. *ff.*) sub gula transversa cute connatae papillis utrinque quatuor postice instructae scabrae (*cc*). Corpus angulatum rectum gracile a lato capite sensim compressum lamellis osseis oblongis laevibus transversalibus loricatum. Anguli octo, totidem plana intercipientes, tot tuberculis prominent, quot lamellae plana constituentes numerantur. Pinnae et prae caeteris dorsi, quarum membrana radiis intertexta admodum tenax et crassa est, basi protuberante pyramidali et robustissima gaudent nec non radiis ex membranis prominentibus simplicibus omnes instructae sunt, pectorales et caudales flabelliformes, pectorales ut in Cottis et Synancejis alaeformes latissimae et duodecim-radiatae, caudalis rotundata sedecim radiata, dorsalis anterior sexradiata, posterior septemradiata, ventrales inter pectorales in medio approximatae biradiatae, analis denique octoradiata dorsali posteriori opposita. Anus tuberculum acuminatum formans, inter et paulo infra pinnas ventrales, ori propius quam caudae. Color lutescens supra fuscidior fasciis transversalibus fuscis et maculis albis variegatus,

Digitized by Google

maculae et fasciae interdum perfusae violaceo fuscescentes. Figura tabulae secundae prima piscem a latere, secunda caput et dorsum ex fronte ostendit *aa*. Laminae osseae oculum utrumque obtegentes *bb*, aculei nasales recurvati *cccc*, tubercula ossea ad latera capitis *dd* cirrhi e pinnae pector, *f* dorsal. ant. A. Caput inter orbitas depressum latiusculum.

Figura tertia partes thoracis et pectoris in supino situ piscis reddit. A. *b.* oculi cum tectis osseis eorum. *c c c c.* papillae jugulares *dd* cirrhi *ee* tubercula lateralia capitis *f* radii membranae branchiostegae *gg* pinnae ventrales.

Cel. *Steller*, nisi eandem Agoni speciem viderit, saltem varietatem ejusdem sequentibus verbis descripsit: N°, 34. Mnscrpt.

„*Cottus corpore octagono, squamis osseis striatis in medio obtuso aculeo extante armatis*, auctoribus nondum descripta species in insulis Curillicis e mari eliminata et in littore a me inventa 1743 die 15 Junii.

„Piscis aspectu mirabilis rarissime capi in insulis „remotioribus, Japoniam versus, dicitur. Caput plagioplateum, medium capitis a nucha ad extremum rostrum depressum et tantillum concavum, latera supra oculos elevata, sutura capitis ad nucham arcuata. Nucha versus

„extremum rostrum subinde angustior evadit. Lamella os-„sea valida supra oculos versus latera extenditur in su-„perficiem tuberculosam instar corii, sub qua oculi veluti „sub lato suggrundio latent nec conspiciuntur, si piscis „prone jacentis caput supine aspicias."

Valva branchialis ut totum caput ossea e quatuor lamellis validis osseis conflata, quarum prima post oculos squamis aculeatis dorsi similis, altera trapezoidea, tertia triangula exiguis tuberculis instar corii hispanici aspera, quarta cui membrana branchiostega annectitur, longa et angusta e qua quatuor vel quinque aculei obtusi crassi et bseves eminent.

Rostrum extremum subrotundum ante oculos subito angustius evadit et fere quadratum, labium superius geminatum, maxilla inferior $\frac{1}{2}$ lineae longior subrotunda, utraque maxilla intus limae instar aspera.

Nares utrinque geminae $2\frac{1}{2}$ linearum tantum ab extimo rostro distant, appendicula cutanea propendente distinguuntur. Supra et ante nares aculei duo versus dorsum recurvi acuti lineae longitudine erecti supra ipsas labii superioris oras, utrinque ad quodvis latus unus, intra hos versus nucham areola trigona tres lineas longa et lata cernitur.

Post oris fraenum aculei duo obtusi breves deorsum versus labium inferius tendunt. Oculi pro piscis mole maximi ab uno orbitae cantho ad alterum $7\frac{1}{2}$ linearum longi, 5 lineas lati, pupilla ampla nigra, iris ex aureo-argentea. Mentum, membrana branchiostega, supra sternum, pectus, venter ante et post anum tuberculis instar corii hispanici aspera sunt. Ossicula branchiostega incurva, sex similitor in superficie aliquantulum aspera. Pinna dorsi anterior aculeis sex indivisis asperis et acutis componitur, aculei supra membranam conjungentem eminent, anterior reliquis multo crassior, sed brevior. Pinna dorsi altera 6 pariter asperis sed mollibus et flexilibus radiis componitur. Caudae pinna e sedecim mollibus sed asperis ossiculis conflata, in extima circumscriptione resima est seu rectilinearis. Pinna caudae ad insertionem excavata segmentum circuli refert. Pinnae ventrales ex quatuor mollibus ossiculis, quorum intimum vix linea longius, componuntur.

Pinnae pectorales longae et latae ex tredecim ossiculis flexilibus componuntur. Pinna analis octo ossicula mollia continet. Membranae conjungentes omnium pinnarum subflavi arenacei coloris sunt, qualis in ebore vetusto diu usurpato cernitur et fasciis transversis fusco-violaceis

variegantur. Membrana branchiostega sternum veluti amiculum ambit. Anus rima tantummodo est oblonga sita initio alterius partis totius piscis in tres partes aequales divisi. Linea lateralis superiore parte aliquantulum versus dorsum reflectitur, abhinc media latera dividit, componitur ex lenticularibus lineam longis osseis squamis, in quarum singularum medio lineola eminens anliquantulum cernitur. Quae vero piscem primo intuitu confestim ab omnibus distinguunt et notissimum reddunt, sequentia sunt:

1mo figura corporis octagona ex octo seriebus squamarum composita et cum squamis lineae lateralis in interstitio sitis 10, harum 2 series, latera dorsi et dorsum obvestiunt, quarum aculei e centro prodeuntes squamarum post primam dorsi pinnam $4\frac{1}{2}$ linearum a se invicem distant, 2 series supra lineam lateralem utrinque in lateribus cujusvis aculei indicato loco ab aculeis squamarum dorsi distant 5 lineis, 2 series utrinque infra lineam lateralem in lateribus harum aculei indicato loco ab aculeis squamarum supra lineam 7 lineas distant, 2 series ultimae utrinque ad latera ventris.

2do figura et substantia squamarum: squamae validissimae osseae sunt, extremitate se invicem contingentes figura oblongae quadratae a centro versus peripheriam stria-

tae seu radiosae „(quod mihi quidem non in conspectum venit, sed forsan haecce tenerrima structura laminarum muco obtectarum in vivo pisce nondum conspicua?)" e medio vel ipso centro cujusvis squamae aculeus teres obtusus emergit, hi aculei versus caput lineam longi, versus caudam una cum peripheria corporis subinde angustiore, breviores ipsi sensim evadunt, ita et aculei hi ad dorsum utrimque recti in reliquis sex seriebus versus caudam aliquantulum recurvi uncinati, in ventre supra anum hinc inde sed paucae nulloque ordine quaedam insuper squamulae cernuntur ita et utrimque ad anum 2 series aculeatarum minorum squamarum 2 uncias longae observantur.

Ad radices pinnarum ventralium et dorsi aculei squamarum subinde breviores evadunt.

Color totius piscis ex albo subflavus, qualis in ebore solet diu in manubus trito, in dorso autem squamae fuscedinis quidquam obtinent.

Interna scrutari non potui propterea, quod unus tantummodo piscis fortuito mihi oblatus, quem pro Gazophylacio academico exsiccare volui, nec opus judico, cum externa partium structura singularis illa notissimum reddat et procul dubio interna prorsus ita se habent, ut in Cottis reliquis (nb. cataphractis) et praecipue in Cotto cirrhis

Digitized by Google

carente corpore octagono Artedii. Sed partium accuratam *dimensionem* addere non superfluum duco:

Ad scalam Anglicanam dimensiones habuit sequentes:

	Unc.	Lin.
ab apice labii superioris ad extremam caudam - -	14	5
— — — — ad fraenum oris - - - -	-	$5\frac{2}{3}$
— — — — ad oculi canthum majorem - -	-	$6\frac{2}{3}$
— — — — ad nucham - - - -	2	5
— — — — ad anteriorem pinnam dorsi - -	3	4
— — — — ad operculum branchiale - -	7	-
— — — — ad initium pinnarum pectoralium -	3	2
— — — — ad initium pinnarum ventralium -	2	$6\frac{2}{3}$
— — — — ad anum - - - -	4	3
— — — — ad pinnam analem - - -	7	2
Longitudo pinnae primae dorsalis - - - -	1	6
— — — secundae dorsalis - - - -	1	5
— — — caudalis - - - - -	2	$5\frac{1}{2}$
Caudae pinna ad initium insertionis lata - - -	1	-
Longitudo pinnarum ventralium - - -	3	$2\frac{1}{2}$
— — — pectoralium - - - -	1	4
Altitudo capitis ad nares - - - - -	-	6
— — — post oculos - - - -	1	-
— — — ad nucham - - - - -	1	4
— — corporis ad primam pinnam dorsalem - -	2	2
— — — ad secundam pinnam dorsalem - -	2	-
— — — ad initium caudae - - -	1	-
Latitudo capitis ad nares - - - -	-	$4\frac{1}{2}$
— — — ad ossis supra oculos extantis suggrundii instar medium	1	$5\frac{2}{3}$
Latitudo corporis ad pinnas ventrales - - -	2	$4\frac{1}{2}$

Spec. VII. AGONUS *laevigatus Segaliensis n. Sp.*

A. corpore octaëdro gracili capite hiulco subtubuloso, ore supero edentulo, maxilla inferiore longiore.

Sygnathus Segaliensis thoracicus pinnis ventralibus instructus.

Digitized by Google

Die groppenartige Seenadel. Mémoires de la Societé Impériale des Naturalistes de Moscou. Vol. II. Tab. 14. et in Actis Acad. Imp. sc. Petrop. Rossicis. Vol. III. 1811.

Membr. branch. rad. 7. Pect. 14. Vent. 2. D. a 7. p. 8. A. 12. C. 10.

Sygnathus pinnis ventralibus destitutus est sed noster iisdem instructus, pertinet ad thoracicos radiis septem membranae branchiostegae distinctos, a Scorpaenis vero, quae in systemate *Linnaei* radiis septem membranae branchiostegae et capite hiulco distinguuntur, per habitum et formam pergracilem quae potius ab Agonis ad Sygnathos transire videtur, maxime abhorret.

Corpus actagonum medio trunco crassiusculum octopterygium, longum, gracile sygnathiforme scutis oblongis transversim inbricatis laevibus loricatum. *Caput* rostratum sulcatum depressum, spinis et aculeis recurvatis orbitalibus hiulcum, ore edentulo supero maxilla inferiore admodum prominente sursum curvata, subtubuloso, Fistulariis non absimili, oculis labiisque prominulis rostro resimo, cirrhis nullis nec papillis sed spina hiulca ad orbitam et aculeis duabus recurvatis ad orbitae utriusque marginem posteriorem armatum.

Nares ad apicem rostri vel juxta marginem labii superioris. *Opercula* branchiarum lunata amplissime hiantia pone orbitam aculeis binis armata. *Membrana branchiostega* ampla totum jugulum et sternum amiculi instar ambit, utrinque arcuatis radiis septem suffulta. *Truncus* ad pinnam dorsalem anteriorem et pectoralem utramque crassiusculus, in maximis tamen vix pollicaris, paulo depressus, versus caput et caudam sensim decrescens, angulis octo argutis vix serratis et seriebus octo laminarum transversalium vel scutorum planorum seu potius concavorum cataphractus.

Pinnae in Agonis diversae et tantum robustiores tantum tenuiores, in nostro aequales tenerrimae, pectorales maximae alatae rotundatae quatuordecim radiatae latissimae, ventrales approximatae, sub et inter pectorales, parallelae didactylae, dorsalis anterior nuchae proxima septemradiata posterior anali opposita octoradiata, analis duodecimradiata. Pinnarum omnium radii simplices excepta caudali. Pinna caudae flabelliformis rotundata radiis decem bifidis vel ramosis suffulta. Color piscis viventis subfuscus vel brunneo-flavens ad jugulum et ventrem paulo lucidior. Pinnae saepius fasciis interruptis maculatae sunt.

Digitized

Plura hujus speciei viva specimina d. 21. Maji 1805 a commilitonibus nostris *Ratmonovio* et *Fridericio*, Centurionis jussu ad littora exploranda missis, attentissimis simul cum Salmone, pluribus Alcyoniis, spongiis, fucis et testaceis ad navem allata sunt. Specimina haecce Agoni inventa sunt in lacunae arenosae littore insulae *Sachalien*, alias terrae Jeso, Jesso vel Carafuto appellatae, et quidem in sinu patientiae, a celeb. *La Peyrouse* quondam sic dicto haud procul a promontorio ejusdem nominis. Habitat igitur in Oceani orientalis, Insulam Segaliensem alluentis, fundo, ex quo interdum ab undis eliminatur et in littus ejectus invenitur.

Caeterum Agonus laevigatus Oceani Segaliensis Monopterygio et decagono minus quam sequentibus speciebus affinis videtur.

Spec. VIII. AGONUS *dodecaëdron* ***nova spec.*** *Camtschat.* Tab. XIII.

Agonus sex et septempollicaris trunco dodecagono cauda hexagona, capite cordato depresso rostrato, maxilla inferiore longiore, linea laterali conspicua, corpore sulcato-serrato gracili ad utramque extremitatem attenuato.

Der zwölfeckige kamtschadalische Furchenfisch.

Ruthenis in Camtschatca item *Lisitza.* Itaelmenis *Culná.*
Phalangistes loricatus Pallas Zoograph. Rosso - Asiaticae Vol. III. n°. 94. Tab. XIX.

Cottus corpore octagono, cirrhis carens, ore capiti contiguo *Stelleri* descr. piscium Camtsch. Mnscrpt. n°. 33.

Memb. branchiost. 6 rad. Pect. 18. D. a II. p. 7. V. 2. A. 15. Caud. 11.

Primo obtutu distinguitur a praecedente corpore sulcato - serrato dodecaëdro, minus gracili et capite minus depresso sinuatove ac minus hiulco, linea laterali elevata ac aspera nec non squamis vel scutis radiato - striatis et aculeo scabris. *Caput* depressum quadrilaterum breviusculum, cuneiforme, subrostratum supra quadrisulcatum vid. Fig. 1. et 2. ad nucham dilatatum et lineis quatuor elevatis obliteratum, subtus angustius, maxilla inferior longior sed angustior, superior latior brevior arcu duplici Fig. 2. *a* labiata, medio lacuna subemarginata Fig. 1. *a* utraque edentula, margine vix evidenter scabra, ore supero rictu angusto. *Oculi* magni laterales ovales, iridibus flavis per ambitum fusco nebulosis pupilla nigra annulo aureo cincta, *orbitae* oculorum margine inprimis postico elevato et in lineam elevatam nuchae longitudinalem producto cinctae. Vertex inter orbitas angustior excavatus versus nucham et opercula dilatatus. Opercula bran-

Digitized by Google

chiarum angusta utrinque oblongo convexa lamina eorum anterior infra et circum orbitam ambitu fere semicirculari arcuata, altera retrorsum a priore sinuata supra membranam branchiostegam mucrone recurvato (Fig. 2. *b*) armata, tertia jam in utroque latissimoque trunci latere musculo pectorali retrorsum a pinna pectorali utrinque imposita callis tribus vel quatuor, tuberculata. *Membrana branchiostega* nuda longe versus truncum pectoralem latissimum cuneiformem (Fig. 3. *a*) porrecta et in bifurcatione maxillae inferioris (Fig. 3. *b*) angulo acuto conjuncta, radiis utrinque sex arcuatis valde distantibus trunci cuneum amplectens, inter operculi secundam et tertiam laminam ad nucham usque ascendit. *Corpus* in trunco ad pinnas pectorales vel potius ad basin earum a lamina operculi tertia obtectam, depressum, capite latius, subtus sterno osseo trilobo scutis vel callis centro prominulis obtuse pentagonis vel hexangulatis loricato (Fig 3. *a*) prominulum, supra in dorso angulis duobus inter sulcum dorsalem ad caudam fere usque tendentem, argute serratum simulque a linea laterali retro et sub pectoralibus pinnis ascendente scutis loricatis tuberculosis cum altero utrinque angulo serrato confluentibus exasperatum (Fig. 2. *c c.*) irregulariter octangulatum, post pinnas pectorales vero dodecagonum usque ad caudam inter caudalem et analem pinnam, ubi anguli dorsa-

les serrati et ventrales confluunt et caudam attenuatam hexagonam formant. Sulcus et anguli quatuor dorsales serrati (Fig. 1. *c*) longitudine corporis decurrentes ex totidem squamarum mucrone centrali recurvo prominularum ordinibus compositi interiores supremi ad nucham depressiorem descendunt (Fig. 1. *b*) exteriores cum tuberculis lineae lateralis utriusque ascendentis confluentes ad extremam utrinque operculi laminam tuberculo axillari (Fig. 2. *d d*) terminantur. Anguli laterales subserrati (Fig. 3. *b b*) ventrales mutici, obtuse carinati (Fig. 3. *c c*) squamae angulorum dorsalium, sulcum dorsalem formantes aculeatae in figura quarta proponuntur, squamae ventrales sulcum abdominalem ad anum hiantem formantes, muticae obtuse carinatae in figura quinta aucta paululum magnitudine, squamarum lateralium ordines in figura sexta depictae sunt. Angulorum intervalla in vivis piscibus planiuscula, excepto dorsali, quod sinuatum est, in exsiccatis speciminibus intervalla contrahuntur et in sulcos mutantur, qua de re piscem sulcato serratum dixi. Intervalla lateralia superiore serie squamarum intercalarium minorum aculeatorum, quae lineas laterales constituunt ad nucham ascendentes, utrinque intercipiuntur et binis adventitiis angulis multiplicantur, unde series squamarum discoradiantium universae decem, sed cum intervallum laterale inferius in quo

Digitized by Google

squamarum alternarum ordines laterales per suturam connectuntur, a musculo pectorali ad extremitatem pinnarum usque deplanatum per dictam suturam sensim elevatam etiam utrinque in angulum obtusum laevem utrinque ascendat ad caudam fere usque, anguli decem duobus iterum accessoriis licet obtusiusculis augentur et piscis ex decagono fit dodecagonus. Anguli caudae dorsales et ventrales versus pinnam confluentes et accessorii bini modo descripti cum quatuor dictis angulis dum evanescunt piscis caudam versus pinnam in hexaëdram reducunt. Inter pinnas ventrales praecedentis speciei et sygnathorum ordines squamarum abdominales evanescunt ita ut spatium molle ad anum usque protensum appareat, generationi forsan inserviens, quod spatium molle vel membrana protensa in exsiccatis speciminibus interdum disrupta anum in rimam amplam et fere pollicarem dilatare solet (vid. Fig. 3). *Anus* ori propius quam caudae. *Pinnae pectorales* laterales alaeformes magnae oblongae radiis quindecim superioribus longioribus inferioribus brevioribus suffultae, tres radii priores albi reliqua pinna fulva flavo-reticulata, interdum subfasciata interdum et punctis aliquot fuscis adspersa. *Pinnae ventrales* albae biradiatae medio sterni lobo protuberante in ipso pectore insidentes, approximatae tamquam ex communi trunco tuberoso ortae. *Pinna*

dorsalis prior undecim - *posterior* septem - radiata, fuscofasciatae hyalinae. *Pinna ani* diaphana quindecimradiata litura saepe fusca ad ultimos radios. *Pin. caudae* subrotundata fuscescens, radiis undecim, aequalis (*c. c*) flabelliformis *Color* supra gryseo fuscus subtus albo lutescens. Longitudo septempollicaris, longitudo capitis a summo mandibulae inferioris apice ad nucham 1″ — 4‴ Orbitarum distantia a margine maxillae superioris $3\frac{1}{2}$‴ inter se 3‴ latitudo rostri $5\frac{1}{3}$‴ altitudo 4‴ capitis ad spinas operculorum latitudo 1″ altitudo $7\frac{1}{2}$‴ Distantia pinnae ventralis et pectoralium a summo rostro 1″ 6‴, pinnae dorsalis prioris 2″ 3‴ ejus extensio 1″ $5\frac{1}{2}$‴ secundae intervallum 3‴ extensio 10‴ distantia ad pinnam caudae 1″ $5\frac{1}{2}$‴ Distantia pinnae ani a summa maxilla 3″ $1\frac{1}{2}$‴ ejus extensio 1″ 6‴, longitudo pinnarum pectoralium 1″ $4\frac{1}{2}$‴.

Ex immortalis *Stelleri* annotationibus ichthyographicis ad littora Camtschatica consignatis descriptionem selegi piscis (n°. 33. Mnscrpt.) circa promontorium *Lopatca* in littore post procellam inventi, quae opinionem meam in synonymis declaratam confirmat piscem nempe *Stelleri* ad decagonum nostrum attinere imo saepius perlustrata, omnem dubitationem, quin Vir indefessus, piscem nostrum, praeterea inter frequentissimos numerandum jam anno 1742 et 1743 viderit et descripserit removet.

Digitized by Google

Cum vero singularis inter praecedentem et insequentem speciem intercedat affinitas, ita ut ipse dubius haesitaverim, an species distincta an varietas solum consideranda esset proxima, in medio relinquam, num a *Stellero* prius detecta sit an non. Cum denique tituli descriptionum *Stelleri* nimis vagi nec satis accurate concinnati sint, descriptionem ipsam addere volui, quo lectores ichthyophili ipsi decernere possint.

Stelleri descriptio.

„Cottus corpore octagono, ore capiti contiguo cirrhis nullis. Caput triangulum supine planum, prorsus depressum, versus rostrum sensim angustius, ad nucham emarginatum cor refert, quale a pictoribus rude adumbratur, cirrhis prorsus carens ut et aculeis ante et supra os et nares unus saltim aculeus brevis retroflexus utrinque in media seu penultima lamella valvae branchialis supra ossicula branchiostega. Oculi ovales 2 lineas longi, anteriores canthi 2 lineas ab extremo rostro distant. Nares utrinque geminae membranula tectae vix observabiles; ab oculi cantho majori et extremo rostro aequaliter distant. Os non in prona parte, ut in Cotto cataphracto, sed capite contiguum. Mandibula superior emissilis bijugis, appendices fraenales sesquilineares, infima parte latae et am-

bitu subrotundae. Maxilla inferior superiori tantillum longior et angustior sursum flexa. Rictus oris triplo angustior ac in Cotto cataphracto, non semicircularis sed quodammodo trapezii forma. Dentes nulli, labia tantum subtiliter aspera sunt, cirrhis ad os prorsus destituitur.

Valva branchialis e tribus sibi invicem subjectis lamellis conflata, harum media brevem versus caudam spectantem aculeum fovet. Membrana branchiostega ossicula sex incurva lata alba continet et sternum velut amiculum ambit. Branchiae utrinque quatuor parte concava tuberculis brevissimis pectinatae. Pinnae duae ventrales valde vicinae sitae, quatuor ossiculis constant, quaevis nempe binis, sex lineas longae, situ pectoralibus altiores.

Pectus a ventre magis ac in ullo alio pisce distinctum, forma ∧ accentum Ebraeorum *Atnach* dictum refert. Pinnae pectorales $1\frac{3}{10}$ unciar. longae 13 ossiculis suffulciuntur membrana tenui pellucida junctis. Pinnae in dorso duae, harum ossicula valde gracilia capillaria. Pinna post anum una equidem ossicula pergracilia continet. Pinna caudae in extremo subrotunda. Corpus tereti angulosum ab ano ad caudam valde gracilescit. Color dorsi canus ventris albus. Squamis tegitur lamellatis, quae in medio in prominentiam retroversam desinunt, unde corpus angu-

Digitized by Google

losum evadit, in antica corporis parte laminae hae octo ordinibus secundum longitudinem disponuntur unde haec pars octangula, postica ad caudam sexangula.

Linea lateralis recta circa pinnas pectorales sursum versus dorsum laeviter flexa e singularibus circularibus squamis in medio acutam linearem eminentiam habentibus conflata his 2 seriebus squamarum in linea laterali connumeratis 10 ordines squamarum emergunt. Squamae omnes, licet in medio eminentiam quandam habeant versus caudam acutiorem, una tamen series utrinque in lateribus supra lineam lateralem immediate eminentias vere aculeatas obtinet, aculei autem caudam versus spectant.

Praeter lineam lateralem una linea seu potius sulcus unus in dorso alter in ventre, praeter 8 series squamarum, si plana in antica parte corporis numeres, 12 plana sunt, in postica 8 „(ex duodecim hisce planis *Stellerum* piscem nostrum dodecagonum vidisse concludo)." Cotto cataphracto multum inferiores sunt hi cotti magnitudine vix septem uncias attingunt, plerique sex saltem longi sunt, eodem ac Cottus cataphractus nomine veniunt Itaelmenis ac Cosaccis nomine nempe *Lisitza*, a quo vix hanc speciem distinguunt licet distinctissima sit."

IX. AGONUS *rostratus Curilicus et Segäliensis.*
Tab. XIV.

Der spindelförmige Eckfisch, der greppenartige achteckige Rüsselfisch.

A. corpore octaëdro gracillimo versus capitis rostrum et caudam valde attenuato fusiformi oculis valde prominulis, maxilla inferiore longiore angustissima sursum ascendente.

Memb. branch. 5 *pect.* 13. *Dors. ant.* 8. *post.* 8. *Vent.* 2. *Anal.* 13. *Caud.* 10.

Omnium Agonorum per rostrum valde attenuatum et oculos prominentes nec non per formam corporis insolitam fusiformem maxime singularis et mirabilis aspectu. Corpus in medio vel versus thoracem crassius, versus caput et caudam sensim decrescit et demum in utraque extremitate tenuissimum, formam omnino paradoxam refert ita, ut tyrones in ichthyologia piscem nostrum cum aliis congeneribus speciebus vix confundere queant. Attamen hisce notis exceptis in omnibus fere reliquis essentialibus ita exacte cum praecedente specie convenit, ut varietatem tantum ejusdem habuerim donec plura specimina tam viventia quam exsiccata acceperim et conferendo certiorem me fecerim, tam magnitudinem, qua praecedentes duas species superat, quam formam corporis et rostri distinctam in

Digitized by Google

omnibus esse eandem et constantem. Praeterea non inter rariores sui generis pertinere videtur, cum nonsolum ipse Segalienses haud procul a promontorio et sinu *Aniwae* cel. *La Peyrousii* captas plures mecum attulerim, sed etiam alia specimina exsiccata tam ab immortali *Stellero* missa, quam ab indefesso *Merck* ex Oceano orientali insulas Curillicas alluente allata in Museo academico Petropolitano conspexerim. Qua de re consultius duxi, iconem ejusdem adjiciendi, quae piscem vario situ, prono et supino nec non a latere repraesentare et partes, quibus a praecedentibus binis speciebus abhorret, demonstrare valet. Caeterum, cum nec a *Stellero* nec ab acutissimo *Pallas* hanc speciem indicatam nec a praecedentibus distinctam invenerim, Descriptionem respectu figurarum addam sequentibus:

Corpus fusiforme decagonum vel docagonum ad utramque extremitatem acuminatum. Planum dorsale et ventrale latissimum, inde corpus magis depressum, in thorace prominulo robustissimo, scutis pentagonis vel hexagonis centro prominulis cataphracto latissimum et supine jacens (Fig. 3. Tab. XIV.) *Agono accipenserino* affine. *Pectus* cuneiforme subtus per membranam branchiostecham utrinque ossiculis 6 ascendentem amplectitur.

Membrana branchiostega antrorsum confluens angulo acuto maxillam inferiorem bifurcatam intrat (Tab. XIV.

Digitized by Google

Fig. 3. *b.*) retrorsum, ubique denudata ad nucham fere usque ad pinnarum pectoralium latissimas bases ascendens totum jugulum tegit. *Pinnarum ventralium* inter pectorales in medio pectore in sterno insertio admodum prominens. Pinnae approximatae ex sterno tamquam ex communi trunco tuberculoso ortae biradiatae cylindricae penicilliferae radiis nempe ad extremitates tantum liberis vel fissis (Tab. XIV. Fig. 4.).

Pectoralibus pinnis etiam singularis structura inest, alaeformes extremo rotundatae sunt, quatuordecim radiatae, radiis superioribus longioribus simplicissimis, inferioribus tribus brevissimis sed crassioribus et duplicatis suffultae. Bases pinnarum pectoralium elevatae latiusculae et ut in *Gasterosteo cataphracto* Camtschatico musculosae sunt, scutis tuberculosis vel potius lamina operculi tertia posteriori tectae. In hisce regionibus piscis latissimus est, posterius sensim, anterius confestim coarctatus. *Caput* acute triangulatum cordiforme rostrum format subascendentem. *Rostrum* vero non ut in *A. cataphracto* vel *accipensernio* a superiore maxilla formatur sed ab inferiore longiore et angustiore (Fig. 1 et 2. c. c.). *Os* non subtus ut in *accipenserino* sed supra, rictus oris angustus et subtubulosus, quam ob rem piscis noster cum *laevigato* sygnathiformi (Tab. III.) transitum ad sygnathos fistularias et Rhyncho-

cephalos facere videtur. *Opercula* branchialia ex laminis tribus composita, lamina anterior longiuscula in semicirculum fere arcuata oculum utrinque inferius cingens, posterius aculeis tribus ex communi basi ortis retro versis radiantibus armata (Tab. XIV. Fig. 1. *a.*) lamina altera media retro et supra priorem minor, mucrone retrorsum verso prominet (Fig. 1 et 2 *b b.*) et tertia musculum pectoralium pinnarum latissimum obtegens posterior binis vel tribus scutis medio tuberculatis composita. Vertex plano concavus inter oculos coarctatus versus nucham dilatatus, lineis quotuor longitudinem versus sulcatus. Oculi protuberantes subverticales approximati ovales iride virescente pupilla nigra annulo aureo cincta. *Maxilla superior* resima, labio duplici rotundato emarginata ad oris fraenum maxillam inferiorem angustiorem recipiens. Nares geminae membranula tectae margine prominulae ab oculi cantho posteriori spinescente et extremo rostro aequaliter distant. *Maxilla inferior* angulo obtuso ex amplexu superioris ad oris utrumque fraenum ascendit ac tuberculo labiali fisso ore aperto prominet (Fig. 1 — 2. *c c.*).

Corpus angulatum, ut in antecedente specie, sed crassius et latius in medio, tenuius ad extremitates et acutius serratum in dorso, ubi quatuor scutorum vel squamarum

ordines serrati decurrunt ad caudam, latera minus serrata sed abdominales squamae muticae nullo modo serratae, sed callosae sunt.

Scutorum vel squamarum structura eadem ac in praecedente specie cujus scuta dorsalia lateralia et abdominalia in Tabulae decimae quartae Fig. 4. 5. 6. delineata sunt. Scutorum forma oblonga, situs transversalis, h. e. scuta transversaliter imbricata, quatuor ordines a nucha ad caudam decurrentes angulis vel aduleis retroversis serratos formant. Sulcus vel planum dorsale sinuatum et abdominale in dorso et ventre latiusculum, versus caudam angustatum post pinnam dorsalem posteriorem et analem desinunt et anguli eorum confluunt, inde cauda hexangula fit. Plana corporis in hac specie non sulcata et angulosa sed sinuata tantum. Sutura abdominalis utrumque abdominalium scutorum ordinem conjungens inter pinnas ventrales hiat rima aperta. Haec in piscibus viventibus per membranam, quae et anum continet, obducitur sed in exsiccatis plerumque disrupta reperitur. Singularis haec scutorum secedentium et ventris per molliora integumenta amplificandi nec non a prole distenti et turgidi structura similis in Pegaso et Sygnathis et forsan in aliis piscibus cataphractis locum habere et forsan eandem ob causam adesse videtur.

Digitized by Google

Sic enim ex terris sinicis ad Europam revectus in sundaicarum insularum v. g. Borneo, Sumatrae, Javae archipelago et in transitu ad St^ae^ Helenae insulam afram Sygnathos novem pollicares prole turgidos ventre dilatato et scutis abdominalibus secessis plures ex fuci natantis (vulgo Sargazzo dicti) copiosissimis ab undis agitatis fasciculis selegi, qui exsiccati rima eadem abdominali instructi erant, forsan sequentia celeberri *Pallas* de eodem phaenomeno dicentis verba rem clariorem reddere valebunt:

„Anomali hujus generis (Sygnathi) Natura adhuc in „obscuro est. Credidi quondam et in spicilegiis Zoologicis, „fasciculo nempe VIII. p. 32, exposui, prolem infra matris „alvum exclusam rupto longitudinaliter abdomine effundi. „Sed obiter perspecta re erravi, etenim in ponticis sygna„this didici, matres ovulis majusculis gravidas et turgi„das, ea proprio ductu ani proximo excludere sed eodem „maturitatis tempore caudam inferiore latere discendenti„bus multum angulis latescere et *mediam suturam inter „squamas diffindi propter ovula obscuro quodam mechanismo „in hanc longitudinalem rimam intus satis spatiosam re„cepta, ubi excluduntur foetus, et aliquamdiu jam perfecta „proles latere solet.* An perfecto generationis negotio pe„reant matres, vel disrupta ovis caudae sutura coalescat „denuo et restituatur in integrum, adhuc in suspenso est

„enigma quod aliis solvendum relinquo. Videtur itaque „per signathos inter pisces marsupiam Didelphidum Na„tura imitari voluisse."

Regrediamur nunc ad calcem descriptionis nostrae. Pinnarum omnium maximae sunt pectorales radiis diversi generis suffultae superiores simplices setiformes longiores, inferiores breviores sed robustiores et tres infimi duplicati vel divisi ut et in universum inferiores partes ad ventrem sitae robustiores et majorem vim exercere videantur quod inprimis ventralibus pinnis robustissimis comprobatur. Pinna ani tredecim radiata, dorsalium quaevis octoradiata. Pinna caudae rotundata flabelliformis decemradiata, articulo radicali tuberoso et valido instructa. Cauda ipsa gracilis prope articulum tenuissima hexagona depressiuscula scutis proportione latioribus sed obtusioribus et vix conspicuis loricata.

APPENDIX
de Cyprino rostrato et cultrato, Trachino trichodonte et Eponephelo ciliato.

Celeberrimus *Pallas* in itinere priori piscem in fluminibus Davuricis viventem observavit et descripsit in itinerario (*Pallas* Reise 3ten Theils 2tes Buch. Anhang pag.

Digitized by Google

703, n°. 39.) et in Actis novis Petropolitanis Vol. 1mb pag. 355, in quo simul figuram piscis a latere et capitis ab inferiori parte visam in Tab. XI. Fig. 8 et 9. delineavit). Piscis novus qui, *Cyprinus Labeo* ab inventore appellatus et in icone adjecta depictus est (vid. Tabulam meam V. Fig. 2.), ore cyprinaceo quidem instructus est sed rostro non admodum insigni gaudet (si alias structura oris in icone bene expressa sit) ita, ut nequidem cum rostro *Cyprini Nasus Blochii* (Bloch's Fische Deutschlands Tab. II'.) comparari possit; attamen auctor celeberrimus alium piscem insigne rostratum ex Amure ex Lena et Covyma allatum cum priore Cyprino nempe Labeone vix ac ne vix quidem rostrato in unam eandemque speciem conjunxit et sub uno eodemque nomine pisces tam diversos venditavit. Etsi piscem rostratum injuste a Pallassio ad Labeonem relatum jam diu ad naturam delineassem et inter nova mea detecta retulissem, tamen errorem Pallassii non prius animadvertere potui quam cum in piscium descriptionibus suis revidendis et prelo subjiciendis in Zoographiae Rosso-Asiaticae Volumine tertio contentis occupatus fuerim et donec comparandi cura me attentum in eum fecisset. Perlectis itaque et comparatis iterumque perlectis piscium sub Cyprini Labeonis nomine conjunctorum descriptionibus tertia vice loco citato reimpressis, deni-

que intellexi, auctorem in eo errasse, quod piscem meum rostratum, in Onone, Ingoda, Schilca et reliquis per Amurem in orientalem Oceanum effluentibus fluviis copiosum, Tungusis ad Covymae fluvium *Tschukutschan* et a Jucagiris *Onatscha* dictum, a Davurico suo *Cyprino Labeone* non rostrato, quem Конъ dicunt, non separaverit nec distinxerit: sunt enim, quod in his lineis demonstrabo, nonsolum ex diversa ossium capitis structura sed ex multis aliis momentis etiam diversae et ab ipsa natura disjunctae species. Aquarum regionibus et climate simul abhorrent, *Labeo* Davuricorum et rostratus *Tschukutschan* Amuris et Covymae fluviorum civis est et posterior a priore, ut comparatio satis superque docet, nonsolum vario radiorum in pinnis numero, quem *Pallas* ipse in Lenensibus annotavit, sed etiam capitis et labiorum structura, nisi haec in figuris et descriptione *Pallassii* neglecta sit, omnino differt. Labeonis Davurici caput cyprinaceum est labiis inferis crassiusculis nullo modo productis instructum (vid. Tab. XV. Fig. 2. A et B), sed Cyprini rostrati caput longum angulo recto in rostrum descendit truncatum et fere equinum est Conf. (Tab. V. Fig. 1. B.) labia ex rostro verticali crassa carnosa pinguia subcrenata et papillosa prominent, rictus angustus fornicatus clibani orificio quasi hians et singularis maxillae superioris inferiorem intus re-

pressam amplectentis et deformis structura ita in oculos incurrit et ita abhorret ab orificio et capite Labeonis in figura nona tabulae XImae Vol. Imi Nov. Act. Petrop. delineato, ut vix intelligere possim, quomodo auctor celeb. formam ejusmodi abnormem silentio praeterire potuerit. Etiam in exsiccatis speciminibus rostrum angulo recto descendens et ore subtus hians angusto admodum conspicuum est et a *Pallassii* figuris toto coelo diversum, ut hoc mihi ex quinis a *Merkio* indefesso exsiccatis et e Covymae fluvio allatis speciminibus, quae coram habeo comparatum et compertum est. Os non est productile nec opercula mollusca, corpus non macrolepidotum, sed, ratione aliorum Cyprinorum potius microlepidotum. Pinna dorsi non est fusco cinerea nec octoradiata, sed duodecimradiata flavescens diaphana, pectorales non 19 sed 14 radiis suffultae, caetera, quae in Cyprino rostrato diversa sunt, in ipsa descriptione et figurarum explicatione afferam.

Descriptio *Cyprini rostrati* Tungusis ad Covymam fluv. *Tschukutschan* et Jucagiris *Onatscha* dicti. Tab. XV. Fig. 1 — 5. (Der Rüsselkarpfen, Ramskopf).

Magnitudo in adultis pedem superat, sed trium spithamarum longitudinem vix attingit. *Caput* osseum longum antice rostro descendente truncatum equino simile

quam ob rem Ruthenis Конъ dicitur aliis Produst, quoniam os subtus, ut in Cotto cataphracto vel Agono accipenserino, sed rictus oris vel orificium lunatum non amplum sed angustum labiis crassis pinguibus marginatum, labium anterius fornicatum, ambitu semicirculare ossibus labialibus vel mystaceis ad fraenum oris descendentibus arcuatis lateraliter tectum, labium posterius minus, rectum, ab anteriori inclusum amplexum papillis numerosissimis granulatum. *Oculi* laterales a rostro remoti operculo posteriori branchiali approximati ovales, iridibus aureis superne angustioribus, pupilla supra centrum posita. *Nares* ad marginem orbitae anteriorem duplices in sulco profundo osseo. *Opercula branchialia* trilamellata, *lamella anterior* cum ossibus maxillae superioris conjuncta ellyptica angusta ad orbitae marginem anteriorem ascendens inferius lamellae *secundae* tenerrimae angustiori orbitam inferiorem formanti imposita, lamina ossea subjacens, operculum medium formans, subtus plica isthmo juguli adnata, carne tegitur suborbitali. *Lamina posterior* maxima latissima ossea conchae adinstar fornicata, anterius cum orbitae margine posteriori juncta. *Membrana branchiostega* triradiata inter operculi laminam anteriorem subtus utrinque approximatam coarctata et in isthmo gulae conjuncta. *Corpus* oblongum erectum microlepidotum, squamis laevibus sub-

Digitized by Google

tilissime radiato-striatis oblongis (v. Tab. XV. Fig. 5. *a. b*), ad caput minoribus versus anum et caudam majoribus imbricatum crassiusculum leviter compressum, ventre dorsoque convexum. *Linea lateralis* recta versus medium corporis paululum descendens per seriem squamarum (Tab. XV. Fig. 5. *c. d.*) postice incisarum expressa versus caudam magis conspicua. *Color* in dorso atrocoeruleus nitidus, versus latera subargenteus, subtus albens.

Pinnae pectorales quatuordecim radiatae, radii medii longissimi, *ventrales* decemradiatae radio primo osseo acuminato, *dorsalis* decemradiata et duodecimradiata, radio primo cum adminiculo radicali, ultimo brevissimo ad basin usque fisso, omnibus ad apices quadrifidis, dorsalis pinna ventralibus opposita, *analis* p. septemradiata, radio primo simplici cum adminiculo radicali, reliquis quadrifidis, tertio longissimo septimo brevissimo. *Caudalis pinna* bifurca lacinia inferior paulo major undecimradiata, superior novemradiata, tota pinna viginti radiis suffulta extremis lateralibus cum adminiculo radicali connatis. Radii pinnarum ad extremitates quadrifidi et extremi ad radices duplicati vel ex binis truncis connati, quam ob rem primus dorsalis longissimus longitudinaliter ad basin sulcatus est, quod etiam in primo analis et caudalibus extremis fere ex tribus compositis cernitur. In dorsali et anali pinna

radii valde distant, pectorales ventrales et analis pinnae aureo-rubescentes et ad basin prominentes, pectorales adeo tuberosae, ventralium radices per membranosam laminam triangularem squamatam obteguntur. Anus caudae propior. Interna non exploravi. Characteribus caeterum generis cyprinacei ore nimirum edentulo, dentibus post branchialibus, membrana branchiostega triradiata utrinque instructus est. A celeberrimo *Merck* plura specimina exsiccata ex Covymae fluvio allata sunt, quae nomine Tschukutschan designata sunt. Annotavit simul idem, „piscem in Lena et Indigirca ejusque collaterali lapidoso Dogdo fluviis copiosum esse sed propter natationis velocitatem captu difficilem esse et non nisi in coecis fluminum ramis hamo capi, gregatim et velocissime natare, sapidissimum caeterum, excepto vere, cum ova spargunt nec aristis impeditum piscem esse, attamen ab accolis Covymae et Indigircae, (qui caput tantum in deliciis habent, reliqua canibus cedunt) non multum aestimari.“ Ut melius a lectoribus tres in hoc examine prolatae species, Labeo nempe Pallassii, Nasus Blochii vel Alberti et jam descriptus rostratus Tschucutschan dictus distingui possint, earum capita in tabulae adjectae XV. inter se comparanda delineavi. Figura prima Cyprinum rostratum a latere dimidio magnitudinis refert. *b* caput ejusdem ab inferiore parte

visum. Figura secunda Cyprini Labeonis caput a latere et tertia ab inferiore parte visum ex Pallassii icone refert Figura quarta Cyprini Nasus caput a latere ex Blochii icone (Tab. III. pisc. Germaniae) delineatum refert. In figura quinta denique squamarum Cyprini rostrati mei structura expressa est, a squamam refert majorem ex pinnae analis regione solutam naturali magnitudine *b.* eandem aucta magnitudine *c.* squamam adjacentem ex ordine squamarum lineam lateralem formantium naturali magnitudine *d.* aucta magnitudine eadem, in qua incisura canaliculata portionis posticae liberae adjacentibus squamis impositae in conspectum venit: puncta portionem squamae liberam non obtectam indicant.

Cyprinus cultratus (Der Säbelbauch).

Rossice Tschescha vel Sabla-riba, Permiensibus Perdisch i. e. securis. Tab. XV. fig. 6 et 7.

Cypr. gracilis cathetoplateus macrolepidotus dorso recto, ventre curvato, argutissime carinato, pinnis pectoralibus longissimis dorsi anique oppositis capite minori, oculis majoribus, ore supino.

Nemini usque adhuc, praeter *Merckio* attentissimo, piscem huncce ex fluminibus ad Oceanum orientalem tendentibus capiendi contigit, et omnium Rossiae ichthyolo-

gorum prorsus nullo, qui varietatem hancce climaticam demonstraverit vel demonstrandi occasionem antea habuerit. Cyprinus cultratus quidem inter rariores fluviorum Camtschaticorum cives pertinere videtur, quoniam studiosissimus *Stellerus* eundem numquam et *Merckius* semel tantum eundem piscarunt. Posterior vero, cum specimen unicum tantum piscis exsiccati secum portaverit, pisciculum retinuit nec *Pallassio* celeberrimo, quocum duplicata tantum communicavit, ut descriptionibus inservirent, admisit. Unicum hoc specimen exsiccatum et male conservatum post mortem collectoris, cum reliquis piscibus ab insectis fere exesis venale ab haeredibus Petropoli graeca fide mercatus sum. Alterum, quod jam anno 1805 mihi ab Argonauta Rossico *Patapof* communicatum est, specimen, ad naturam delineavi, quoniam eodem, cum *Blochii* piscium Germaniae icone 27 comparato, per nucham erectam, pinnas pectorales longiores per numerum radiorum in pinnis diversum et corporis habitum graciliorem, pisciculum Camtschaticum ab Europaeo diversum habui et gasteropeleci et Drachini trichodontis in sequentibus descripti (vid. ejusd. tabulae XV. Fig. 8.) ventre aemulantem putavi. In Rossiae Europeae fluviis versus pontum Euxinum et mare Caspium tendentibus Cyprinus cultratus frequens est ejusdemque proles pisciculis minutis exsiccatis et in foris

Digitized by

Rossiae *Snetki* dictis intermista et hyeme copiose occurrit, sed habitus et forma Rossicorum cum germanicis conveniunt, ut ex *Pallassii* icone in Zoographiae Rossicae Volumine tertio proposita videbis. Camtschaticus vero gracilior est et minor et pinnis pectoralibus longioribus instructus et dorso adeo recto ventreque arcuato, ut corpus opisthotono laborare videatur, et hujus equidem varietatem in sequentibus communicabo, formamque (in Fig. 6.) delineabo.

Descriptio.

Habitus clupeis affinis quem cum Rossicis et germanicis communem habet, ita ut jam *Wulfius* (ichthyolog. pag. 40. n°. 51.) Cyprinum cultratum borussicum clupeis adscripserit et Clupeam fluviatilem nominaverit vel falciformem, (i. e. Sichling, Sichelhering). *Magnitudo* vix sesquipedalis et minor plerumque. *Caput* parvum, *os* edentulum supinum seu verticale maxilla inferior longior, ascendens. *Oculi* magni ori approximati, Iris lata aurea superius viridescens pupilla nigra in centro iridis. Lamina mobilis acutangula anterius orbitam intrans et superius per ampla foramina narium perforata, os et oculos interjacens, versus labium arcu et radiis elevatis linearibus notata, inferius cum operculo branchiarum anteriori et margine orbitali conjungitur. *Operculum* triangulare posterius osseum

convexum conchae adinstar radiatum et splendore margaritaceo distinctum ad anterioris operculi canthum emarginatum vel crenato-radiatum descendit supra et retro operculum posterius angulo rotundatum *linea* oritur *lateralis* ramosa, quae mox descendens pinnis pectoralibus excidit et abdominis ad carinam tendit illaeque vicina supra ventrales et ani pinnam arcu laevi ad lobum pinnae caudalis inferiorem usque pergit. Nucha fere usque ad oculos carnosa et squamata, caput antice erectum postice inclinatum, unde branchiarum sinus supra inter se remoti. *Corpus* macrolepidotum late argenteum, *squamae* laterales et abdominales majores, dorsi minores. Magnitudo naturalis et structura squamarum majorum in icone (Fig. 7. tabulae 15.) expressa est Fig. *a* squamam denotat lateralem *b*. eandem aucta magnitudine, *c*. squamam ex serie abdominalium, per quam linea lateralis tendit naturali magnitudine, *d* eandem auctam et cum proxime adjacentibus. Linea lateralis ramos tantum infra emittit et quidem crassiores ac radii sunt et striae in squamis radiatis *b*. Omnium pinnarum robustissimae et longissimae sunt pectorales, quarum ope volitantium piscium v. g. Triglae et Exoceti more ex aquis Cyprini prosiliunt. Radiorum hujus pinnae articuli radicales bifidi et per apophysin radicalem, cui tendo musculi pectoralis magni inseritur promi-

Digitized by Google

nent. Musculus pectoralis ipse latissimus in toto suo ambitu sterni aeque lati plano affigitur. *Sternum* ipsum acie subtus cultratum pectoris, juguli et ventris cultrati figuram format. *Pinnae pectorales* deorsum vergentes subfalciformes octodecim radiatae, radio secundo superiori longissimo robustissimoque ad basin cum primo connato et incrassato. *Pinna dorsalis* minima radiis octo, quorum extremitates divisae et quorum primus longissimus est, composita. *Pinnae ventrales* praecedenti vix majores sed angustiores, octoradiatae ad basin prominulae ad ventris carinam approximatae, radii secundi longissimi cum primo brevissimo ad radicem juncti articulo latiusculo et robusto.

Pinna analis radiis 29 brevibus, quorum duodecim anteriores longiores ad apices divisi vel bifurcati sunt excepto primo brevissimo simplici cum secundo ad basin juncto, suffulta ex ipsa ventris carina emergit. *Pinna caudalis* bifurca et longe divaricata radiis 24, quorum medii breviores sed rariores ad apices quadrifidi, laterales vero extremi quatuor approximati et inter se juncti, primo utrinque brevissimo et quarto longissimo et robusto, suffulta. Radii omnes annulato squamati. Linea lateralis ad inferiorem caudae divaricatae lobum tendit ramulis crassiusculis deorsum tantum divergentibus (vid. Fig. 7. *c d.* Tab. XV.) distincta. Pisciculus noster naturali magnitudine et a latere depictus

Camtschaticus, nec pondere, quo libra et graviores in Germania *Blochius* invenit nec magnitudine Rossicis et germanicis aequat, sed minor gracilior et rarior et forsan Suecicis similior (Conf. Linn. itinerar. Vol. I. Tab. 2. f. 1 Skerknif.) quibus aqua marina non aliena est. Rarior est, quoniam aquas puriores limpidas praefert in quibus splendore margaritaceo fulget et sese oculis avium aquaticarum et piscium rapacium prodit ac patefacit, et quoniam Junio mense littora petens ova quae ab aliis animalibus avide devorantur ad herbarum graminumque littoralium stipites deponens flumina ascendit et a piscatoribus, ad paucos usque superstites capitur et fere eradicatur.

Trachinus gasteropelecus vel Trichodon Stelleri.

Das kamtschadalische Petermännchen. (Tab. XV. Fig. 8.)

Etsi jam immortalis et indefessus *Steller* hujus pisciculi (genus suum speciebus pauperum firmantis) inventor fuerit, tamen ichthyologis usque adhuc incognita remansit species. Sed hoc non mirum est, cum post *Stellerum* et *Merckium* ichthyologorum nullus Camtschatcam adierit et forsitam equidem primus fuerim, qui ad illustrandam *Stelleri* descriptionem, quam ipsius verbis communicabo, iconem pisciculi ad naturam delinearet. *Stellerus* vero Trachini Draconis immemor, in eo erravit, quod in pisciculo

suo trichodonte novum genus spectaret, qui tamen re vera Trachinus est et cum omnibus notis characteristicis in hoc genus quadrat. Structura enim capitis cranium rugosum cum ore supino, corporis habitus et ani et pinnarum situs singularis, Trachinum indicant, sed species pusilla pectore et ventre carinato cultrato et corpore opisthotonico insignis, Salmoni gasteropeleco *Pallassii* (Spicil. Zoolog. Fasc. VIII. t. 3. f. 4) vel clupeae sterniclae Lin. vel Cyprino cultrato affinis; a Dracone et Pennantii Trachino facillime distinguitur et nova est. Praeterea pinna dorsalis prior Draconis pinnula nigra multo major et tredecim vel quatuordecim radiata et pectorales latissimae radiis 21 suffultae sunt. Pisciculum ab undis eliminatum et ad littora arenosa sinus Awatschae rejectum inveni et magnitudine naturali ad vivum delineavi. Marinus est piscis flumina *Pallassio* Judice numquam intrans et nonsolum in arenosis Camtschaticis littoribus ad promontoria Chronok, Lopatca, Schemaetschik sed etiam circa insulas Aleuticas praesertim Unalaschkam inventus, attamen ex *Merckii* piscibus specimen exsiccatum habeo, quod secundum collectoris indefessi assertionem adscriptam ex Jenisei fluvio piscatum est. Camtschadalis dicitur *Uaschaktamysch* Aleutis *Anamchlyk* mihique Trachinus gasteropelecus vel Trichodon *Stelleri*, cujus descriptio jam sequitur:

„*Trichodon* est novum genus *) piscis ex ordine acanthopterygiorum, hujus notae characteristicae sunt 1) corpus cathetoplateum, longitudo ad latitudinem quadrupla 2) denticelli exteriores nigri flexiles pilosi, interiores ossei, albi exigui 3) ossicula branchiostega utrinque quinque 4) pinnae octo, anterior dorsi aculeata, 5) conchae branchiales seu claviculae pollicares anterius valde compressae et prominentes. Potuissem hoc novum genus vocare *ἐξόδον* ab *ἔξω* exterius et *ὀδοὺς* dens, quod exteriores dentes pilosi exteriorem situm in utraque mandibula obtinent, malui autem a substantia et forma dentium pilis affini mutare nomen, hoc quidem nomen affine est nomini generico *Chaetodon*, a clarissimo Artedio stabilito. Differt autem hic piscis ab illis 1) pinnarum in dorso numero 2) tota forma: Chaetodon ut plurimum subduplam saltim longitudinem ad latitudinem habet. Descriptus est in terris Camtschaticis d. 10. Junii 1744. Occurrit praesertim circa promontorium Chronok et Schemiatschik.

Ad scalam Anglicanam dimensiones piscis habuit sequentes:

---

*) *Stellerus* errat, non est novum genus, sed nova Trachini species cultrata vel gasteropeleca gutturosa et alepidota Oceano orientali propria.

	Unc.	Lin.
ab apice labii superioris ad extremam caudam	9	1
— — — — ad pinnam dorsi priorem	2	3
— — — — ad pinnam dorsi posteriorem	5	-
— — — — ad Oculos	-	4
— — — — ad superiorem valvae branch. cardinem	2	1
— — — — ad pinnam postbranchialem	2	4
— — — — ad pinnas pectorales	2	7
Pinnae dorsi anterioris basis lata	1	9
Pinnae dorsi posterioris basis lata	2	-
Pinnarum postbranchialium bases latae	1	3
Latitudo claviculárum	1	½
Pinnae analis basis lata	2	8
pinnae caudalis basis lata	-	5
Pinna caudae ad extremum lata	1	9
Latitudo piscis ad nucham	1	8,
— — — ad pinnas postbranchiales	2	2
— — — ad anum	1	8
— — — ad pinnam dorsi posteriorem	1	4

Squamis in universum caret ac molli cute tegitur. Summum caput, dorsum et latera supra lineam lateralem livent, infra lineam in antica corporis parte pure alba in postica cum levi et pallido aureo fulgore splendent. Caput et reliquum corpus cathetoplateum, ante anum valde crassum ob ventrem prominentem, in postica post anum parte latera compressa sunt, ob claviculas prominentes valde gutturosus, longitudo ad latitudinem maximam, quae est a pinnis pectoralibus ad dorsum, quadrupla.

Caput *) in vertice planum **) rectum, sutura ad nu-

*) Osseum.

**) Rugosum fossulis lineolis ac areolis varie exsculptum, fossa nasali latiuscula ad verticem inter oculos et sulcis duobus ad nares divergentibus exaratum.

cham bis arcuata. Nares utrinque duplices medio spatio inter oculos et rostrum extremum sitae per columnas exiguas nares discernentes cum duobus brevibus cirrhulis prominulae. Oculi ovales magni 6 lineas longi in summis lateribus capitis confestim sub cranio depresso siti. Mandibula superior ut et rictus arcuatus inferiori brevior labio cutaneo emissili praefinitur appendix fraenalis utrinque *) cuneum forma refert. Mandibula inferior superiori angustior sed longior, subrotunda et profundae cymbae instar excavata et sursum clauso ore multum adducitur.

Dentes duplicis substantiae formae et coloris, exteriores utrinque mandibulae accreti, foris conspicui nigri et pilosi saltem cirrhuli sunt in os vergentes flexiles acutissimi vix linea longiores et ad dimidiam saltim lineam liberi, unde et huic generi nomen. Reliqui dentes exigui conferti albi acutissimi sunt: 1^{mo} ad oras utriusque mandibulae quaquaversum inter hos duo medii in superiori mandibula reliquas magnitudine tantillum superant: 2^{do} $1\frac{1}{2}$ lineam ab extremo ore in palato linea 2 lineas longa segmentum circuli referens, denticellis obsita. 3° in imo palato duo pulvilli lenticulares asperi. Lingua tenuissima membranacea vix linea longior. Branchiae utrinque qua-

*) Supra in labio superiori per marginem orbitae crenulatum antice bispinosum obtectus.

ternae, concava parte brevibus tuberculis ad utrumque ossiculorum latus positis pectinatae. Vertebras obtinet 48 et 2 ossicula caudae ita et ossicula intermuscularia. Lapillus in postica capitis parte orbiculata, candida irregularis ab altera parte incisa, cranium denudatum totum rugosum est.

Valva branchialis (illis exceptis lamellis, quae ad mandibulam inferiorem spectant), e tribus lamellis conflatur; prima hypophthalmica fere quadrata versus oculi canthum posteriorem saltim producta et a quadrata figura aberrans, glabra; secunda post hanc $1\frac{1}{2}$ lineam lata quinque mucronibus *) coelata, horum tres reliquis majores omnes versus caudam et ossicula branchiostega spectant: tertia lamella reliquis omnibus major ad superiorem cardinem lineis ex uno centro prodeuntibus radiosa.

Membrana branchiostega 5 continet ossicula lata incurva, horum duo sub valva branchiali latent, penitus illi accreta sunt nec in conspectum veniunt, nisi valvam ipsam attollas et sollicite cultello observes, tria foris conspicua sunt, verum quatuor mentiuntur, summum scilicet ossiculum versus mentum non lamella, sed membranae branchiostegae saltim ruga est. Sternum a lateribus pla-

*) Deorsum divergentibus.

num ac compressum *). Concha branchialis seu claviculae utrinque valde latae, compressae glabrae aliter ac in ullo alio pisce, his pinnae postbranchiales accretae, basis pinnae concavum segmentum circuli refert. Pinnae postbranchiales dorsali anteriori recte oppositae valde latae, 20 ossiculis componuntur, horum 6 anteriora aequaliter longa ab hinc ad decimum sensim longiora inde ad vigesimum breviora ita ut haec pinna extima circumscriptione leviter et irregulariter triangula sit. Membrana conjungens ut et ossicula alba pellucida.

Pinna dorsi anterior 11 ossicula simplicia indivisa rigida et acuta obtinet, horum tertium reliquis longius, membrana conjungens hyalina pellucida et transversis lineolis fuscis variegata. Pinnae pectorales (ventrales vel jugulares) 6 constant ossiculis, horum medium reliquis longius, albescunt. Anus protuberans in medio piscis situs non computata caudae pinna. Pinna post anum alba ab ano ad caudam fere extenditur et quatuor lineis saltem a caudalis pinnae initio deficit. Pinna dorsi posterior 19 obtinet radios indivisos quidem sed flexiles, colore anteriori similis est. Cauda lata, hujus pinnae extima circumscriptio resi-

*) Aciem cultrati pectoris formans, anterius inter membranam branchiostegam dimidiatam insertum, a lateribus utrinque per membranam infime cum operculis conjunctum pinnis pectoralibus et inferius et posterius ventralibus insertionem praebet.

Digitized by Google

ma seu rectilinea. *) Linea lateralis valde obscura, summo dorso admodum propinqua. Extima cauda musculosa ad insertionem pinnae levissime subrotunda. Capiuntur hi pisces in arenosis circa mare orientale ubi cum undae recesserint, sub arena latitant, scrobes sibi excavant, foemellae ova pariunt, mares autem genituram superfundunt: in his scrobibus una cum exclusis pisciculis capiuntur."

Stellerum accuratissimum per valvam et claviculas operculum branchiale, per pinnam postbranchialem pectorales, et per pectorales ventrales, per ossicula radios in pinnis intelligere, ex ipsa ejus descriptione elucet, sed praeter eas, quas jam adjeci, Stellerianae descriptioni inserendas et suppositas annotationes, sequentia adhuc observata annotabo: Sternum latum subtus inter membranam branchiostegam operculis insertum in jugulo valde prosiliens ad pinnas ventrales procedens aciem abdominis cultrati efficiens speciem maxime omnium distinguit. Caput altius est ac longum, superat enim spatium a nucha ad aciem sterni longitudinem capitis ab apice maxillae ante-

---

*) Cauda in omnibus speciminibus, quae vidi, *bifurca*, pinna quatuordecim radiata. Juniores quadripollicares vidi et sic descripsi: *Trachinus Trichodon* alepidotus corpore cathetoplateo, capite osseo ore supino, rictu amplo, dentibus setaceis armato, labio inferiore cirrhulis fuscis ciliato, dorso recto ventre pectoreque cultrato, pinna dorsi priore tredecim radiata, pectoralibus latissimis.

rioris vel inferioris ad operculi finem. Caput supra in vertice planum infra ad jugulum in aciem compressum sectionem refert cuneiformem (vid. Fig. 9. Tab. XV. diameter verticalis capitis ad operculum) Margo orbitalis inferior subcrenulatus, anterior spinulam utrinque supra versus labium superius vel posterius, ossiculo fraenali vel mystaceo adpressam emittit. Pinna dorsalis prior non 11 sed tredecim radiis suffulta, pectorales 22.

Epinephelus ciliatus Camtschaticus et Americanus.

Das kamtschadalische Blödauge. Tab. XVI. Fig. 1—6.

Piscis macro - et microlepidotus purpureo rufescens vel argenteo fuscus pedalis et bipedalem magnitudinem interdum attingens, acanthopterygius marinus Oceano orientali Camtschatcam et Americam alluenti proprius a nullo Rossicorum peregrinatorum nec a *Stellero* nec *Merckio* descriptus, nec ipso *Pallassio* unquam allatus. Oculi hujus piscis magni periophthalmio tecti vel nebula obducti, qua de re *Blochius* generi nomen (Blödauge) *Epinephelus* dedit. *Caput* osseum, declive, crassum, breviusculum, squamis minoribus ciliatis imbricatum, maxilla inferiore prominente ad fraenum oris latissima operculo anteriori et inferiori conjuncta et ossiculo mystaceo ad oris fraenum latescente

Digitized by Google

utrinque obtecta. *Ossa labialia* utrinque angusta labium superius protractile, rictus oris amplissimus, *dentibus* utrinque minutis confertis incurvatis acerosis et in imo palato singulis denticulorum acervulis prominulis asperrimus. *Nares* geminae ante et inter oculos, spinulis binis vix sensilibus inter nares, sulcus nasalis ad labium superius osseum inter spinulas descendes. *Operculum posterius* bispinosum acuminatum, *anterius* exiliter serratum. *Membrana branchiostega* detecta septemradiata, radiis utrinque quatuor veris tribus spuriis suffulta et subtus sub jugulo *ossiculo* cuneiformi *interbranchiostego* acutangulo anterius per synchondrosin cum sterno conjuncto intertexta. Sternum triangulare divisum planum sub hiatu branchiali utrinque exteriora versus productum marginem hiatus osseum format in aciem fere sub operculo excurrentem. *Corpus* a latere compressum erectum heptapterygium pinnis omnibus fuscescentibus, caudali recta dorsali ad basin linea latiuscula atrofusca picta instructum et squamis majoribus ad arcum posteriorem ciliatis tectum et minoribus squamulis aeque ciliatis majorum margines cingentibus imbricatum.

Squamarum structuram in Tabulae XVI. Fig. 2. 3. 4 tam magnitudine naturali quam microscopio auctam videbis, squamae majores in Fig. 2. a naturali magnitudine delineatae in *b*.

microscopio auctae sunt et cum iis, quae cel. *Baster* (Opuscul. subseciv. lib. III. p. 117—145. Tab. XV. Fig. IV. 2.) ex cute spari (dorso acutissimo linea arcuata aurea inter oculos v. *Gronovii* Museum ichthyologicum 1. n°. 90) detraxit et delineavit similitudine conveniunt, et forsan sparus iste ex numero eorum fuit ex quibus *Blochius* dein Epinephelos suos elegit. Squamulas minores, quibuscum majorum squamarum margines fimbriatae sunt, in Fig. 3 naturales et *b* auctas delineavi in Figura 4 denique ejusdem Tabulae dispositio squamularum circa margines majorum squamarum aucta magnitudine repraesentata est. Per hocce vestimenti ornamentum squamae majores marginatae et fimbriatae quasi conspiciuntur et pisces hujus speciei ab omnibus reliquis speciebus congeneribus facillime distinguuntur. Pone gemina narium foramina utrinque tertium cernitur fortassis pro muco excernendo ad lubricanda ossa labialia superiora pro- et retractilia inserviens. Per fimbriata et squamulis pectinatis exornata integumenta et per ipsarum squamarum margines ciliatas superficies piscis exasperatur, quod primo tactu, dum manus a cauda versus caput ducitur, senties. *Pinnae pectorales* magnae et rotundatae, squamulis ad basin obsitae, octodecim radiis suffultae, quorum medii octavus nimirum et nonus longissimi et superiores bifidi. *Pinnae ventrales* robustae inter pectorales sitae radiis sex compositae

quorum quini bifidi vel potius quadrifidi primus simplex acuminatus cum proximo adjacenti connatus cum apophysi crassiuscula ossea ad basin prominet. *Pinna dorsalis* per totam dorsi longitudinem extensa angusta anterius et radiis 13 osseis acuminatis prominentibus aculeata posterius latior, radiis 14 divisis longioribus suffulta. *Pinna ani* robusta undecim radiis composita, quorum tres priores ossei aculeati et breviores, posteriores longiores et quadrifurcati sunt. Pinnae dorsalis pars lata posterior pinnae anali opposita et utriusque pinnae membrana squamulis imbricata est, quod in nullo Epinephelo usque adhuc descripto visum fuit. *Pinna caudalis* recta robusta radiis octodecim composita, quorum quatuor utrinque terminales approximati breviores inter se juncti et squamulis imbricati sunt, medii vero deni dilatati rariores et quadrifidi. *Linea lateralis* recta, dorso parallela, non in structura diversa squamarum sed lineolis 43 interruptis elevatis concatenatis subcutaneae suturae similibus conspicua.

Dimensiones et mensurae piscis exsiccati ad scalam anglicanam addo.

	Unciæ
Longitudo tota ab apice maxillae inferioris ad extremam pinn. caudalem	$16\frac{1}{2}$
Longitudo capitis — — — ad extremum operculum -	$4\frac{1}{8}$
— — — ab apice maxillae superioris — — — -	4
Dimensio ab apice maxillae inferioris ad initium pinnae pectoralis -	$4\frac{1}{3}$
— — — — — ad finem — — -	$7\frac{1}{6}$
— — — — — ad anum usque - - -	$9\frac{1}{3}$
— — — — — ad initium pinnae ani - -	10
— — — — — ad finem — — - -	13
— — — — — ad basin pinnae caudalis -	14
— — ab apice maxillae superioris ad initium pinnae dorsi -	4
Pinnae dorsalis extensio - - - - -	$8\frac{1}{3}$
Caput latum - - - - - - -	$1\frac{1}{2}$
— altum ex membrana branchiostega ad nucham usque - -	$3\frac{1}{2}$
Orbitae diameter - aeque ac spatium inter oculos - - -	1
Longitudo lineae lateralis - - - -	$10\frac{2}{3}$.

Digitized by Google

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES,

FAITES À ST. PETERSBOURG

PAR

FEU MR. INOKHODZOW,

ANNÉE MDCCCV, D'APRÈS LE VIEUX STYLE †,

RÉDIGÉ PAR

B. PETROW.

Présenté à la Conférence le 11 Dec. 1811.

† Voyez Tome II. des Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Petersbourg pag. 224.

I. Baromètre.

Hauteurs extrêmes, variation, milieu arithmétique, hauteur moyenne et nombre des jours, auxquels la hauteur du baromètre a été au-dessus de 28 *pouces de Paris.*

NB. m. signifie matin ou avant midi, apr. m. après midi et s. soir ou après midi.

Mois	Hauteurs les plus grandes,		Hauteurs les plus petites,		variation,	milieu arithmétique,	hauteur moyenne,	hauteur au dessus de 28 pouces,
	pouces	jours	pouces	jours	pouces	pouces	pouces	jours
Janv.	28,49	le 7 soir	27,23	le 31 matin	1,26	27,86	27,91	12
Févr.	28,48	le 24 apr. m.	27,34	le 19 matin	1,14	27,91	27,897	12
Mars	28,81	le 21 apr. m.	27,65	le 3 apr. m.	1,16	28,23	28,387	28
Avr.	28,48	le 11 apr. m.	27,63	le 15 soir	0,85	28,055	28,139	22
Mai	28,58	le 31 matin	27,50	le 10 apr. m.	1,08	28,04	28,173	25
Juin	28,57	le 1 m. et apr. m.	27,78	le 12 apr. m.	0,79	28,175	28,098	20
Juill.	28,47	le 17 matin	27,85	le 3 matin	0,62	28,16	28,19	28
Août	28,44	le 31 soir	27,56	le 19 soir	0,88	28,00	28,012	15
Sept.	28,67	le 16 matin	27,35	le 27 apr. m. et s.	1,32	28,01	28,146	20
Oct.	28,98	le 30 soir	27,57	le 16 apr. m.	1,41	28,275	28,117	19
Nov.	28,81	le 1 matin	27,18	le 23 apr. m.	1,63	27,995	27,734	7
Déc.	28,35	le 17 apr. m.	27,18	le 1 soir	1,17	27,765	27,80	8
A.	28,98	le 30 Oct.	27,18	le 23 Nov. et le 1 Déc.	1,80	28,08	28,050	216
H.	28,81	le 21 Mars	27,23	le 31 Janv.	1,58	28,02	28,105	116
E.	28,98	le 30 Oct.	27,35	le 27 Sept.	1,63	28,165	28,123	127

Digitized by Google

A. marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1805, comprenant les 365 jours de l'année.

H. marque l'intervalle de six mois d'hiver depuis le 1 Novembre 1804 jusqu'au 1 Mai 1805, comprenant 181 jours.

E. marque l'intervalle de six mois d'été depuis le 1 Mai 1805 jusqu'au 1 Novembre 1805, comprenant 184 jours.

On voit par le tableau précédent: 1) que la variation totale du baromètre a été la plus grande (de 1,63 pouce) en Novembre, et la plus petite (de 0,62 pouce) en Juillet; 2) que la hauteur moyenne du baromètre se trouve être la plus grande (de 28,387 pouces) en Mars, et la plus petite (de 27,734 pouces) en Novembre.

II. Thermomètre de *Mr. Delisle.*

1) Températures extrêmes de l'atmosphère avec leurs différences, milieu arithmétique et températures moyennes, pendant les matins et les soirs, à midi, ou bientôt après midi et pour chaque mois de l'année 1805.

Mois	Températures extrêmes: les plus basses, degrés	jours	les plus hautes, degrés	jours	leurs différences, degrés	leur milieu arithmétique, degrés	Températures moyennes: les matins et les soirs, degrés	à midi, ou bientôt apr midi. degrés	de chaque mois entier degrés
Janv.	187,8	le 20 matin	151,9	le 15 apr. m.	35,9	169,8	168,7	165,1	167,2
Févr.	196,4	le 7 m.	138	le 28 apr. m.	58,4	167,2	163,8	155,6	161,2
Mars	169	le 13 m.	132,6	le 21 apr. m.	36,4	150,8	156	143,6	151,8
Avr.	161	le 16 m.	117,8	le 29 apr. m.	43,2	139,4	146,5	135,5	142,5
Mai	146	le 7 m.	109,2	le 2 apr. m.	36,8	127,6	136,3	126,3	132,7
Juin	136	le 13 m.	108	le 28 apr. m.	28	122	127,9	118,7	124,9
Juill.	128,4	le 2 m.	104	le 20 apr. m.	24,4	116,2	121,3	112,4	118,3
Août	139,7	le 27 m.	116,5	le 1 apr. m.	23,2	128,1	129,9	123,8	126,6
Sept.	155,6	le 26 m.	119	le 1 apr. m.	36,6	137,3	140,6	133,7	138
Oct.	164,1	le 20 m.	138,4	le 1 apr. m.	25,7	151,2	153,4	149,2	152
Nov.	181,9	le 28 m.	142,7	le 20 soir	39,2	162,3	159	156,8	157
Déc.	183,2	le 23 soir	146,2	le 10 s. et 11 m.	37,0	164,7	158,1	156,7	157,6
A.	196,4	le 7 Févr.	104	le 20 Juill.	92,4	150,2	146,8	139,8	144,1
H.	196,4	le 7 Févr.	117,8	le 29 Avr.	78,6	157,1	161,5	154,2	159,0
E.	164,1	le 20 Oct.	104	le 20 Juill.	60,1	134,05	134,9	127,35	132,0

Digitized by Google

Le tableau précédent fait voir: 1) que le plus grand froid (de 196,4 degrés) a été le 7 Février matin; 2) que la plus grande chaleur (de 104 degrés) fut le 20 Juillet après midi; 3) que la plus grande différence entre la plus basse et la plus haute température de l'atmosphère a été (de 58,4 degrés) en Février, et la plus petite (de 23,2 degrés) en Août; 4) que la température moyenne, pendant les matins et les soirs, se trouve être la plus basse (de 168,7 degrés) en Janvier, et la plus haute (de 121,3 degrés) en Juillet; 5) qu'à midi, ou bientôt après midi, la température moyenne la plus basse (de 165,1 degrés) se trouve être de même en Janvier, et la plus haute (de 112,4 degrés), comme ci-dessus, en Juillet.

2) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs, à midi, ou bientôt après midi de chaque mois, au-dessous et au-dessus de quelques divisions principales du thermomètre.

Mois	Pendant les matins et les soirs la température a été plus basse que					A midi, ou bientôt après midi la température a été plus haute que				
	190°	180°	170°	160°	150°	150°	140°	130°	120°	110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.		5	13	26	31					
Févr.	1	7	9	16	24	10				
Mars				12	23	25	11			
Avr.				1	11	30	23	6	1	
Mai						31	30	20	7	1
Juin						30	30	30	18	2
Juill.						31	31	31	28	11
Août						31	31	30	6	
Sept.					5	29	24	14	1	
Oct.				8	23	17	1			
Nov.		1	8	17	27	8				
Déc.		1	3	16	27	5				
A.	1	14	33	96	171	247	181	131	61	14
H.	6	24	51	100	150	71				
E.				8	28	169	147	125	60	14

3) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs,

Digitized by Google

à midi, ou bientôt après midi de chaque mois, tant au-dessous qu'au-dessus et entre quelques divisions principales du thermomètre.

Mois	Pendant les matins et les soirs la température a été						A midi, ou bientôt après midi la température a été					
	au dessous de 190°	entre 190° et 180°	entre 180° et 170°	entre 170° et 160°	entre 160° et 150°	au dessous de 150°	au dessus de 150°	entre 150° et 140°	entre 140° et 130°	entre 130° et 120°	entre 120° et 110°	au dessus de 110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.		5	8	13	5	31						
Févr.	1	6	3	6	8	24	10	10				
Mars				12	11	23	25	14	11			
Avr.				1	10	11	30	7	17	5	1	
Mai							31	1	10	13	6	1
Juin							30			12	16	2
Juill.							31			3	17	11
Août							31		1	24	6	
Sept.					5	5	29	5	10	13	1	
Oct.				8	15	23	17	16	1			
Nov.		1	7	9	10	27	8	8				
Déc.		1	2	13	11	27	5	5				
A.	1	13	20	62	75	171	247	66	50	70	47	14
H.	6	18	28	48	50	150	71	27	28	5	1	
E.				8	15	28	169	22	22	65	46	14

Digitized by Google

Il a commencé à geler le 19 Septembre 1804, et il a gelé pour la dernière fois le 21 Avril 1805, après un intervalle de 215 jours. En A. et notamment en E., où il avait gelé pour la dernière fois le 21 Avril, il a recommencé à geler le 25 Septembre 1805, après un intervalle de 157 jours.

Il a gelé, pendant les matins et les soirs, en A. 171 jours, en H. 150 jours, et en E. 28 jours. Il n'a gelé point du tout, à midi, ou bientôt après midi, en A. 247 jours, en H. 71 jours et en E. 169 jours.

La rivière Newa, après avoir été couverte de glace, du 28 Octobre 1804, debacla le 9 Avril 1805, par conséquent après un intervalle de 163 jours. Le 16 Octobre 1805 elle se couvrit de nouvelle glace, après avoir été ouverte pendant 190 jours.

Digitized by Google

III. Vents.

Mois	calme,	La force des vents, v.faible et médiocre,	vent fort,	vent très-fort,	Rapport de la direction des vents, Nord	Est	Sud	Ouest
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janvier	7	19	5		1	2	9	19
Février	5	19	4		2	3	8	15
Mars	2	23	6		9	11	2	9
Avril	3	18	9		7	8	5	10
Mai		21	9	1	3	10	8	10
Juin	1	23	6		4	4	6	16
Juillet	3	26	2		4	3	9	15
Août	3	20	8		9	5	6	11
Septembre	3	18	9		4	2	7	17
Octobre	2	20	8	1	7	2	3	19
Novembre		15	14	1	6	1	7	16
Décembre	1	19	10	1	4		12	15
A.	30	241	90	4	60	51	82	172
H.	25	118	34	4	30	41	40	62
E.	12	128	42	2	31	26	39	88

Le tableau précédent indique: 1) que les mois Janvier, Février et Juillet ont été plus calmes, que tous les autres; 2) que l'hiver H. a été presque aussi calme, que l'été E., qui l'a suivi dans le rapport de 12 + 128 : 25 + 118, ou de 140 : 143; 3) que le vent dominant était dans l'année celui de l'Ouest.

Digitized by Google

IV. L'état de l'atmosphère.

Mois	Ciel			brouillard	pluie	l'arc-en-ciel	tonnerre et éclaire	grêle	gelée blanche	neige	parasélènes
	serein	nuages	couvert								
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	1	9	21	9						15	2
Févr.	1	15	12	12						11	
Mars	7	18	6	5	4					7	
Avr.	6	12	12	5	4		1			4	
Mai	8	13	10	3	15					1	
Juin	6	18	6	1	16	1	2				
Juill.	7	16	8	4	16	2	9	1			
Août	6	14	11	3	12	2					
Sept.	7	15	8	4	7	1			5	3	1
Oct.	1	12	18	3	5				2	6	
Nov.	2	10	18	2	3					18	
Déc.	3	4	24	2	4					19	
A.	55	156	154	53	86	6	12	1	7	84	3
H.	28	71	82	40	8		1			64	4
E.	35	88	61	18	71	6	11	1	7	10	1

On voit par l'inspection de ce tableau : 1) que le nombre des jours entièrement sereins a été le plus grand en Mars, Avril, Mai, Juin, Juillet, Août et Septembre ; 2) qu'en Janvier, Février et Octobre on n'en a compté qu'un seul jour serein ; 3) qu'en hiver H. il y en avait moins, qu'en été E. dans le rapport de 28 : 35.

Cette année-ci il neigea pour la dernière fois le 10 Mai, et pour la première fois le 25 Septembre, après un intervalle de 137 jours.

Il tonna pour la première fois le 29 Avril, et pour la dernière le 31 Juillet.

Cette année-ci on n'a remarqué qu'une seule aurore boréale, le 12 Septembre.

Digitized by Google

III.
SECTION
DES
SCIENCES POLITIQUES.

DES DIFFÉRENTES MÉTHODES DE PRÉLEVER LES FRAIX DE MONNAYAGE, ET DE LEURS EFFETS SUR LES PRIX DES MARCHANDISES.

PAR

H. STORCH.

Présenté à la Conférence le 15 Janvrier 1812.

Première Section.

Dans tous les pays civilisés le gouvernement s'est réservé la fabrication des monnaies, et avec raison; quelqu'énormes que soient les abus qu'ont faits les gouvernemens de cette prérogative, ceux qui naîtroient d'une fabrication particulière seroient incomparablement plus grands.

Les fraix qu'occasionne la fabrication des monnaies peuvent être prélevés de deux manières:

ou par un impôt individuel sur chaque pièce de monnaie, ensorte que l'individu qui vient en chercher à l'hôtel des monnaies, les paye plus cher en proportion de ce qu'elles ont coûté à fabriquer;

ou par une contribution générale, répartie sur tous les citoyens. Dans ce dernier cas, on dit que la fabrication est gratuite; mais chacun voit que ce n'est qu'une façon de parler.

Les gouvernemens de l'Europe suivent en partie l'une de ces mesures, et en partie l'autre. La première méthode est usitée depuis longtems en Angleterre *); elle est encore reçue chez nous depuis l'établissement du nouveau système monétaire en 1810. En Angleterre et en Russie le gouvernement rend en guinées et en roubles le même poids qu'on lui porte en lingots d'or et d'argent au titre des guinées et des roubles. Il fait cadeau au peuple, comme consommateur de monnaie, des fraix de fabrique qu'il prélève, par la voie des impôts, sur le peuple comme contribuable. Dans les autres états de l'Europe, le gouvernement rejette ces fraix sur les monnaies, ensorte que ceux qui les achètent du gouvernement, lui en payent la façon comme ils la payeroient aux orfèvres, dans le cas où ceux-ci auroient le droit d'en fabriquer. Ces mesures ont, sous plusieurs rapports, des résultats

*) La loi qui rendit la fabrication des monnaies gratuite, fut d'abord portée sous le régne de Charles II. pour un tems limité; ensuite, par différentes prorogations, elle fut continuée jusqu'en 1769, époque à laquelle elle fut rendue perpétuelle.

Digitized by Google

très-différens; il est donc important de connoître les effets qu'elles produisent sur la valeur de la monnaie aussi bien que sur les prix des choses achetées avec cette monnaie.

La question fondamentale à laquelle se réduit l'examen de ces deux méthodes, c'est de savoir si la façon de la monnaie élève la valeur du lingot? Or il paroît incontestable qu'elle produit cet effet. Le monnayage est une façon très-utile; il évite à celui qui paye la monnaie comme à celui qui la reçoit, la peine et la perte de tems que lui occasionneraient l'essayage et le pesage des lingots. Si les gouvernemens abandonnoient aux particuliers l'industrie de battre monnaie, il conviendroit encore à toute personne qui n'auroit que des lingots, de payer à un manufacturier la façon du métal qu'elle seroit dans le cas d'employer comme numéraire; car la monnaie offrant les mêmes avantages aux vendeurs comme aux acheteurs, tout acheteur qui auroit fait fabriquer des monnaies à ses dépens, seroit sûr d'en être indemnisé par le vendeur auquel il transmettroit sa monnaie. Avant le tems du Tsar *Ivan Vasiliévitch*, les Russes qui avoient des payemens à faire, préféroient d'acheter chez les orfèvres des pièces de monnaie, plutôt que de s'exposer aux inconvéniens et aux pertes qui sont inévitables dans l'échange

des lingots. Aujourdhui, dans la plupart des pays de l'Europe, les particuliers portent de l'or et de l'argent aux hôtels des monnaies, qui leur délivrent des espèces en se faisant payer les fraix de fabrication. Il est difficile d'imaginer que les particuliers feroient cette dépense, s'ils n'avoient pas la certitude d'en être dédommagés par ceux auxquels ils transmettent la monnaie.

Ainsi le métal monnayé doit avoir une valeur supérieure au métal non-monnayé, par la raison que la façon de la monnaie, qui est utile à tout le monde, ne peut être obtenue sans fraix. Mais si l'on avoit trouvé le moyen de fabriquer de la monnaie sans que sa façon coûtât la moindre chose, et que tout le monde pût échanger sans difficulté des matières d'or et d'argent, poids pour poids, contre des espèces : la monnaie auroit-t-elle encore une valeur supérieure au métal? Certainement non : car une chose que chacun peut se procurer sans travail et sans fraix, quelqu'utile qu'elle soit, n'a jamais de valeur échangeable.

Il s'ensuit que lorsque le gouvernement délivre gratuitement les espèces et qu'il met les fraix de monnayage au compte des dépenses publiques, il empêche que la valeur du métal ne s'accroisse de la valeur du monnayage. Dans les pays où tout le monde peut échanger de l'or

Digitized by Google

et de l'argent, poids pour poids, contre de la monnaie, la façon de la monnaie n'a point de valeur et le métal monnayé ne vaut pas plus que le métal non-monnayé.

Si quelquefois le contraire paroît arriver, c'est toujours l'effet de quelque circonstance accessoire. En Angleterre, par exemple, l'or monnayé se paye environ $\frac{2}{5}$ pour cent plus cher que l'or en lingot. Mais pour changer son lingot en guinées à l'hôtel des monnaies de Londres, le seul qu'il y ait en Angleterre, il faut attendre son tour; ainsi c'est une perte de tems que vous évite celui qui vous paye comptant, et cette légère prime de $\frac{2}{5}$ pour cent est une sorte d'escompte qu'il retient pour l'avance qu'il a faite. Encore qu'il y eût plusieurs hôtels des monnaies en Angleterre, et qu'on y pût recevoir sans délai de la monnaie contre des lingots, la prime existeroit probablement toujours, quoique dans une proportion moins forte *). Ceux qui ont besoin de monnaie, ne

*) Les fraix de fabrique de la monnaie d'or reviennent à $\frac{7}{10}$ pour cent en Angleterre; ainsi cette prime de $\frac{2}{5}$ fait un peu plus de la moitie des fraix. Si l'on pouvoit se procurer plus facilement cette monnaie, la prime ne seroit peut-être que d'un tiers ou d'un quart des fraix de fabrication.

Au reste cette prime ne se paye plus. Depuis 1797, que la banque d'Angleterre a suspendu le payement de ses billets, on y voit un phénomène bien plus extraordinaire; l'or en lingot se vend plus cher que l'or frappé en guinées, même quand celles-ci ont leur poids légal. Pour expliquer ce fait, incompréhensible en ap-

sont pas toujours pourvus de matières fines; ils ne vivent pas tous dans les villes où se fabrique la monnaie : ils sont donc souvent forcés de recourir aux changistes, qui font leur métier d'échanger les différentes sortes de numéraire les unes contre les autres, et qui ne peuvent faire ce métier sans en retirer un profit proportionné. Ainsi, même dans les pays où le gouvernement supporte les fraix de fabrication, la monnaie est toujours évaluée un peu plus haut que le métal en lingot; mais ce n'est pas l'effet de la façon, qui est gratuite, et qui, par consé-

---

parence, il faut savoir que dès la suspension des payemens de la banque, il se forma des associations patriotiques dans la vue de soutenir la valeur de ses billets. Les banquiers, les négocians, les riches particuliers se firent un point d'honneur de recevoir ce papier comme argent comptant, et l'impulsion qu'ils ont donnée, s'est étendue à toutes les classes. Ce dévouement général a fait que, sous peine d'encourir l'indignation publique, on n'oseroit refuser un billet de banque pour toute sa valeur nominale, tandis que d'un autre côté beaucoup de personnes qui possèdent des guinées, croiroient agir en mauvais citoyens si elles retenoient ces espèces hors de la circulation.

Cependant les billets de banque, en dépit de tous ces efforts patriotiques, ont perdu effectivement de leur valeur nominale. S'ils se changent quelquefois en guinées pour cette valeur, c'est l'effet du dévouement à l'intérêt public; mais ce sentiment n'a pu influer sur le prix du lingot. Celui-ci a conservé sa valeur entière, mais la guinée, s'efforçant de se tenir au niveau des billets, a perdu de la sienne. Une suite infaillible de cet état de choses, c'est que tous ceux qui possèdent de l'or en guinées, sont tentés de le fondre, puisqu'ils gagnent évidemment à cette opération, et l'on peut prédire avec assurance que tôt ou tard les guinées finiront par disparoître totalement de la circulation.

Digitized by Google

quent, ne peut rien ajouter à la valeur du métal; cet effet est produit par des circonstances accessoires qui se rencontrent aussi dans les pays où la façon de la monnaie se paye, et qui y élèvent aussi le prix de la monnaie un peu au-dessus de ce qu'elle coûte y compris la façon.

Passons maintenant à la seconde méthode, qui consiste à grever les monnaies des fraix de fabrication. Dans ce cas, le gouvernement s'indemnise des dépenses du monnayage par une retenue faite aux particuliers sur le métal qu'ils apportent et qu'ils desirent convertir en monnaie. Par exemple, si les fraix de fabrication montent à 2 pour cent, l'hôtel des monnaies, en achetant d'un particulier une livre d'argent fin, ne lui rend pas une quantité de monnaie contenant une livre d'argent fin, mais seulement $\frac{98}{100}$ d'une livre. On voit que si le particulier consent à faire cet échange, la valeur du métal monnayé s'est accrue pour lui de deux pour cent, et qu'il ne peut céder *la* monnaie pour une valeur inférieure sans faire une perte évidente. Chacun des acquerreurs suivans de cette monnaie se trouvant dans la même situation, aucun d'eux ne voudra la céder que pour la même valeur qu'il aura sacrifiée pour l'obtenir. D'un autre côté, les avantages de la monnaie étant égaux pour le vendeur comme pour l'a-

cheteur, tout vendeur de marchandises sera disposé à la recevoir au même taux; ensorte que la valeur du métal monnayé se trouvera réellement et constamment augmentée de 2 pour cent.

Pour conserver à la monnaie la valeur des fraix de fabrication, il est nécessaire que le gouvernement se borne à l'échanger contre des métaux précieux. S'il employoit une autre voie pour la mettre en circulation, il ne seroit jamais sûr d'obtenir cet effet, et les fraix de fabrication tomberoient à la charge des premiers acquerreurs de la monnaie, c'est-à-dire de ceux qui l'auroient reçue des mains du gouvernement. Par exemple, lorsque le gouvernement fait battre de la monnaie pour payer les salaires de ses employés, le surcroît de valeur résultant des fraix de fabrication s'évanouit infailliblement entre les mains des employés, et les fraix de la façon retombent exclusivement sur cette classe de citoyens. Celui qui achète de la monnaie avec de l'or et de l'argent, ne peut jamais se tromper sur la valeur de la monnaie, puisqu'il donne et reçoit la même matière, et que la différence entre la valeur de la matière brute et celle de la matière fabriquée devient palpaple par la différence du poids. Mais qu'un juge ou qu'un militaire reçoive ses appointemens en une monnaie grévée d'un, de deux, de trois

Digitized by Google

pour cent: s'il les reçoit constamment dans la même monnaie, il ne se croira jamais lésé dans cet échange, et l'idée ne lui viendra pas de vouloir regagner sur le prix des marchandises qu'il achète, des fraix de fabrication qu'il ne se doute pas même d'avoir payé par son travail. Cette idée ne pourroit lui venir que dans le cas où son salaire seroit stipulé en une certaine quantité d'argent fin, dont le gouvernement lui retiendroit une partie si le payement du salaire se faisoit en monnaie: or dans aucun pays de l'Europe les appointemens des employés ne sont réglés sur ce pied.

Si d'un côté les salariés du gouvernement ne forment aucune prétention d'être remboursés des fraix de fabrication qu'ils ont payés en recevant la monnaie, de l'autre, les commerçans auxquels ils transmettent cette monnaie par les achats qu'ils font, sont bien éloignés de vouloir dédommager des gens qui ne sentent pas la perte qu'ils subissent. Chacun tâche de se soustraire, autant que possible, au remboursement des fraix de fabrication, tant que la valeur de la façon n'est pas reconnue et bonifiée par tous ceux qui sont dans le cas de se servir de la même monnaie. Or le seul moyen de la faire généralement reconnoître, c'est de la vendre aux hôtels des monnaies contre de l'or et de l'argent. Quand une monnaie

grevée est mise en circulation de cette manière, on peut être persuadé que sa valeur entière se conservera dans les transactions de l'intérieur, c'est-à-dire que la valeur du métal monnayé se trouvera constamment augmentée de la valeur de la façon. Ainsi, dans les pays où le gouvernement se fait payer les fraix de fabrication en or et en argent, et où il n'émet point de monnaie par une autre voie quelconque, la monnaie est plus chère, du montant de ces fraix, que dans les pays où le gouvernement se charge de cette dépense.

Mais dans la plupart des États de l'Europe, le gouvernement ne se contente pas d'une retenue suffisante pour couvrir les fraix de fabrication; il se menage encore un bénéfice au-delà de ces fraix, connu sous le nom de *droit de seigneuriage* *). Enfin, pour confondre plus aisément les idées sur la valeur des monnaies, le génie fiscal a inventé le nom de *traite*, qui comprend les fraix du monnayage aussi bien que ses profits.

---

*) Il n'y a en Europe, autant que je sache, que le gouvernement français qui, en se faisant rembourser les fraix de fabrication, n'y ajoute point de seigneuriage. En France, il ne peut être exigé de ceux qui portent des matières d'or et d'argent à l'hôtel des monnaies, que les fraix de fabrication, qui sont évalués à 9 francs par kilogramme d'or, et à 3 francs par kilogramme d'argent.

Digitized by Google

Ainsi le gouvernement français, avant l'introduction du système monétaire actuel, achetoit d'un particulier un marc d'or au titre de 21 carats $\frac{22}{32}$, et lui donnoit en payement une quantité de monnaie qui comptoit pour 748 livres 15 sous 2 deniers tournois. Mais cette quantité de monnaie ne contenoit plus un marc de matière au titre; car pour avoir le marc entier, il auroit fallu environ 770 livres 10 sous. Le marc étant divisé en 4608 grains, le particulier ne recevoir donc en échange de son marc qu'environ 4477 grains, c'est-à-dire 131 grains de moins, dans la même matière qu'il avoit fournie. Ces 131 grains retenus par le gouvernement, composoient ce qu'on appelle la *traite:* ils l'indemnisoient des fraix de fabrication, qui valoient à peu près 12 de ces grains; les 119 autres constituoient un profit net et faisoient ce qu'on nomme le *seigneuriage.* Évalués en monnaie, ces 119 grains faisoient 19 livres 4 sous 6 deniers. Tout modéré que paroît ce profit, il étoit cependant à la dépense qui l'occasionnoit comme 119 à 12, ou à peu près comme 10 à 1; c'est-à-dire qu'il répondoit à un bénéfice d'industrie, qui n'ayant aucunes avances à faire en matières premières, si ce n'est pour un tems extrêmement court, rendroit au fabricant 1000 pour cent.

Or quel est l'effet d'un seigneuriage? Ce surhaussement fictif de la monnaie élève-t-il la valeur du métal monnayé, tout comme les fraix de fabrication l'élèvent? Et s'il ne produit pas cet effet, sur qui retombe la perte? Se répartit-elle sur tout le peuple qui fait usage de la monnaie, ou reste-t-elle à la charge des premiers acquerreurs, de ceux qui la reçoivent du gouvernement?

Nous avons reconnu qu'une monnaie sur-évaluée seulement au terme des fraix de fabrication, vaut réellement ce que le gouvernement lui ajoute en valeur, parce que ce surhaussement est une juste compensation des fraix inévitables qu'occasionne la façon de la monnaie qui est utile à tout le monde. Mais portée au-delà de ce terme, cette surévaluation s'anéantit plus ou moins. Dès que la valeur attribuée à la monnaie n'est plus en proportion avec l'utilité qu'elle produit et les fraix qu'elle coûte, on cesse de s'en servir, plutôt que de l'acquérir à ce prix: les lingots, les papiers de crédit la remplacent en partie; les espèces étrangères moins surévaluées ou franches de tout droit, entrent dans le pays et rendent sa monnaie superflue; les monnayeurs clandestins (qu'il faut distinguer des faux-monnayeurs) la fournissent à plus bas prix, et l'avidité du gouvernement se voit trompée dans ses calculs: il perd, non-seulement l'impôt dé-

Digitized by Google

guisé sous la forme de la valeur fictive des monnaies, mais encore le profit modéré qu'il auroit pu retirer de leur fabrication.

Ainsi, quoique les gouvernemens se soient attribué le monopole de la fabrication des espèces, ils ne peuvent cependant pas porter leur bénéfice plus haut que le taux auquel le public peut se pourvoir de cet instrument d'échange par une autre voie quelconque. Ils ne peuvent pas, et ceci est digne de remarque, faire recevoir la monnaie pour une valeur sensiblement plus grande que la valeur du métal, plus la valeur qu'y ajoutent l'affinage et la façon.

En effet si l'on suppose que dans le commerce un lingot vaille 100 roubles d'argent, et que, frappé en monnaie, cette nouvelle forme porte sa valeur à 103 roubles; c'est-à-dire en supposant qu'on obtienne environ trois centièmes de plus de quelque marchandise que ce soit, lorsque l'argent avec lequel on achète ces marchandises est frappé en roubles; dans cette supposition, dis-je, le gouvernement pourra porter la traite à 3 pour cent, dont les deux tiers, plus ou moins, seront absorbés par les fraix de monnayage; mais il ne pourra pas porter son bénéfice plus loin. S'il lui arrivoit de vouloir s'attribuer une traite, non de 3, mais de 10 pour cent, et s'il ap-

pelloit 110 roubles un lingot de 100 roubles frappé en monnaie, il n'obtiendroit pour 110 roubles que la même quantité de denrées qu'il auroit obtenues s'il eût appellé le même lingot 103 roubles. Dans les marchés que le gouvernement conclut avec les particuliers, et dans ceux que les particuliers concluent entr'eux, une pièce de monnaie n'est reçue, quelque dénomination qu'on lui donne, que pour la valeur de l'or et de l'argent qu'elle contient, accrue de la valeur que le besoin de sa façon y ajoute.

Cependant, lorsqu'un gouvernement est assés peu éclairé sur ses intérêts pour émettre une monnaie surévaluée au-delà de ce qu'elle peut valoir dans le commerce intérieur, sur quelle classe de citoyens retombe la perte? Pour répondre à cette question, il faut considérer que, dans un cas pareil, personne n'apporte des lingots à l'hôtel des monnaies pour les échanger contre des espèces: ainsi la monnaie ne peut-être mise en circulation que par les payemens à faire par le gouvernement. Or les particuliers, sachant qu'ils seront payés dans une monnaie surévaluée, traitent en conséquence avec le gouvernement, et se font payer nominalement plus cher les denrées et le travail qu'ils lui vendent. Mais cette mesure ne peut être prise, ni par les créanciers de l'État,

ni par les employés dont les contrats sont antérieurs à l'époque de la surévaluation: ainsi, c'est sur eux que retombe la perte entière. L'autorité publique les force d'accepter une monnaie qui ne vaut pas celle dans laquelle ils avoient contracté, et ils ne peuvent pas rejetter cette perte sur ceux de leurs contitoyens auxquels ils vont livrer leur monnaie pour en acheter des marchandises ou des services: ainsi la valeur fictive de cette monnaie s'évanouit entre leurs mains. La perte des employés du gouvernement est permanente, tant qu'ils sont payés dans cette monnaie et qu'on ne les dédommage pas par une augmentation de salaire; les créanciers, au contraire, n'y perdent qu'une fois seulement, savoir dans les engagemens antérieurs; car tous ceux qui prêtent au gouvernement postérieurement à l'émission de cette monnaie, ne lui prêtent qu'une monnaie surévaluée.

Il résulte de tout ceci qu'établir un seigneuriage n'est autre chose qu'ordonner une altération des monnaies, c'est-à-dire faire la banqueroute sous de formes légales. Mais une pareille banqueroute n'est pas seulement nuisible aux particuliers; le gouvernement lui-même en souffre. Le profit injuste qu'il en retire comme débiteur, est contrebalancé par la perte que la diminution des espèces lui cause comme créancier de ses contribuables: son revenu

annuel en est diminué. Il est au surplus évident qu'un gouvernement qui ne possède point de mines, se prive de la ressource la plus facile pour se procurer des métaux précieux. Quel particulier voudroit porter son or et son argent à l'hôtel des monnaies pour l'échanger avec perte? Ainsi les métaux précieux seront employés à d'autres usages ou s'en iront dans l'étranger pour y acheter des objets d'une consommation moins dispendieuse.

Telles sont les raisons qui obligent les gouvernemens à modérer le profit qu'ils s'attribuent sur le monnayage: s'ils l'ont quelquefois porté trop haut, ils se sont vus tôt ou tard dans la nécessité de le diminuer. En France, par exemple, le droit de seigneuriage sur les monnaies d'or fut porté à plus de 20 pour cent, par l'édit de Janvier 1726. Dès le mois de Juin de la même année, on se vit obligé de le réduire à 6 pour cent; six mois après il fut modéré à $4\frac{1}{3}$, et encore, en 1755, à $2\frac{1}{3}$ pour cent. En 1771, le prix de la matière fut augmenté de deux deniers pour livre, ensorte que les profits du gouvernement n'étoient que de $1\frac{1}{4}$ pour cent environ de la somme avancée, non-compris le bénéfice du remède. Le seigneuriage sur les espèces d'argent a subi des variations proportionnelles.

Digitized by Google

DES DIFFÉRENTES MÉTHODES DE PRÉLEVER LES FRAIX DE MONNAYAGE, ET DE LEURS EFFETS SUR LES PRIX DES MARCHANDISES.

PAR

H. STORCH.

Présenté à la Conférence le 26 Fevrier 1812.

Seconde Section.

J'ai tâché de montrer les effets que produisent sur la valeur des monnaies les différentes méthodes de prélever les fraix de monnayage; il me reste à développer comment les prix des marchandises en sont affectés, dans les transactions de l'intérieur aussi bien que dans le commerce étranger.

Nous avons reconnu que le seigneuriage n'élève point la valeur de la monnaie, et que cet impôt est supporté uniquement par ceux qui sont forcés de recevoir la monnaie à sa valeur nominale. Ainsi, à l'exception de cette circonstance, les effets d'une monnaie chargée d'un seigneuriage ne diffèrent aucunement de ceux que produit une monnaie gratuite. Il ne nous reste donc à considérer que

cette dernière et la monnaie grevée des fraix de fabrication.

Dans le commerce intérieur, la monnaie grevée a plus de valeur que le métal non-monnayé; comparée à une monnaie gratuite, elle est plus chère que celle-ci, c'est-à-dire elle achète une plus grande quantité de marchandises et de travail dans l'intérieur. Supposons deux pays, A et B, qui font battre exactement la même monnaie, des roubles par exemple. Dans le pays A, la monnaie est gratuite; dans le pays B elle est grevée de 2 pour cent de fraix; c'est-à-dire celui qui l'achète à l'hôtel des monnaies ne reçoit pour un lingot de la valeur de 100 roubles que 98 roubles en espèces. S'il est vrai, comme nous l'avons reconnu, que ces deux pour cent sont remboursés par chaque vendeur de marchandises à chaque payeur d'argent, il s'ensuit que dans le pays B, il ne faudra que 98 roubles en espèces pour payer la valeur de 100 roubles en marchandises, tandis que, dans le pays A il faudra 100 roubles en espèces pour payer la même valeur en marchandises.

Pour les particuliers vivant dans le pays B, cette circonstance ne leur cause ni gain ni perte: chaque individu étant acheteur en même tems que vendeur, achète à meilleur marché en même tems qu'il vend à meilleur

Digitized by Google

compte. Même à l'époque où le gouvernement remplace une monnaie gratuite par une monnaie grevée, personne n'est lésé par ce changement: car ceux qui achètent cette monnaie du gouvernement contre de l'or et de l'argent, la transmettent à d'autres personnes pour la même valeur pour laquelle ils l'ont reçue. La nation, loin d'en souffrir la moindre perte, y gagne au contraire: elle épargne cette quantité de métal qu'elle auroit dû employer de plus comme numéraire, si la façon de sa monnaie avoit été gratuite. Pour représenter dans la circulation la même valeur en marchandises, il faut nécessairement une moindre quantité de monnaie grevée qu'il n'en faudroit si la monnaie étoit gratuite. Supposons que la nation ait besoin de 300 millions de roubles pour la circulation de son travail et de ses marchandises: en employant une monnaie grevée de 2 pour cent, 294 millions lui suffiront, tandis qu'il lui faudroit 300 millions si sa monnaie étoit gratuite; elle épargne donc sur les fraix de sa circulation la valeur du métal et de la façon contenue dans 6 millions de roubles.

La monnaie gratuite n'a pas plus de valeur dans le commerce intérieur que le métal non-monnayé; comparée à une monnaie grevée, elle est moins chère que celle-ci, c'est-à-dire elle achète une moindre quantité

de travail et de marchandises dans l'intérieur. Il s'ensuit qu'il faut à la nation une plus grande valeur en métaux monnayés pour représenter la valeur de ses richesses circulantes; elle perd inutilement les fraix de fabrication de ses monnaies. Ce sacrifice, qui retombe sur la nation entière, est accompagné de pertes pour les individus quand une monnaie grevée est remplacée par une monnaie gratuite. Comme alors le prix de toutes les denrées augmente proportionellement à la baisse que subit la valeur de la monnaie, ceux des particuliers qui sont créanciers ou salariés de l'État, et dont les contrats sont antérieurs à l'émission de la monnaie gratuite, y perdent de la même manière qu'ils perdroient si la monnaie venoit d'être chargée d'un seigneuriage. L'équilibre une fois rétabli, il n'y a ni gain ni perte pour personne; car chaque individu étant vendeur en même tems qu'acheteur, chacun vend un peu plus cher en même tems qu'il achète à un prix un peu plus élevé.

Dans le commerce étranger, une nation qui se sert d'une monnaie grevée, a l'avantage de pouvoir vendre ses marchandises un tant soit peu meilleur marché qu'une autre nation qui se sert d'une monnaie gratuite, parce que, chez la première, la même quantité de métal achète un peu plus de denrées que chez la seconde, supposé que

Digitized by Google

toutes les autres circonstances soient égales. Je dis que c'est un avantage pour la première nation, et voici pourquoi: tout en recevant la même valeur que la seconde pour les marchandises qu'elle exporte, elle les fait payer un peu moins cher à l'étranger; elle attire par là les chalands, et, dans la concurrence avec la seconde nation, ses marchandises sont préférées par l'acheteur. Cependant il ne faut pas estimer cet avantage plus qu'il ne vaut. La différence entre la valeur d'une monnaie gratuite et celle d'une monnaie grevée n'est pas si considérable que son influence sur le prix des marchandises ne puisse être contrebalancée facilement par d'autres circonstances qui tiennent au commerce. Nous avons vu qu'en Angleterre les fraix de fabrication des guinées ne se montent qu'à $\frac{7}{10}$ pour cent; il s'ensuit que si l'Angleterre changeoit sa monnaie gratuite en une monnaie grevée, le prix de ses marchandises ne diminueroit que de $\frac{7}{10}$ pour cent; différence trop peu sensible pour justifier un changement aussi important que celui du système monétaire. Il est bon cependant d'observer qu'en Angleterre la monnaie d'or est la seule monnaie courante; dans les pays où la monnaie d'argent est le principal numéraire, la différence seroit plus marquée, parce que sur l'argent les fraix de fabrication sont plus considérables. En France, par exemple, ces

fraix se montent à 1 pour cent et $\frac{1}{2}$, en Danemarc à 2 pour cent; chez nous ils alloient jusqu'à 4 pour cent, avant qu'on eut établi la machine de *Bolton*, laquelle sans doute aura diminué la dépense.

Dans les transactions avec l'étranger, les monnaies ne sont évaluées le plus souvent que pour leur simple valeur métallique seulement: ainsi quand il s'agit d'envoyer de l'or et de l'argent dans l'étranger, si c'est de la monnaie qu'on exporte, les fraix de fabrication sont toujours perdus pour la nation qui paye, quelle que soit sa monnaie, gratuite ou grevée. Supposons que dans une année le Danemarc doive à la Russie, après toutes les compensations qui ont pu s'opérer par la voie du change, une balance en argent de 100,000 écus; il faudra nécessairement envoyer cette solde en métaux. En Danemarc, la monnaie est grevée des fraix de fabrication, qui sont évalués à 2 pour cent: cependant, si les Danois s'acquittent de leur dette en espèces, les 100,000 écus qu'ils envoyent en Russie, n'y seront reçus que pour la valeur de 98,000 écus seulement. La même chose arrivera en Russie, lorsqu'on la suppose débitrice du Danemarc pour la somme de 100,000 roubles, entendu que les fraix de fabrication y fussent aussi de 2 pour cent: la Russie fera de même une perte de 2000 roubles, mais avec cette

différence que chez elle, où la monnaie est gratuite, la perte retombe sur la nation entière, tandis qu'en Danemarc, où la monnaie est grevée, cette perte doit être supportée par le commerçant. Il en arrivera que le négociant danois se gardera bien d'envoyer de la monnaie de son pays; il préférera de faire passer des lingots en Russie. Le négociant russe, au contraire, doit préférer d'envoyer en Danemarc de la monnaie russe, comme étant du métal essayé et pesé, plutôt que d'envoyer des lingots qui ne portent aucun certificat d'essayage et de pesage, puisque la monnaie et les lingots lui coûtent à peu près le même prix.

Cependant une nation commerçante est tantôt débitrice, tantôt créancière. S'il lui arrivoit, comme débitrice, d'envoyer sa monnaie grevée hors du pays, la rentrée de cette monnaie deviendroit encore une source de pertes pour elle comme créancière. Supposons que les négocians danois eussent été obligés, faute de lingots, d'envoyer des espèces en Russie: les négocians russes, comme il est aisé de le prévoir, se garderont bien de fondre ces monnaies danoises, et de perdre une façon dont ils peuvent tirer parti. Ils feront repasser ces mêmes pièces de monnaie en Danemarc, non pas simplement pour leur valeur métallique, mais encore pour le surcroît de valeur qui leur est attribué dans ce pays. Ils feront

dans cette opération un gain de deux pour cent, sans qu'ils ayent besoin de fournir aucune espèce d'équivalent. Lorsqu'au contraire les monnaies russes sont sorties du pays, l'étranger ne peut point faire ce profit en les y renvoyant, puisque ces monnaies ne sont point grevées.

On voit que la monnaie grevée devient une source de pertes pour le pays quand elle en sort et quand elle y rentre, tandis que la monnaie gratuite ne lui cause de pertes que lorsqu'elle en sort. Mais l'une et l'autre présentent des motifs pour ne pas les faire sortir du pays où elles sont fabriquées : la monnaie grevée, parce que le commerçant y perdroit les fraix de fabrication, et la monnaie gratuite parce qu'il y perdroit au moins la prime que le métal monnayé gagne en tout pays contre le lingot. C'est pour éviter ces pertes que toute nation commerçante se pourvoit d'une grande quantité d'or et d'argent en lingots, qui est alternativement importée et exportée pour le service du commerce étranger. Ces lingots circulant parmi les différens peuples commerçans, tout comme la monnaie nationale circule dans chaque pays en particulier, on peut les regarder comme le numéraire de la grande république du commerce. La monnaie nationale reçoit son impulsion et sa direction des marchandises qui circulent dans l'enceinte de chaque pays en particulier;

Digitized by Google

la monnaie de la république commerçante de celles qui circulent entre pays différens. L'un et l'autre de ces numéraires est employé à faciliter les échanges, l'un entre différens individus de la même nation, l'autre entre ceux de nations différentes.

D'ailleurs la sortie de la monnaie nationale n'est pas nécessairement accompagnée de pertes. Il n'est pas dit que dans le commerce étranger les monnaies d'un pays soient toujours évaluées à leur simple valeur métallique. Ceci n'arrive que lorsqu'une nation est obligée d'envoyer sa monnaie au-dehors pour payer ses dettes dans l'étranger: mais quand les autres nations lui achètent sa monnaie, elle s'en fait naturellement payer les fraix de fabrication. Dans un cas pareil, l'exportation de la monnaie n'est pas moins avantageuse que toute autre exportation de marchandise manufacturée. C'est une branche de l'orfévrerie; et il n'est pas douteux qu'une monnaie qui seroit assés bien frappée pour ne pouvoir être aisément contrefaite, une monnaie essayée et pesée avec précision, et dont la fabrication seroit exécutée avec une grande économie, pourroit devenir d'un usage courant en plusieurs lieux du monde, et d'autres nations en payeroient volontiers les fraix. Tels ont été les ducats de Hollande, la monnaie universelle de l'Europe commerçante.

La même raison qui empêche l'exportation de la monnaie, en prévient aussi la fonte, ou la destruction de la façon pour employer la matière à d'autres usages. La monnaie, même gratuite, est toujours estimée quelque-chose au-dessus du lingot, par les motifs que j'ai indiqués. L'orfèvre anglais qui fondroit des guinées pour les mettre en oeuvre, essuyeroit une perte de $\frac{2}{5}$ ou d'un demi pour cent, et comme il peut en tout tems se procurer des lingots, il préférera probablement de se servir de ceux-ci. Le gouvernement peut employer un moyen très-simple pour aggraver la perte qui accompagne la fonte des monnaies: il n'a qu'à ordonner pour les ouvrages d'orfèvrerie un titre différent de celui des espèces; dès-lors l'artisan ne peut plus employer le métal provenant de la fonte des monnaies sans le mélanger dans une autre proportion avec le métal commun qui en fait l'alliage, et pour éviter cette opération, il préférera d'acheter du lingot au titre ordonné pour les matières ouvragées. C'est pour cette raison que notre gouvernement a fixé le titre des monnaies à 83$\frac{1}{3}$ zolotniks, et celui de l'orfèvrerie à 84.

Au reste, la crainte de voir les monnaies fondues, est souvent chimérique. Pour que de telles manoeuvres soient généralement pratiquées, il faut qu'elles offrent à

la cupidité quelque profit à faire. Or ce profit ne peut avoir lieu que lorsqu'il existe un vice dans les monnaies. Ou il faut 1°. que la monnaie soit composée de pièces usées et de pièces neuves; ou bien il faut 2°. que la proportion légalement établie entre les deux métaux précieux ne s'accorde point avec celle établie par le commerce. Un gouvernement qui a soin d'éviter ces vices dans son système monétaire, a rarement à craindre que sa monnaie soit fondue.

En terminant ce mémoire, je crois nécessaire de relever les opinions contraires de quelques auteurs, afin de mettre les lecteurs en état de juger la question avec plus de facilité. Quoique les bons écrivains soient maintenant d'accord que la loi ne peut rien ajouter à la valeur de la monnaie et qu'ils se déclarent par conséquent contre tout surhaussement fictif des espèces, la plupart d'entr'eux sont pourtant d'avis qu'il seroit utile de conserver un léger droit de seigneuriage pour empêcher la refonte et l'exportation de la monnaie *). J'ai soutenu la même thèse, mais je l'ai établie sur d'autres principes, et je crois lui avoir donné plus de précision. J'ai soigneusement distingué le droit de seigneuriage des fraix de fa-

*) Voyez *Steuart*, Liv. III. *Smith*, Liv. I. ch. V. *Büsch*, Schriften über Banken und Münzwesen, etc.

brication, j'ai prouvé que le premier est toujours nuisible; et quand je soutiens que le gouvernement doit se faire payer les fraix de fabrication, ce n'est pas par la raison que ce moyen peut empêcher la fonte ou la sortie des espèces, mais parce qu'il conserve à la nation la valeur de la fabrication, qui est perdue pour elle lorsqu'elle se sert d'une monnaie gratuite. Enfin j'ai tâché de montrer que cette valeur ne peut être fixée dans les monnaies que par une seule mesure, savoir quand l'hôtel des monnaies les vend pour de l'or et de l'argent.

Quelques écrivains distingués sont cependant d'une opinion contraire: ils pensent que tout surhaussement de la valeur métallique des espèces est vicieux, et que la dépense du monnayage doit être défrayé par le trésor public. Parmi les écrivains qui soutiennent cette opinion, les uns condamnent la monnaie grevée parce que, selon eux, la valeur de la façon ne se fixe jamais dans les monnaies; les autres la rejettent précisément par ce que cette valeur s'y fixe et s'y maintient.

Garnier est à la tête des écrivains qui font valoir la première de ces raisons. „Si le gouvernement, dit-il *), se fait payer les fraix de fabrication, cette charge est entièrement supportée par le particulier qui échange son

*) Note XXIII. à sa traduction de *Smith*.

Digitized by Google

lingot contre la monnaie. Il ne faut pas croire qu'il puisse rejetter cette perte sur ceux auxquels il va livrer sa monnaie pour en acheter des marchandises. Le prix des marchandises dans un pays s'élève toujours de manière à gagner le niveau réglé par le commerce général, lequel s'établit sur la quantité de métal pur contenu dans les monnaies. Le change étranger, qui ne calcule jamais entre les monnaies de divers pays que le rapport de la matière, agit toujours nécessairement de proche en proche, et son mouvement, depuis l'extrémité de la frontière, se communique successivement à toutes les transactions de l'intérieur. Personne n'est disposé à payer la façon de la monnaie, comme on payeroit à l'orfévre la façon d'une pièce d'argenterie. Une pièce d'argenterie a une valeur directe qui est individuelle; elle n'est utile qu'à la personne qui s'en sert; d'ailleurs ce meuble est partout de la même utilité; dans tous les pays du monde il donnera à son possesseur un degré quelconque de jouissance. La monnaie, au contraire, n'est pas plus utile à celui qui la possède, qu'à celui qui possède la marchandise; elle rend service au vendeur tout autant qu'à l'acheteur; chacune des opérations qu'elle facilite, tourne au profit de beaucoup de monde, et dans cette utilité générale, le possesseur de la monnaie n'a pas une plus grande

part que les autres. En second lieu, la façon ne donne à la monnaie qu'une valeur locale et souvent temporaire, qui s'anéantit aussi-tôt que par un changement de lieu ou par quelqu'autre circonstance, cette monnaie cesse d'avoir cours. "

Tout ce raisonnement, quelque spécieux qu'il paroisse, est contredit par l'expérience. Dans tout pays, la monnaie est toujours un peu plus chère que le lingot : c'est qu'on préfère le métal dont le poids et le titre est certifié, au métal qu'il faut essayer et peser avant de pouvoir s'en servir comme numéraire. En Angleterre la monnaie est gratuite, et cependant l'or monnayé s'y paye $\frac{2}{5}$ pour cent plus cher que l'or en lingot, uniquement parce qu'il coûte quelque peine de s'en procurer. Puisque la valeur de cette peine se fixe et se conserve dans les monnaies, pourquoi la valeur de l'or qu'on auroit payé pour les faire fabriquer, ne s'y conserveroit-elle pas? Si cette valeur s'évanouit dans les monnaies qui passent la frontière, la raison en est qu'elles entrent dans un pays qui se trouve déjà pourvu de monnaie, et où le coin d'un gouvernement étranger n'est plus un certificat valable dans tous les marchés. Encore avons-nous vu qu'une monnaie peut conserver la valeur de sa façon, même lorsqu'elle passe en d'autres pays.

Digitized by Google

D'autres écrivains, tout en admettant que les fraix de fabrication se fixent dans la monnaie grevée, la condamnent cependant par cette raison même *). Ils s'imaginent qu'une monnaie grevée étant plus chère qu'une monnaie gratuite, la première augmente les fraix de la circulation et hausse les prix des marchandises. Je crois avoir prouvé qu'elle diminue les uns et les autres. C'est bien la monnaie gratuite qui augmente les fraix de la circulation, puisqu'il faut une plus grande quantité de métaux précieux pour représenter la même valeur en marchandises; c'est elle qui hausse les prix de ces dernières, parce que la même quantité de monnaie achète une moindre quantité de marchandises. Comme toute valeur est relative, lorsque de deux choses qui s'échangent l'une contre l'autre, l'une devient plus chère, il s'ensuit nécessairement que l'autre baisse de prix. Dire que la monnaie est plus chère, c'est dire que les marchandises qu'on achète avec cette monnaie sont meilleur marché: ces deux expressions sont absolument identiques.

*) Voyez: *Jacob*, Ueber die Wirkungen des Schlagschatzes, note V. à sa traduction des principes d'écon. polit. de Say, Vol. II. p. 468 et suiv. *H. Thornton*, Recherches sur la nature et les effets du papier crédit, p. 205 et suiv. *Ch. Ganilh*, Des systêmes d'économie politique, T. II. pag. 83.

DESCRIPTION STATISTIQUE DES PÊCHERIES EN RUSSIE

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 22 Mai 1811.

La pêche en Russie se fait: 1) *sur les côtes de la mer* et à l'embouchure des fleuves qui s'y jettent.

a) Sur la mer *baltique:* dans le Gouvernement de St. Pétersbourg, en Esthlande, en Finlande, en Livonie, en Courlande.

b) Sur la *mer du Nord:* Gouvernement d'Archangel.

c) Sur la mer *Caspienne:* Gouvernement d'Astrachan, d'Orenbourg, chez les Cosaques de l'Oural et en Caucasie.

d) Sur la mer *noire* et sur la mer d'Asow, à Cathérinoslaw, Cherson, en Tauride, chez les Cosaques du Don.

2) Sur des *grands lacs:* à Olonetz, Novgorod, Pleskou, Irkoutzk.

3) Sur la *Volga:* à Twer, Jaroslaw, Nigegorod, Kostroma, Kasan, Simbirsk, Saratow.

Digitized by Google

4) Sur *d'autres fleuves* riches en poissons: à Resan, Wladimir, Mohilew, Smolensk, Kiew, Waetka, Tobolsk.

La pêche dans tous les autres Gouvernemens est peu considérable.

Les *espèces de poissons* qui entrent surtout dans le commerce et dont il est question dans les Comptes-rendus des Gouverneurs, sont *):

1) dans la mer baltique: Osetri[1], Losossi[2], Lochi[3], Sterledi[4], Somi[5], Dorschi[6], Carpi[7].

2) dans la mer du Nord: Seldi[8], Semga[9], Paltasina[10].

3) dans la mer Caspienne: Belouga[11], Osetri, Sevriouga[12], Lososi, Somi, Sasani[13].

4) Sur la mer noire: Belouga, Sevriouga, Lososi, Somi, Sasani, Sterledi et en Tauride aussi des huitres.

---

*) J'ai conservé les noms russes pour ne pas donner lieu à des mésentendus et j'ajoute les noms latins pour intelligence:

1. Accipenser Sturio. Der Stöhr.
2. Salmo Hucho. Pallas. C'est un mot Livonien.
3. Salmo Salar. Lin. C'est un mot Finois.
4. Accipenser Ruthenus. Der Sterlet.
5. Silurus glanis. Der Wels.
6. Gadus callarias. Der Dorsch.
7. Cyprinus carpio.
8. Clupea Harengus.
9. Salmo salar. Der Lachs.
10. Pleuronectes Hippoglossus.
11. Accipenser Huso. Der Hausen (Weisfisch).
12. Accipenser stellatus.
13. Cyprinus barbus et Cyprinus carpio.

5) Dans les grands lacs se trouvent les grandes espèces de poissons et les poissons de moindre grandeur.
6) Dans la Volga supérieure il y a les Belouga, Sterledi, Losossi, mais pas de grande espèce, dans la Volga inférieure on trouve toutes les grandes espèces de la mer caspienne.
7) Dans les autres fleuves il y a rarement les grandes espèces mais beaucoup de petits poissons.

On peut *classer les pêcheries* de la manière suivante: Les pêcheries sur la mer Caspienne tiennent le premier rang, puis viennent celles sur la mer noire et sur la mer d'Asow, troisièmement la pêche sur la mer baltique et enfin celle qui se fait sur la mer blanche par des particuliers sans compter la compagnie nouvellement établie.

La pêche sur les grands lacs est plus considérable que celle des fleuves, et parmis les fleuves la Volga est la plus riche en poissons.

Aux bords de la mer Caspienne, sur la Volga inférieure et en quelques endroits de la mer noire et de la mer blanche où la pêche est *l'industrie principale* des habitans, les pêcheurs forment des établissemens appellés Watagi qui consistent en nombre de batimens: magazins, caves à glace et habitations pour tous les ouvriers et arti-

Digitized by Google

sans employés à la fabrication des instrumens, à la pêche et à l'apprétation des poissons.

Dans le cercle d'Astrachan il y a 86 Watagi avec 4185. Ouvriers. Dans le cercle de Krasnojar 9 Watagi avec 445 Ouvriers. Dans le cercle de Jenotschaewsk 2 Watagi et 130 Ouvriers. Dans le cercle de Tschornojar 3 Watagi et 300 Ouvriers, en tout 100 Watagi et 5060 Ouvriers. Chaque Watage a un terrain de 100 sachênes et plus sur la côte. Il y a aussi des Watagi sur la mer blanche dont les habitans sont plus à leur aise que ceux des campagnes. En Sibérie il y a aussi quelques Watagi. Parmi les Nomades la pêche est la principale industrie chez les Ostiaques, les Samojèdes de Sibérie, les Tatares de Tchoulim, chez quelques tribus Toungouses, chez les Joukagires et les Kamtschadales.

On voit en Russie *toutes les manières possibles de faire la pêche* depuis la plus simple jusqu'à la plus artificielle. Rien de plus simple que de prendre le poisson à la main. Cette pêche existe sur le Baikal, chez les Kamtschadales dans les petites baïes pendant le reflux et chez les Toungouses qui font une barricade dans l'eau d'une à deux sachênes auprès de laquelle ils prennent le poisson à la main. Ils les prennent de même pendant la nuit à la lueur des flambeaux de bois résineux, cette dernière pêche demande

une eau très claire. La pêche à l'hameçon se fait en grand avec un très grand nombre d'hameçons qui sortent d'un point central, on l'appelle Samolow, elle est très connue en Sibérie et en Russie. La pêche de gros poissons se fait pendant l'hiver avec des batons ferrés (Bagri) longs de 7 à 10 sachênes. La pêche aux Barricades (Utschiug) pour l'esturgeon (Osetri) est défendue puisqu'elle empêche le poisson de monter le fleuve. Il y avoit plusieurs espèces de ces barricades sur la mer Caspienne et chez les Barabinces. Enfin la grande pêche aux filets (Nevroti) à 200 sachênes en long. Ces différentes espèces de pêche prouvent les différens degrès de culture que les peuples ont atteint et la grande abondance de poissons qui rend possible de les prendre d'une manière ou d'autre.

La *manière de conserver le poisson* est tout aussi différente que leur pêche. On les conserve ou vivans dans des barricades et bateaux, ou gélés, sechés, salés, fumés, et c'est là le grand objet du commerce. Les Ostiaques font de la farine de poissons, appellée Porsa.

I. Pêcheries sur la mer Caspienne.

De toutes les pêches de la Russie celle sur la mer Caspienne est la plus importante, elle l'est aussi dans

Digitized by Google

toute l'Europe et ne cede qu'à celle des Anglais à Terre-neuve. Elle se subdivise en

1) pêche sur la côte occidentale,
2) sur la Volga inférieure,
3) sur la rivière Oural et la côte voisine.
4) sur la rivière Jemba,
5) sur la côte perse,
6) sur les Iles.

La pêche sur *la côte occidentale* a pour objet les Belouga, Osetri et Sewriouga. La pêche de printems commence à la mi mars par le petit poisson (Obla) qui sert d'amorce, on le conserve vivant. Puis arrivent les Belouga, pendant deux semaines les pêcheurs travaillent jour et nuit, chaque bateau prend en 24 heures environ 50 poissons. Aprés viennent les Sevriouges, les plus grands sont de 3 archines et demi, on compte 16 à 20,000 de ces poissons par Watage. À la mi-mai la pêche est finie et les pêcheurs vont avec leur poisson à Astrachan. La pêche recommence en automne à la mi-Septembre et dure jusqu'à la fin d'Octobre. Ici on ne prend que les Belouga en pleine mer et les Osetri là où l'eau est douce. Enfin la pêche d'hiver continue pendant tout l'hiver et n'a pour objet que la Belouga. Le dépôt des poissons est Astrachan.

La pêche *sur la Volga inférieure* a pour objet les Belouga, Osetri, Sevriougi, Sterledi, Lossossi et Somi. La richesse en poissons est incroyable. Il arrive chaque printems, sans compter les habitans d'Astrachan, 10,000 bateaux et plus, chacun à deux pêcheurs. C'est ici que les Outschiougi étaient en usage, mot tatare qui signifie barricade, les Watages les plus considérables sont de là appellés Outschiougi. Les Tatares inventerent ces machines pour empêcher le poisson de monter jusqu'aux gouvernemens russes, c'étoit un monopole contre le quel tous les vayageurs et surtout les Académiciens ont déclamés et que le Gouvernement a enfin defendu sous le regne actuel.

La pêche *sur la rivière Oural* appartient par des anciens priviléges aux Cosaques de l'Oural. Elle s'étend à 70 werstes depuis l'embouchure de la rivière jusqu'à bogatoi koultouk. Autrefois la Couronne avoit une Watage à Gurjew, mais on l'a remise aux cosaques contre une redevance de 4000 roubles, qui sont employés à l'entretien des trouppes cosaques sur la ligne. Au dessus d'Ouralsk ils ont placé un Outschioug qui empêche le poisson de remonter au delà. La rivière Oural a tous les grands poissons de la Volga, les Belougas sont de 25 pouds et donnent 5 pouds de kaviar, mais il est de la

Digitized by Google

dernière sorte. Les Osetri ont une sachène en long, pèsent ordinairement 5 pouds et donnent 1 poud de Kaviar qui est le plus estimé. Aucune branche de la pêche caspienne étoit de tout tems aussi bien organisée que celle de l'Oural, les coutumes et la subordination militaire avoient pourvu à tout. La pêche la plus riche se fait en Janvier pour les Osetri et Belouga, on y emploie des batons ferrés, la seconde pêche se fait en Mai pour les Sewriouges, au filet. Cette pêche est si abondante qu'on entend le bruit des Sewriouges sous l'eau dans les environs de Gurjew. Une ancienne loi coutumière des Cosaques ordonne de jetter en mer tous les Belouga et Osetri qui s'engagent dans les filets en été puisque ces poissons ont plus de prix en hiver. La pêche d'Osetri se fait en Automne. Enfin la pêche se termine par les eaux voisines, mais elle n'est pas considérable.

La *rivière Jemba* a les mêmes poissons que la Volga, mais elle n'est pas si riche. Astrachan envoit annuellement 1000 bateaux à cette pêche, 700 au printems et 300 en automne. L'objet de la pêche sont les Sevriouges, on compte par bateau 700 poissons. Les Côtes sont peu sûres à cause des courses des Kirgises et Truchmenzi. C'est pour cela qu'il y a toujours quelques gros navires (Raschivi) à cette pêche sur lesquels les pêcheurs se

sauvent en tems d'orage et où ils deposent leurs poissons.

La pêche *sur la Côte perse* se fait à l'embouchure du fleuve Sifidoud à Gilan, à Astrabat et aux environs de Sallian. Les Perses ne mangent pas les Osetris et le Chan de Derbent avoit accordé aux Russes la permission de pêcher l'esturgeon pour la somme de 25000 roubles. Cette pêche est si abondante qu'on jette la plûpart des poissons dans la mer après avoir oté le Kaviar.

Enfin la pêche *sur les Iles orientales de la mer Caspienne* se fait au printems et en automne. Son objet est le Chien de mer, on les transporte salés à Astrachan où on leurs ôte la peau et brule l'huile. Cette huile est meilleure que celle de la mer blanche et la pêche est aussi plus riche dans la mer Caspienne.

Mr. l'Académicien *Pallas* s'est beaucoup informé *du produit* de cette pêche. Mais le capitaliste a trop d'interêt à garder le secret sur le véritable état de sa production pour que nous puissons nous fier à ces données. Voici les données que j'ai pu rassembler à ce sujet: 1) Les pécheries d'Astrachan, sans celles de l'Oural, prennent annuellement en Belouga, Osetri, .. Sewriouga 1,850,500 poissons, evalués au moins à 1,229,350 roubles, qui donnent encore 3515 pouds de colle, au dernier prix 206,235 roubles, 123,970 pouds de Kaviar à

Digitized by Google

432,895 roubles au moins. Ce qui fait un produit total de 1,868,480 roubles. Le produit du petit poisson est evalué à 500,000 roubles. Produit total 2,368,480 roubles. 2) Un rapport officiel de 1802, évalue le capital employé à 1,334,624 roubles. 3) Un rapport officiel de 1804 donne déjà une idée plus juste de cette grande pêche. Il est dit: on prend aux pêcheries d'Astrachan environ 4,013,880 grands poissons, Belouga, Osetri, Sewriouga, Somi et Sasani. Le capital employé annuellement à cette pêche monte à 4,216,300 roubles, celui de la chasse des chiens de mer à 85,000 roubles, on en prend environ 160,000. Tout cela à un air de verité, mais il est peu croyable que le produit total d'une pêche aussi riche ne seroit que 4,682,290 roubles, ainsi qu'un capital de 4 millions ne rapportait que 465,990 roubles. Le produit total de la chasse aux chiens de mer est marqué à 105,000 roubles. La pêche de l'Oural, qui comprend l'embouchure de la rivière Oural, 3 petites rivières, 3 Protokow, 15 lacs et un Jerik rapporte annuellement 532,000 gros poissons, le capital annuellement employé est marqué à 400,000 roublet, et le produit total à 600,000 roubles. Il est naturel que les données sur la pêche de l'Oural doivent être encore plus imparfaites que celles sur les pêcheries

d'Astrachan puisque la pêche de l'Oural est donné par privilege aux Cosaques de l'Oural. Mille Belouga donnent 7½ pouds de Klei, à bas prix 60 roubles le poud, et 100 pouds de Kaviar dernière sorte, à bas prix 3½ roubles. Mille Osetri donnent 2½ pouds Klei premier sorte, et Kaviar 60 pouds première sorte. Mille Sevriouges donnent 1½ pouds de Klei et 60 pouds de Kaviar.

L'administration des pêcheries d'Astrachan a souffert plusieurs changemens. On comprend sous ce nom toutes les pêcheries sur la mer Caspienne excepté celle de l'Oural. Ces pêcheries furent données après la conquete des Chanats de Kasan et d'Astrachan au Patriarche. En 1704 elles revinrent à la Couronne, en 1717 le Monastère Spassopreobragensky eut quelques Outschionges et les autres sur la Volga furent donnés à des particuliers. S. M. l'Impératrice Catherine II. donna les pêcheries de la Couronne aux Marchands d'Astrachan contre un impôt de 5 roubles du poud de Klei et de 2 roubles 80 cop. du poud de Kaviar. Un comptoir pour la pêche d'Astrachan fut chargé de là recette. Ce comptoir avoit reçu depuis 1763 — 1783 plus qu'un million de roubles et fut pourtant obligé de demander de l'argent à la banque pour payer ses dettes. Les directeurs de ce comptoir étoient des bourgeois d'Astrachan qui donnoient les Outschionges

Digitized by Google

à ferme. Le produit de la ferme devoit être partagé entre la bourgeoisie et la Couronne. Ce partage fit des mécontens, enrichit quelques particuliers en endetta le comptoir. Quatre des plus grandes Outschiouges avec 450 paysans, sans compter les ouvriers libres, ne donnoient à la Couronne que 16,216 roubles de revenu en 1770. Enfin tous les employés de la Couronne jouissoient du droit de recevoir le poisson sans payement. Le prix du poisson haussa considérablement à Astrachan même. Le dernier resultat étoit que les Outschiouges devinrent insensiblement la propriété des particuliers et la Bourgeoise d'Astrachan n'étoit plus en possession de ces pêcheries. En 1770 le Comptoir d'Arpentage vendit 5755 dessaetines de terres incultes à des particuliers, mais ces terres incultes étoient des côtes. Les nouveaux propriétaires donnoient les endroits propres à la pêche en ferme. En un mot la Bourgeoisie d'Astrachan n'eut en 1793 que quatre Outschiouges qu'elle perdit en 1797. Les pêcheries sur le reste de la côte furent données en 1798, et celles sur la Jemba en 1799 à des grands proprietaires. C'est ainsi que toutes ces pêcheries devinrent la proprietés de 3 à 4 proprietaires et la suite étoit un haussement subit dans les prix.

En 1802, le principe fut reconnu que les côtes de

la mer seroient libres, que les pêcheries ne seroient ni données en ferme ni en proprieté mais remises à l'usage public. Ce principe eut des modifications par les droits que l'achat du terrain de la Couronne, la possessiòn depuis 1770 et les fraix considérables mis à ces établissement donnoient à plusieurs propriétaires. On assura donc à chaque Watagi une werste carrée de côtes, le reste fut declaré libre. Un autre principe établi fut que tout instrument qui empêcheroit le poisson de monter le fleuve seroit defendu et nommement les Outschiongi. Ce principe eut encore une modification prise de la longue existence des 4 Outschiongi près d'Astrachan qui ne devoient être detruits qu'après la mort des proprietaires actuels. Tous les autres seroient detruits jusqu'au premier Janvier 1805. Le Sénat donna sa résolution dans ce sens le 30 de Juin 1802 et Sa Majesté l'Empéreur la confirma le 11 de Septembre 1803. Tous ces arrangemens ne regardent que les pêcheries à l'embouchure de la côte occidentale de la mer Caspienne et à l'embouchure de la Volga. Celle de l'Oural resta sur le même pied comme auparavant et celle de la Jemba fut rendue entièrement libre.

Il n'y eut que le Schamchal de Tarkou, chef d'une peuplade sur la côte occidentale, qui en reconnoissance des services rendus à la Russie eut en proprieté les pê-

Digitized by Google

cheries de Tschetscheni par l'Oukase du 11 de Mars 1803. Il fait garder la côte, porte le titre de Général-Lieutenant russe et a soumis plusieurs peuples du Caucase à la Russie.

Les pêcheries à l'embouchure de la rivière Zemba et sur la côte perse rendues entièrement libres, eurent leur reglement de police le 16 de Juillet 1803, pour l'execution duquel il y a une expedition à Astrachan qui coute 14,860 roubles. Cinquante Lodki ont deux gros navires pour les proteger et un chef choisi par les pêcheurs. Ces chefs de pêcheurs ont des surintendans de la Couronne, trois navires armés protegent la pêche, le sort decide sur la place que chaque bateau doit occuper et il conserve cette place pendant trois ans. Le grand bateau (Lodka) paye pour la pêche de printems 10 roubles pour les fraix causés par ces arrangemens, le petit bateau (Walakouscha) cinq roubles; et pour celle d'automne le grand bateau paie cinq roubles et le petit trois roubles; le filet paye 20 roubles. Chacun peut batir des habitations pour les pêcheurs sur la côte (Wychody), les places sont données par la Couronne sans payement pour 12 ans, terme ordinaire que ces habitations de bois durent. La Lodka pour la pêche sur la côte perse paye 10 roubles; le navire pour la Chasse des Chiens de mer 20 roubles.

Les poissons sont d'abord deposés aux magazins dans les Wataeges, de là ils passent à Astrachan, d'où une partie est mise en vente à la grande foire de Makariew, en 1810 le poisson et le Kaviar envoyé d'Astrachan à la foire de Makariew fut évalué à 938,097 roubles; le reste va à Saratow, Kasan, Simbirsk et de là plus loin. L'huile des chiens de mer est envoyée à Kasan aux savonneries, qui lui doivent leur haute réputation. Le poisson de l'Oural va à Kasan, Simbirsk, Nigegorod, Moscou et Pétersbourg. La Colle et le Kaviar entre dans le commerce étranger.

La *pêche sur la côte de Caucasie* donnée au Schamchal de Tarkou s'étend sur une partie des côtes de la mer Caspienne et sur l'embouchure de deux rivières. On compte 774,000 gros poissons pris annuellement, le capital employé est evalué à 80,000 roubles, le produit total à 120,000, donnée vraisemblable qui prouve l'imperfection des données précedentes sur la pêche d'Astrachan. Le poisson trouve son marché à Astrachan, à Saratow et à Kasan.

D'après ces données toujours très imparfaites les pêcheries d'Astrachan emploient annuellement un capital de

Digitized by Google

	4,216,300	roubles,
la chasse des chiens de mer —	85,000	—
celle de l'Oural — — —	400,000	—
celle sur la côte de la Caucasie	80,000	—
	4,781,300	—

assurement plus que 5 millions.

Le produit net du premier capital est marqué à:

	465,990	roubles,
du second — — —	20,000	—
du troisième — — —	200,000	—
du quatrième — —	40,000	—
	725,990	—

Ce produit net pourra bien monter à plus d'un million.

II. Pêcheries sur la mer noire et sur la mer d'Asow.

La pêche sur la mer noire et sur la mer d'Asow pourra devenir avec le tems très lucrative, puisque la mer est poissonneuse; mais jusqu'àpresent elle ne l'est pas, car la côte est peu peuplée, et le petit nombre d'habitans est occupé à d'autres travaux.

Catherinoslaw a des pêcheries sur la mer d'Asow, sur le Liman, sur le Dniepre et sur le Don. La mer noire four-

nit comme la mer Caspienne des Belouga, Osetri, Sevriouga, Somi, Sasani et Sterledi, mais on ne prend qu'environ 3,500 pouds, ce qui suffit à peine à la demande dans le gouvernement. Taganrok fait exception de cette regle, son commerce économique en poisson est considérable, on exporte environ 30,000 charriots pour la petite Russie et les provinces polonoises. On dit que ce commerce met un capital de 300,000 roubles en circulation. Le reste est de peu de conséquence, le capital productif ambulant est estimé à 99,370, le produit total à 196,670. *Cherson* a des pêcheries sur la mer noire, sur les limans et sur 10 fleuves, on prend 51,620 gros poissons, le capital employé annuellement est marqué à 16,000 roubles, le produit total à 27,800. Le poisson trouve son marché en petite Russie, dans les autres gouvernemens polonois et il va même à Catherinoslaw. *La Tauride* a des pêcheries sur la mer noire et sur la mer d'Asow, sur le Bosphore et sur le Liman du Dniepre, sur 3 grandes et sur 7 petites rivières, on prend environ 83,000 gros poissons et 150,000 huitres. Le capital est marqué à 388,850 roubles, le produit totel à 584,000. En 1804 selon le rapport du gouverneur sur l'état des pêcheries le capital ambulant étoit de 407,850 roubles, le produit total de 579,000, le produit net de 171,150. Ces données repondent assez bien.

Les *Cosaques du Don* ont la pêche sur la mer d'Asow sur 13 petites rivières et sur plusieurs lacs. On prend environ 60,000, gros poissons, le capital est marqué à 200,000 roubles, le produit total à 500,000. Le poisson va en petite Russie et dans les gouvernemens polonois. En decomptant les fraix du produit total on voit que *le produit net des pêcheries sur la mer noire est tres considérable.* Catherinoslaw emploie 99,370 roubles de capital à la pêche et en tire 106,670 produit total (sans le commerce de Taganrok) par conséquent 97,300 de produit net. Ce gain est immense car il égale presque le capital emploié et il est étonnant qu'il n'encourage pas les capitalistes de mettre leurs capitaux à une industrie aussi lucrative. Cherson emploie 16,000 roubles de capital et a 27,800 de produit total, donc 11,800 de produit net, gain aussi très considérable. La Tauride emploie 388,850 de capital, son produit total est estimé à 584,000 roubles reste 196,150 produit net. Les Cosaques du Don mettent 200,000 roubles à cette industrie et retirent pour 500,000 roubles de poisson, reste 300,000 de produit net; somme totale du capital employé 704,220 roubles et du produit net 605,250, le produit net est donc presque égal au capital emploié tandis qu'à la mer Caspienne il est à peine 5 pour cent? — Il resulte de là que la pêche sur la mer

noire est très lucrative, mais qu'elle ne fait que naitre, et il est à prévoir que la demande augmentera avec le tems la p oduction.

III. Pêcheries sur la mer blanche et sur l'Océan septentrional.

La pêche sur la mer blanche et sur l'Ocean septentrional est de trois genres 1) celle qui se fait sur *les côtes de l'Océan septentrional* 2) celle qui se fait *au Groenland, Spitzbergen* et à *la nouvelle Zemble*, 3) celle qui se fait sur la mer blanche. Ces différentes pêches se font par les habitans des villes d'Archangel, d'Onega, de Mesen et de Kola et par les paysans de ces cercles, surtout par ceux d'Onega, habitans de la côte méridionale de la mer blanche, ils portent le nom de Pomorie. Les habitans de la ville et des cercles de Mesen vont particulièrement à la chasse des chiens de mer etc. à nowaia Semla et au promontoire Kandin-nos, d'ailleurs ils s'occupent de la pêche des Sigi et Somgi sur les rivières Mesen et sur la Petschora. Les habitans d'Archangel et de Kola vont surtout à Spitzbergen et au Groenland, qu'ils appellent le grand et le petit Groumant.

1) Kola est le point de réunion de tous les pêcheurs pour *l'Occan septentrional;* ils y arrivent par terre

Digitized by Google

d'Archangel, de Cholmogor et d'Onega à la fin de Mars, car ici la mer est ouverte au commencemnt d'Avril tandis que la Dwina et la mèr blanche sont encore couvertes de glaces. Aussitôt que les pêcheurs sont entrés en mer ils se repandent sur les côtes de l'Océan septentrional jusqu'à la frontière danoise environ 200 werstes à l'Oeust de Kola, et jusqu'à Swaetoi-Nos environ 400 werstes à l'Est et se logent sur le rivage par dixaines et plus. Au commencement du Juin quand la navigation est ouverte à Archangel arrivent des bateaux d'Onega et d'Archangel qui apportent aux pêcheurs des provisions, du sel et du bois. Ces bateaux s'occupent aussi de la pêche au mois de Juillet et jusqu'à la mi-Août. Mais s'ils ont été retardés à Archangel il ne vont pas à la pêche mais ils retournent tout de suite à Archangel avec le poisson deposé aux magazins des pêcheurs. 2) La pêche à la *nouvelle Zemble et au Groenland* se fait en gros navires qui partent de Kola au mois de Juin. Arrivés au Groenland ils occupent la côte occidentale, car la côte orientale n'est pas praticable. Les habitans de Mesen y vont à la mi-May et aussi à Kandin-Nos. Les pêcheurs ont des habitations en ces endroits pour lesquelles ils ont apportés les matériaux par mer. Si leur chasse est heureuse ils retournent le même été, si elle est pauvre ou

si les glaces empêchent la navigation ils passent jusqu'à deux ans dans ces iles desertes. 3) Une troisième pêche se fait *sur la mer blanche*, elle a pour objet cet animal marin appellé Serka (Phoca groenlandica ou oceanica). Tous les habitans des côtes partent pour cette pêche au commencement du Mars en petits navires et réviennent au mois de Juin et de Juillet.

Les *bateaux de pêcheurs* pour la pêche sur la côte de l'Océan septentrional portent 250 à 300 pouds, sont à un mat et menés par quatre bateliers; les *gros navires* qui vont au Groenland, novaia Semla et Spitzbergen portent trois mats, 4 à 6000 pouds et sont menés par 10 ou 20 hommes. Les habitans de Mesen vont à Kandin-Nos en bateaux de 150 à 200 pouds et ont 6 à 8 matelots. Pour la pêche sur la mer blanche on se sert de *bateaux très legèrs* que quatre hommes portent aisement d'un endroit à l'autre. Les bateliers et ouvriers à la petite pêche reçoivent outre la nourriture 10 à 15 roubles pour tout le tems de la pêche mais à la grande pêche chaque ouvrier a sa part dans le produit total de la pêche.

La pêche sur l'Océan septentrional a *pour objet* la Treska et Paltousa (gadus morluo, la morue et gadus merlucius) la pêche la plus riche se fait au printems, puis vient la pêche au petit poisson et enfin en Août la pêche

Digitized by Google

aux harengs. La Treska a ordinairement 60 livres, la Paltousa 5, 6 et 15 pouds. Cette pêche s'étend 20 à 30 werstes en mer. La pêche de la Treska est la plus lucrative, puis vient celle du hareng. La côte appellée Mourmanskaia est la plus riche en poissons. La pêche du hareng se fait près des côtes de la mer, elle est sursout abondante quand les baleines suivent les harengs. La mer blanche est aussi riche en harengs et les Serki leurs donnent la chasse comme les baleines dans l'océan septentrional.

La chasse des animaux marins se fait au Groenland, sur l'île des Ours, à nowaia Zembla et à Kandin-Nos et sur les petites îles aux environs, aussi sur la côte de l'océan septentrional et dans les golfes de la mer blanche. Au Groenland on prend des Morgi (vache marine, Trichechno rosmarus), Belougi, des Ours et des lievres marins et dans l'intérieur des terres des renards bleux et des Rennes sauvages. À nowaja Zembla, à Pustosersk et à Kandin-Nos il y a peu d'Ours marins et au dernier endroit point de renards bleux, mais des renards blancs de première qualité. Sur la cote Mourmanskaia on prend la Serka, espèce tout à fait différente du Phoque, connue dans le système de *Linné* sous le nom de Phoca groenlandica et decrite par feu Mr. l'Académicien *Lepechin* dans

les Nova Acta de 1777 sous le nom de Phoca oceanica; des lievres marins, mais peu de Morgei. Sur les côtes de la mer blanche surtout la Serka. La meilleure chasse se fait en Mai, Juin et Septembre. La Belouga se prend au filet depuis la mi-Juin jusqu'au Septembre. La chasse au renard se fait en hiver depuis le Novembre jusqu'au Janvier.

Les poissons de mer sont salés, sechés et fumés.

Archangel est le grand marché de toute la pêche, de là on envoit le poisson à Pétersbourg et à Moskou. Les peaux de plusieurs animaux marins vont jusqu'à Kiachta.

Je n'ai point de donnée sur le produit de cette pêche excepté qu'en 1785 arriverent 146 gros navires et 120 petits ménés par 2198 pêcheurs qui apporterent du poisson salé et seché, de l'huile, des peaux et des Euderduns pour la valeur de 141,823 roubles. Une autre donnée officielle dit qu'on prend environ 32,000 pouds de Paltasina et Semga. On estime le capital productif employé annuellement à 26,772 roubles, le produit total à 146,470 roubles. Cette donnée repond assez bien à la première et elle prouve que la pêche sur la mer blanche et sur l'Océan septentrional quoique très variée et très abondante est encore en naissant.

Digitized by Google

C'est précisement pour la rendre plus lucrative qu'on a établi la Compagnie de la mer blanche le 14 Août 1803, qui a pour 25 ans le privilège de la pêche dans la mer blanche et dans l'Océan septentrional à condition de ne faire aucun tort à la pèche et au commerce de poissons des particuliers libres. L'objet principal de cette compagnie est la pèche aux harengs, encaquement à la manière hollandoise et la cuisson de l'huile de poisson, ensuite la pêche de la Baleine négligée jusqu'alors, les Morgi et Treski. Les actions sont de 250 roubles, les comptoirs à Onega et à Archangel, la direction est à Pétersbourg. La compagnie a différens autres privilèges, comme celui de faire venir des sels étrangers pour l'encaquement, le droit de construire des navires etc.

IV. Pêche sur les autres rivières et sur les lacs.

Voilà les grandes pêches de la Russie; pour donner une idée de l'état de la pêche dans les autres gouvernemens, où la pêche est moins considérable nous ajoutons le tableau suivant :

	Gouvernemens.	Mers, lacs et fleuves.	Poissons.	Capital employé annuellem.	Produit total.
sur la mer baltique	St. Pétersbourg	Le golfe de Finlande, 22 rivières le Ladoga, Tschutzkoe, et Somro, 27 petits lacs.	Lochi, Forelli (Salmo Fario), Sterledi, Sigi (Salmo Lavaretus) et de petits poissons environ 26,000 pouds.	210,000 r.	310,000 100,000 prod. net.
	L'Esthlande	Au golfe de Finlande, Tschutzkoe Osero, 225 petits lacs,, 1[illegible]4 petites rivières et sur la Narova.	Des Carpes, Lochi.	peu im-	portant
	La Finlande	Au golfe de Finlande, 3 grands lacs, 4 rivières.	Petits poissons, environ 3 à 4000 de grands	34,808	62,772 27,877 prod. net
	La Livonie	pêche	peu impor	tante	
	La Courlande	A la mer baltique 9 rivières, 19 lacs.	Lochi et petits poissons environ 4 millions.	2000 écus.	12,000 écus 10,000 écus
sur les lacs	Olonetz	23 rivières, le lac Ladoga, 200 petits lacs.	Osetri, Lochi, Lososi, environ [illegible]90 pouds en grands poissons.	27,950 r.	57,070 r. 29,120 prod. net
	Novogorod	42 rivières, 3 grands lacs, 55 petits.	Osetri, Belouga, Lososi, belaia ribitza, Sterledi 874,464 pouds.	302,030	623,330 321,300 prod. net
	Plescou	Pskovskoe Osera.	— — —	140,000	196,000 56,000
	Irkoutzk	Le Baikal, 3 lacs 16 rivières.	Osetri, Somi, krasnaja ribitza, Sasani, Sterledi environ 362,000 poissons.	12,000	16,600 4,600

Digitized by Google

	Gouvernemens.	Mers, lacs et fleuves.	Poissons.	Capital employé annuellem.	Produit total.
sur la Wolga	Twer	67 rivières, 48 lacs.	Belaja ribitza, Sterledi, Somi 61,273 pouds.	6,000	41,000
				35,000	
	Jaroslaw	15 rivières, 1 lac.	Belouga, Osetri, Sevriouge, belaja ribitza, Somi, Sterledi environ 42,880 gros poissons.	21,400	54,400
				33,000	
	Nigegorod	3 fleuves et quelques lacs.	Osetri, belaja ribitza, Somi, Sterledi.	7000	14,000
				7,400	
	Kostroma	4 fleuves, 2 lacs.	Les mêmes poissons 12,000 poissons ou 15,000 p.	6000	22,000
				16,000	
	Kasan	12 fleuves.	Mêmes poissons 46,900 pouds.	28,200	75,500
				47,300	
	Simbirsk	5 fleuves 566 lacs.	Mêmes poissons 7,700 gros poiss.	43,500	68,400
				24,000	
	Saratow	13 fleuves, 3 rivières, et quelques lacs.	Mêmes poissons 337,670 gr. poiss.	182,547	257,773
				75,226 *)	
sur d'autres fleuves	Resan	La Oka et son système.	Rarement belaja ribitza, Somi et Sterledi en abondance environ 4310 gros poiss.	10,000	20,000
				10,000	
	Wladimir	22 fleuves, plusieurs lacs et rivières.	Rarement Osetri, plus de Somi et Sterledi 5920 p.	4,800	18,000
				13,200	
	Mohilew	29 fleuves, 199 lacs.	Osetri, peu de Somi 40,800 pouds.	11,200	inconnu

*) Selon le rapport du Gouverneur en 1804 la pêche de Saratow a rendu [illegible]0,888 gros poissons, 904, 92 Sterledi d'une Arschine, et 108,000 pouds de petits poissons. Les frais étoien. 165,527 roubles, la recette 2[illegible]5,[illegible]73, produit net 49,743, ouvriers 3884.

	Gouvernemens.	Mers, lacs et fleuves.	Poissons.	Capital employé annuellem.	Produit total.
sur d'autres fleuves	Smolensk	33 fleuves, 57 rivières, 125 lacs.	Somi et Sterledi 5,[illegible]00 pouds.	600	7000
				6,400	
	Kiew	7 fleuves.	Belouga, Osetri, Somi, en petite quantité.	peu im	portant
	Waetka	7 fleuves.	Osetri, Belouga, Sterledi, [illegible],3[illegible]0 pouds.	7000	18,000
				11,000	
	Tobolsk.	2 fleuves.	Osetri, Belouga, Sterledi [illegible]5,5[illegible] pouds	85,690	11[illegible],650
				26,9[illegible]0	

Les autres gouvernements n'ônt pas de pêcheries considérables.

D'après ces données, qui sont toujours intéressantes puisqu'elles donnent une idée de la *moindre grandeur des capitaux employés* et de leur produit net, vu qu'il n'est pas vraisemblable que les capitalistes aient indiqué plus qu'ils n'emploient effectivement de capital ou plus qu'ils n'en retirent de profit, on a le résultat suivant:

		Capital employé	produit net
1)	Pêche Caspienne —	4,781,300 r.	725,998 r.
2)	sur la mer noire —	704,220 -	605,250 -
3)	sur la mer blanche et l'Océan septentrional (sans la compagnie)	26,772 -	119,698 -

Digitized by Google

4) sur la mer baltique —	248,898 -	147,877 -
5) sur les grands lacs	481,980 -	411,020 -
6) sur la Wolga jusqu'à son embouchure —	294,647 -	238,926 -
7) sur les autres rivières	119,290 -	67,560 -
	6,657,107 r.	2,256,321 r.

Il résulte de ce tableau encore très imparfait, que la pêche est en Russie un objet important. Mais il faut bien se ressouvenir que c'est le minimum surtout pour la grande pêche Caspienne, et que le capital employé par la compagnie de la mer blanche n'y est pas compté. On pourra toujours admettre un capital ambulant de huit millions pour la pêche en Russie.

Mr. *Krug* à trouvé qu'en Prusse le produit total de la pêche est quatre fois plus grand que le produit net. En admettant cette proportion en Russie et en évaluant le produit net au moins à $2\frac{1}{2}$ millions le produit total seroit même un objet de 10 millions.

SUR LA REPARTITION DU NOMBRE TOTAL DES HABITANS DE LA RUSSIE.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 12 Août 1812.

Seconde partie.

Repartition selon les Réligions, selon les états et selon les droits particuliers.

Selon les Réligions.

Depuis que la plupart des gouvernemens de l'Europe ont proclamé le principe de la tolérance, cette soudivision de la totalité des habitans n'a plus le même interêt politique qu'elle avoit depuis le 16[me] jusqu'au commencement du 18[me] siècle. Pourtant elle ne laisse point d'être très importante puisque la Réligion est le lien sacré qui reunit tous les membres de la société, qui rapproche tous les états, et qui les soutient dans les malheurs publics.

La tolérance n'est pas partout la même, en quelques pays elle est politique sans être réligieuse, en d'autres elle est réligieuse et nullement politique, en Russie elle

Digitized by Google

porte ce double caractère, car la *Réligion dominante* ne s'est reservée d'autre privilège que celui d'étendre sa doctrine par tout l'Empire. Nombre d'ouka es défendent de recevoir les payens et les Mahométans dans une autre Réligion que dans la Réligion grèque, comme celles du 20 Mars 1723, du 28 Août 1724, du 30 Octobre 1726, du 17 Mars 1730 et du 15 Janvier 1746. D'autres oukases defendent de passer de la Réligion grèque à une autre Réligion quoique chrétienne. Déjà l'oukase du 15 Août 1728, defend aux catholiques de faire des proselytes et cette défense a été repetée par l'oukase du 18 Mars 1796. Enfin c'est une règle générale que tout enfant né de père ou de mère grèque doit être baptisé dans la même Réligion.

Le dernier tableau que j'ai pu consulter sur le nombre de ceux qui avoient embrassé la Réligion grèque étoit de 1795, il indiquoit 512,333 hommes. Le nombre des femmes n'étoit pas marqué puisque le tableau est financiel. En ajoutant les femmes et enfin les enfans nés de père ou de mère grèque, on sera persuadé que le nombre de ceux qui ont été reçus dans le sein de la Réligion grèque doit être considérable.

J'ai pu consulter les tableaux mêtriques depuis 1796, jusqu'en 1805 inclusivement relevés sur ceux qui confes-

sent la Réligion grèque. J'ai multiplié le nombre des mariages par 99, celui des naissances par 25 et celui des décés par 40, proportions qui m'ont paru les plus justes pour la totalité de la Russie et presque tous mes calculs donnoient en dernier résultat 29 millions et demi. L'imperfection inévitable de ces calculs fait que leur résultat est toujours au dessous de la réalité.

La Réligion grèque vit naître dans son sein, comme toutes les autres Réligions, plusieurs sectes appellées par l'Eglise dominante Raskoli ou sectes hétérodoxes tandis que ces sectaires se nomment Starowertzi, vieux-croyans, ou Staroobraedzi, du vieux rite. Ce nom indique bien le caractère général de ces sectes, qui est un attachement aveugle aux anciennes coutumes, que plusieurs parmi eux font remonter jusqu'au tems des patriarches. Par ce caractère ennemi de toute innovation les Raskolniki ne se conformerent point aux vues bienfaisantes de Pierre le grand et ne purent donc être tolerés. Les mésures vigoureuses que le Gouvernement dû prendre contre eux, tant que leur influence étoit à craindre, firent répandre leur doctrine presque dans tous les Gouvernemens de la Russie et même jusqu'en Sibérie. Ils sont nombreux sur l'Oural, à Tobolsk et en général aux environs des mines, tandis que les contrées méridionales, tels que les cercles de Krasno-

Digitized by Google

jarsk et de Jeniseisk, Gouvernement de Tomsk n'ont pas même l'idee des Raskoles. La profonde ignorance de ces sectaires, le mysticisme de leurs céremonies et l'interêt particulier de leurs nouveaux Apôtres qui gagnerent aux innovations, donnerent naissance à différentes sectes. Les plus reputées sont: Popovschina, Bespopovschina, Perepretschivantza, Douchobortschina. Tous les Gouverneurs donnent le meilleur témoignage de la conduite et des moeurs de ces sectaires, il n'y a que la secte Chlistovschina qui ne sauroit être tolerée, parcequ'elle ordonne à ces membres de se mutiler. Cette secte, dont les membres s'appellent Skoptzi, se repand encore actuellement sur tout dans le Gouvernement de Simbirsk d'aprés le compte-rendu de 1808.

L'Impératrice Cathérine II. accorda aux vieux-croyans le bienfait de la tolérance par l'Oukase du 1 Février 1762. On ne poursuit plus les sectes connues, on se borne d'empêcher l'origine des nouvelles. En 1796 le tableau financiel, dont j'ai fait mention, indiqua 39,586 Raskolniki, mais le nombre de ceux qui sont attachés en secrèt aux Raskoles est beaucoup plus grand. Ces sectes n'ont plus la moindre influence politique.

Au commencement du 17me siècle la *Réligion catholique* fut moins accueillie en Russie que les autres réligions

étrangeres. Ce ne fut qu'en 1734 que l'Impératrice Anne remit les affaires des catholiques au Collège de Justice. La réunion des provinces polonoises donna lieu au premier reglement sur l'administration ecclesiastique de cette Réligion en Russie le 17 Janvier 1782, il fut perfectionné par celui du 28 Octobre 1797 et souffrit quelques changemens essentiels sous le regne actuel le 13 de Novembre 1801. Selon ces Oukases il est defendu d'avoir des rapports directs ou indirets avec la cour de Rome, l'entrée de réligieux étrangers est devenu plus difficile, et l'autorité du Métropolite catholique est très étendue; elle étoit presque papale selon le reglement de 1797, mais elle fut limitée par le reglement de 1801. Les Uniates sont compris dans ces derniers reglemens.

Comme la réligion catholique est dominante dans les gouvernemens polonois, qu'elle s'est beaucoup repandue en Courlande et que nombre d'étrangers la confessent, on peut estimer le nombre des catholiques avec beaucoup de vraisemblance à sept millions d'habitans.

La Réligion luthérienne prédomine en Finlande et en Livonie, elle est très repandue en Esthlande et en Courlande.

Pierre le Grand confirma les privilèges de la Livonie, de l'Esthlande et de la Finlande à la paix de Ny-

stadt en 1721, et parconséquent aussi celui de leur culte, la Courlande jouit des mêmes prerogatives par le Manifeste du 15 Juin 1795, la nouvelle Finlande a conservé tous ses privilèges. La Réligion reformée est tolerée comme toutes les autres.

De la Réligion luthérienne sont les habitans de la Finlande ancienne et nouvellement aquise 1,077,773 individus des deux sexes; les habitans de la Livonie, à l'exception d'environ 4000 russes, 3000 polonois, quelques Milliers de paysans Lettes qui sont catholiques et 300 juifs, environ en tout 20,000 âmes, reste de la population de la Livonie 560,000 habitans luthériens; enfin la Noblesse et le tiers-état en Esthlande et en Courlande, (parmi les paysans il y a beaucoup de Catholiques) ainsi que l'on peut supposer la grande moitié de la population, luthérienne. La totalité monte à 590,000 individus dans les deux Gouvernemens dont environ 300,000 de la réligion luthérienne. À Moscou il y à tout au plus 3000 et à Pétersbourg environ 25,000. Somme totale avec les Colons et les étrangers disséminés dans l'intérieur deux millions.

De la *Réligion Mahométane* sont la plupart des tatares; tatares de Kasan 95,602, d'Astrachan 18,016, de la Crimée et de Jekatérinoslaw 240,000, de la Sibérie

62,898. La doctrine des Lamas et le paganisme regnent parmi les Nomades, 1,124,000 individus, en tout 1 Million et demi.

Le nombre de Juifs peut monter à un demi Million.

Résultat:	Catholiques	—	7 Millions,
	Protestans	—	2 Millions,
	Mahométans et payens		1 Million et demi.
	Juifs —	—	un demi Million,
			11 Millions des deux sexes.

Le vague qui regne dans ces calculs est la suite de la grande tolérance dont toutes les Réligions jouissent en Russie. Jamais le Gouvernement avoit fait relèver des états de la population selon les Réligions, jamais les Gouverneurs présenterent de pareils tableaux; heureuse ignorance d'une donnée statistique qui a couté bien cher aux autres nations! — Mais encore ces données seront perfectionnées depuis l'Organisation d'un nouveau Ministère pour les Réligions étrangères, qui s'occupe de rassembler les renseignemens nécessaires.

Selon les États.

Tous les habitans d'un pays sont ou de la classe productive: Agriculteurs, Artisans et Manufacturiers, Mar-

Digitized by Google

chands; ou de la classe improductive: la Noblesse, le Clergé, le Militaire et enfin ceux qui ne sont pas compris dans les classes précédentes (Rasnoschinzi).

I. Classes productives.

Agriculture.

Les paysans sont soumis à la capitation et aux levées militaires, donc leur denombrement est aussi exact que possible. Le total est invariable jusqu'à la Révision suivante, pourtant on rémarque des différences en comparant différens tableaux généraux. Elles proviennent de ce que l'auteur du tableau a ajouté ou omis quelque classe d'après le but particulier qu'il avoit. Les Comptes-rendus annuels des Gouverneurs donnent encore des résultats différens, suite du changement de domicile des paysans.

D'après la 5me Révision faite en 1796 il y avoit:

9,004,906 paysans aux particuliers,
471,307 aux Domaines,
6,241,870 à la Couronne,
15,718,083 hommes.

Cet état fut pris pour base par le Sénat au contrat pour la vente de l'eau de vie en 1803.

Un autre tableau composé au Ministère des finances a plus de détails; quelques différences proviennent vrai-

semblablement de ce qu'on a corrigé certains titres d'après les nouveaux renseignemens reçus des Gouverneurs. Je l'ai pu consulter en 1804, il marque:

9,202,635	paysans aux particuliers,
4,474,185	paysans à la Couronne,
508,791	paysans à l'Empéreur et aux domaines,
1,466,058	Cosaques et Odnodwortzi (Metayers),
71,561	Gens des Odnodwortzi, gens sous jugement, Tepteri et Bobilei,
15,723,230	hommes.

La différence de 5,147 hommes est une preuve que ce dernier tableau n'a pas été simplement copié sur le premier. L'histoire du tems sert à expliquer les différences entre les sommes particulieres. Sa Majesté l'Empéreur Paul ayant fait de grandes donations en paysans aux particuliers et aux Domaines, il n'est pas étonnant de retrouver les 230,066 paysans de la Couronne marqués au premier tableau, parmi ceux des particuliers et des domaines d'après le second tableau. Donc le premier tableau présente vraisemblablement l'état de la population tel qu'il étoit d'après la 5me Révision au commencement du règne de Sa Majesté l'Empéreur Paul I, le second l'état à l'avenement au trône de sa Majesté l'Empéreur Alexandre.

Un troisième tableau officiel sur la 5^me^ Révision que j'ai consulté en 1812, en comparant les résultats de la 5^me^ et de la 6^me^ Révision faite en 1812, contient ce qui suit:

paysans aux particuliers	—	9,458,737	hommes
paysans à la Couronne	—	6,321,015	—
paysans aux domaines	—	500,567	—
paysans à la famille Impériale, aux harras, au Commissariat etc.		88,487	—
Agriculteurs libres —	—	11,539	—
		16,380,345	—

Le surplus considérable de 657,115 paysans n'est pas la suite de nouvelles conquêtes, car il est dit expressement à la fin de ce tableau: que la Georgie, la nouvelle Finlande et la Galicie n'y sont pas comprises.

Ce surplus est ainsi reparti parmi les différentes classes:

les particuliers ont	—	256,102	paysans de plus,
la Couronne, en ajoutant les Cosaques, les Odnodwortzi et leurs gens, a	—	309,211	de plus,
les domaines et la famille Impériale —	—	80,263	—

Les Agriculteurs libres forment une nouvelle classe de	11,539	—
	657,115	—

C'est cette dernière classe qui donne une preuve evidente que ce tableau a été retouché par la suite, car elle n'existoit pas du tems de la 5me Révision en 1796, son origine ne date que depuis 1804.

Mais j'ignore si je dois expliquer la différence entre les résultats du premier et du dernier tableau, différence qui monte à 662,262 paysans, par les progrès de la population, ou par les erreurs provenus du changement de domicile des paysans. Je suis tenté de croire à l'un et à l'autre, puisque les paysans de la Couronne, qui ont plus de facilité à changer de domicile que ceux des particuliers, se trouvent avoir un plus grand surplus que ces derniers, quoique leur nombre est plus petit.

Arts et Métiers, Manufactures, Marchands.

Comme ces titres se trouvent souvent confondus dans les états sur la population, je ne saurois les séparer.

Le premier tableau porte sous le titre: Bourgeois et

Digitized by Google

Artisans en corporations 534,397 hommes,
Marchands 124,372 —
total 658,769 hommes.

Un autre titre ajoute les ouvriers aux Maitrises et Manufactures — 389,554 hommes.

Le total de ces classes industrielles seroit donc:
1,048,333 hommes.

Le second tableau marque sous le tître général: Marchands, bourgeois et artisans en corporations 745,786 hommes,
différence de 87,017 —
qui peut provenir des progrès de l'industrie, puisque le nombre de bourgeois, Artisans et Marchands augmente réellement comme le prouve la 6me Révision et puisqu'on ne tient pas si strictement à l'invariabilité du nombre de ces classes qu'à celle des révisionaires.

Sur le nombre des bourgeois communs qui ne sont ni artisans, ni Marchands, j'ai pu consulter un tableau financiel de 1796 qui indique sous ce tître 321,426 hommes.

Le troisième tableau n'a que deux tîtres:

Marchands 91,449,
Bourgeois 704,590,
796,039.

Il a donc 50,253 individus plus que le second et 137,270 de plus que le premier. Cette différence est trop considérable pour une faute d'écriture, elle ne sauroit non plus provenir du changement de domicile, je crois donc qu'elle provient réellement de l'augmentation du nombre d'individus qui composent cette classe. D'un autre coté la différence entre le premier tableau et le second est très rémarquable par rapport aux marchands, car ce dernier a 32,823 de moins, ou plus d'un tiers.

II. Classes inproductives.

D'après le second tableau:

Noblesse	—	224,012	hommes,
Clergé	—	215,694	—
Le Militaire en 1805	—	518,543	—
total		958,349	hommes.

Une classe particulière font en Russie comme en Suède tous ceux qui ne sont pas compris sous une des classes précédentes, ce sont pour la plupart des étrangers, ce tableau marque 589,277 hommes.

Le troisième tableau n'a pas la Noblesse, mais d'autres détails:

Digitized by Google

le Clergé est marqué 216,413 hommes,
Voituriers — 56,526 —
Rasnoschintzi — 754,712 —
à Astrachan 13,155 Kibitok et 188 Saisangow,
en Caucasie 316 —

13,471 Kibitok et 188 Saisangow.

La différence pour le clergé n'est pas sensible, 719 hommes, mais celle des Rasnoschinzi est très grande 165,435 individus. Cette classe qui ne paye point d'impôts direct a toujours été comptée avec peu d'exactitude. Il se peut donc qu'on a retouché ce tître d'après les derniers renseignemens. La donnée sur les voituriers et sur les Kibitok et Saisangow d'Astrachan et de la Caucasie est intéressante. Vu l'imperfection de ce tableau il n'y a aucune comparaison générale à faire.

Il resulte de ces données le tableau suivant en termes moiens et au minimum.

Classes productives:

Paysans — — 16 millions
Arts et métiers, Manufactures, Commerce 796,000,

total 16,796,000.

Classes improductives:

Noblesse	—	—	224,000,
Clergé	—	—	215,000,
Armée	—	—	500,000,
Rasnoschintzi		—	754,000,
			1,693,000.
		total	18,489,000.

Ce total est assurement inférieur à la réalité, pourtant comme il ne s'agit point ici de la totalité mais de la division en classes selon les états, ce tableau fait toujours voir les rapports qui existent entre elles.

Rapports 1) des classes productives aux classes improductives — — 1 à $9\frac{7}{8}$,

En Angleterre — — 1 à $6\frac{4}{5}$,

2) de la classe manufacturière et commercielle à la classe agricole — — 1 à 20.

En Angleterre la population des villes, où cette classe reside en grande partie est à celle des Campagnes — — 1 à $2\frac{1}{2}$,

en France — — — 1 à 4.

D'où il résulte que la Russie est un état éminement agricole, l'Angleterre un état éminement manufactu-

ner et commerçant, la France l'état où la proportion tient le milieu entre ces deux extremes.

3) Du tiers-état à la population entière. En supposant la totalité des habitans de la Russie seulement à 20 millions d'hommes et le tiers état à 800,000 la proportion seroit 1 à 25, en France 1 à 5 ce qui prouve que nôtre tiers-état est encore en naissant.

En 1790 on comptoit 3 millions d'habitans des deux sexes dans toutes les villes.

En 1795 — 3 millions et demi.
En 1804 — 5 millions.

Tous ces résultats sont très imparfaits vu qu'on n'indique presque jamais la population entière de la ville, pas même toujours tous les domiciliés, mais seulement les bourgeois et marchands sous des rapports financiels. En supposant la population au minimum de 40 millions les habitans des villes se rapporteroient à ceux des Campagnes comme 1 à 8.

Selon les droits particuliers.

Les provinces qui ont été réunies à la Russie à certaines conditions sont au nombre de quatorze.

La Livonie et l'Esthlande se rendirent en 1710 à des conditions qui ont été confirmées par le 9[me] article de la paix de Nystadt en 1712.

La Courlande se soumit entièrement le 17 Mars 1795, mais l'Impératrice Catharine II. conserva aux habitans leurs privilèges par le manifeste du 15 Juin 1795.

La Finlande fut réunie à la Russie par la paix de Nystadt en 1721, confirmée par celle d'Abo 1743, et conserva ses privilèges par l'article 8, 9, 10, de ce traité.

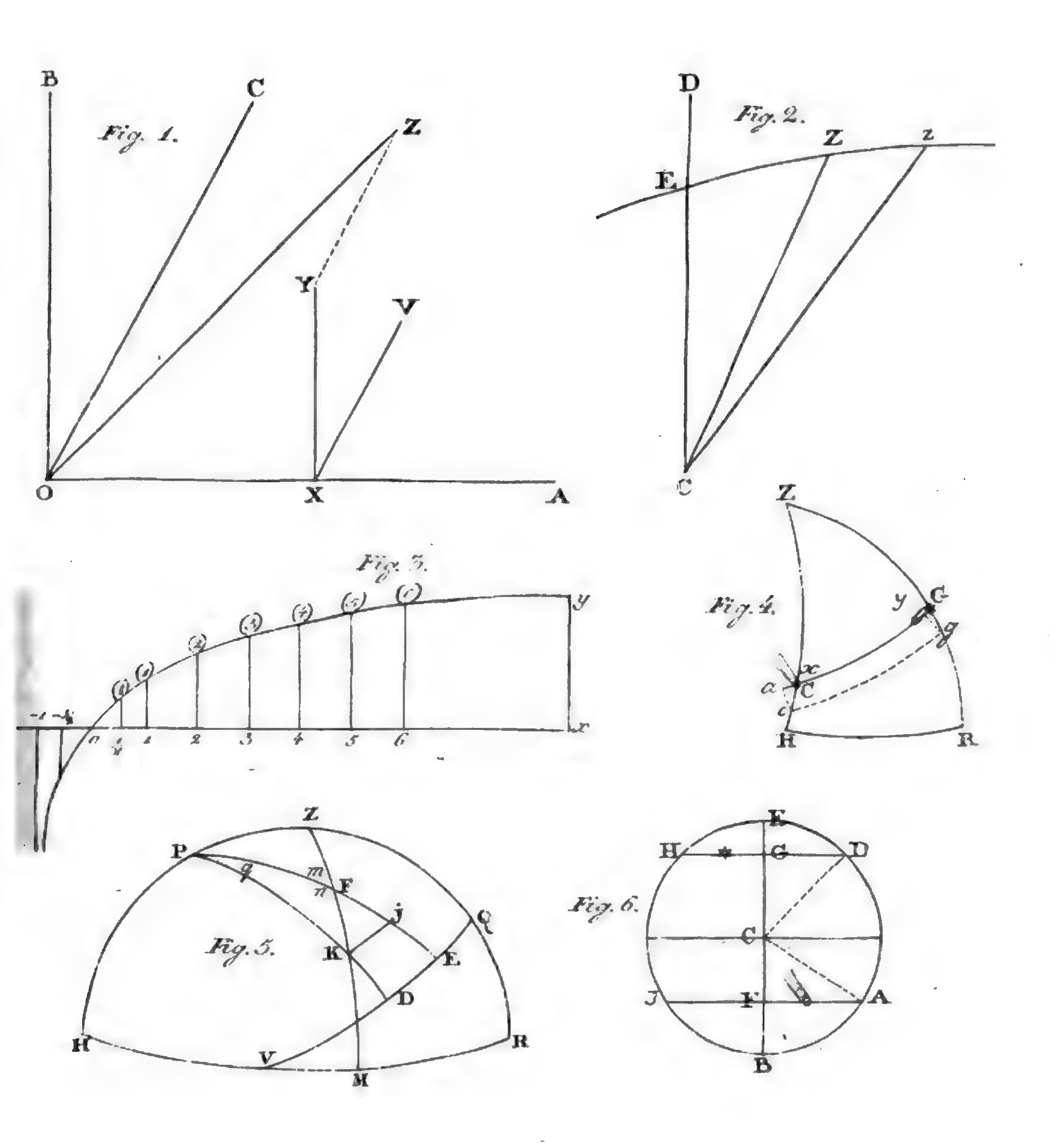
La petite Russie eut des privilèges en 1659 quand le Hetmann Chmelnitzki se soumit à la Russie. Sa Majesté l'Empéreur Paul I. les confirma le 30 Novembre 1798 pour Kiew, Tschernigow et Pultawa.

L'Oukase du 12 Décembre 1796 donne des droits particuliers à Witebsk et Mohilew, de même qu'à Minsk, Wilna et Grodno, à la Podolie et à la Volhynie.

Ces privilèges se rapportent surtout à la Réligion dominante, tous les autres qui concernent l'usage des loix du pays et quelques formes d'administration et de police sont de peu de conséquence, puisque la Russie a toujours observé la sage politique de n'exclure aucun de ses sujets du Sénat et des premières charges de l'Empire.

La population de toutes ces provinces monte environ à 5 millions et demi ou presque à un tiers de la population entière.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

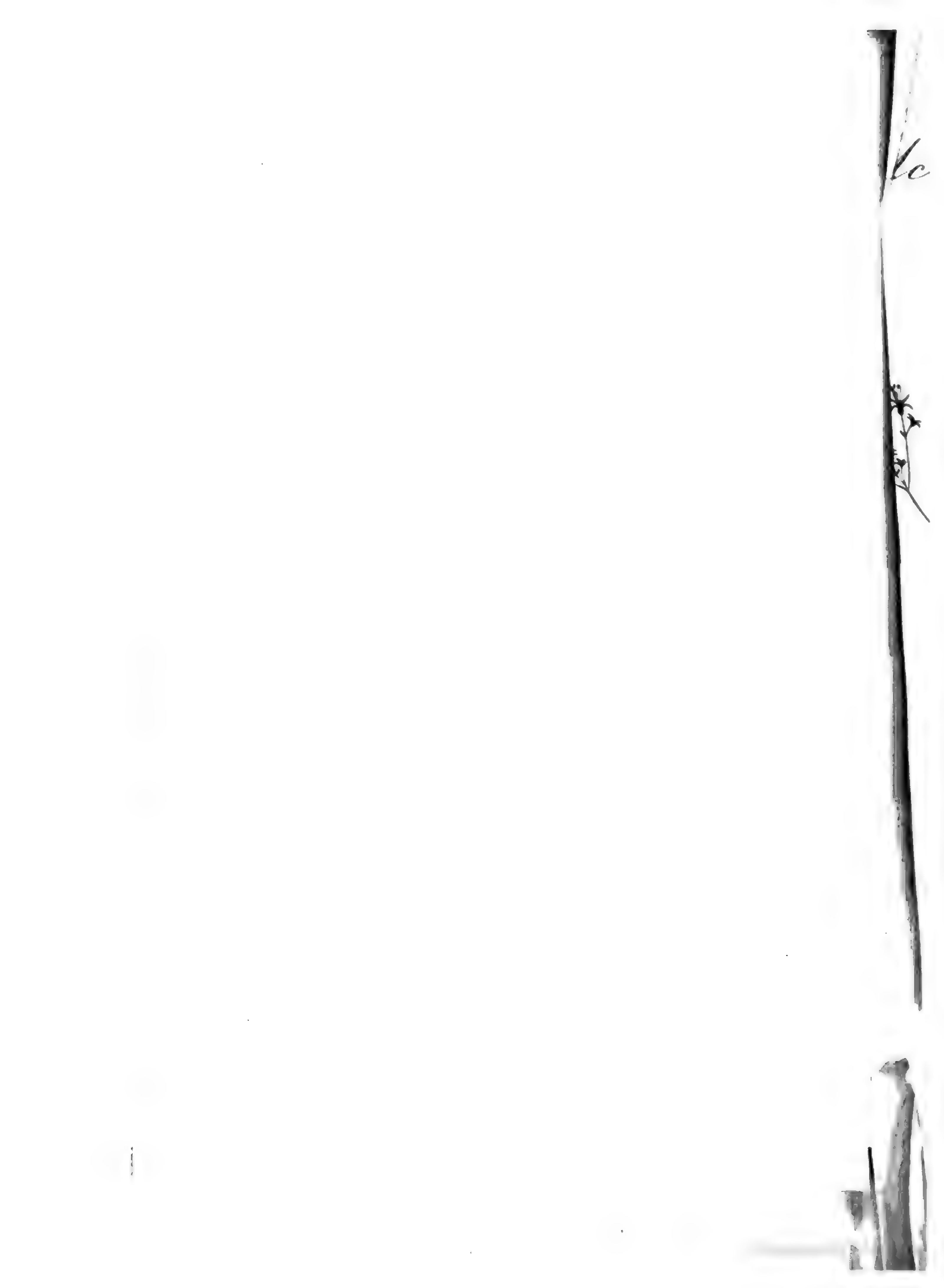
Fig. II.

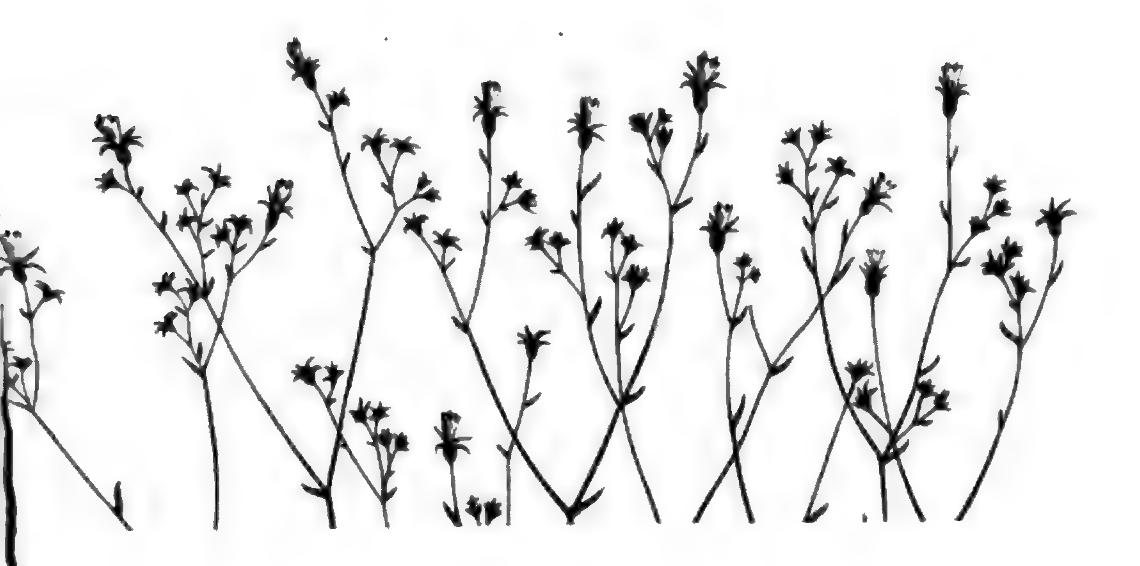
Pedicularis longiflora.

I H Rudolph del. Neüer sc.

Digitized by Google

Google





Digitized by

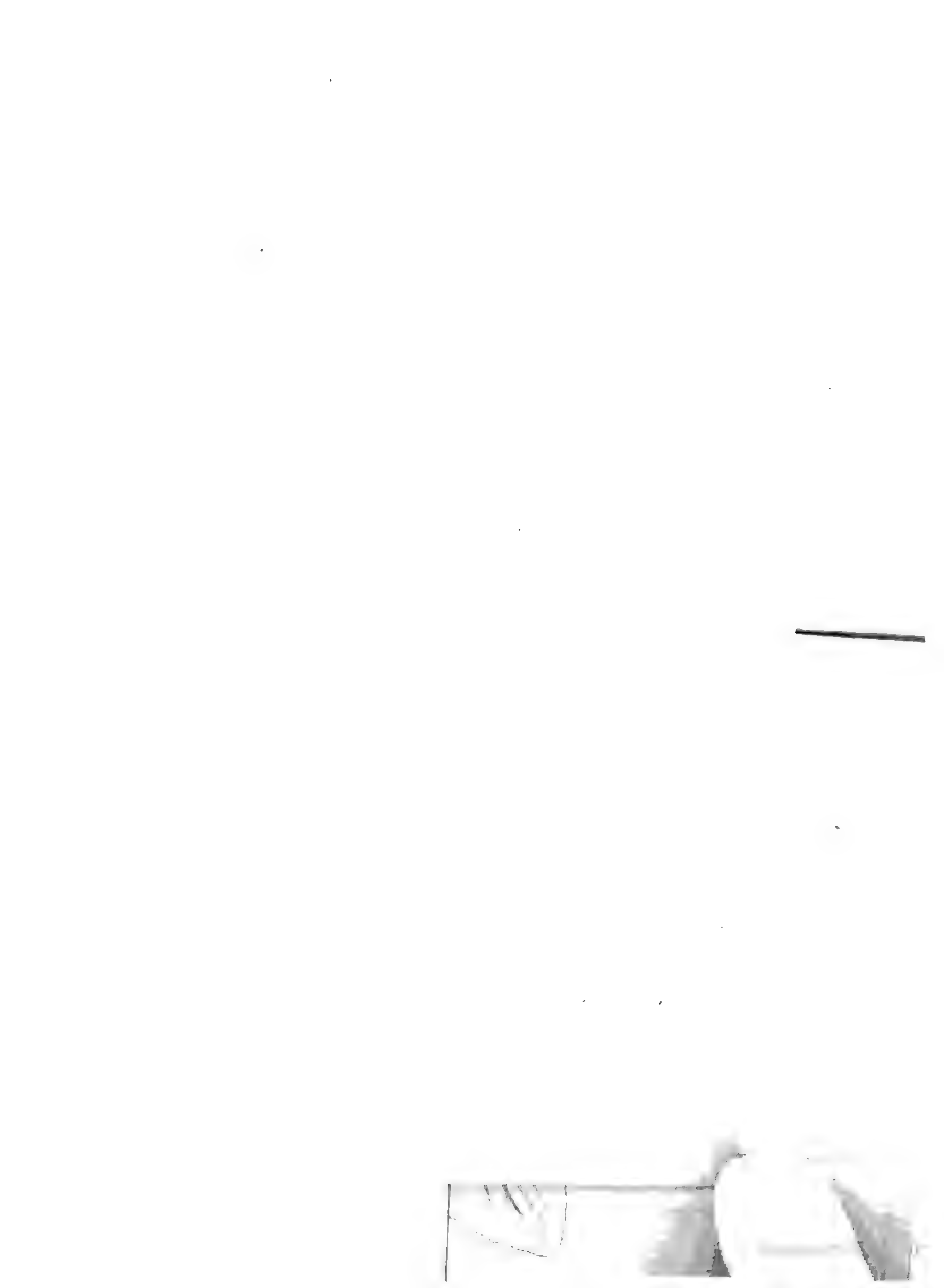
rusensternii

fec.

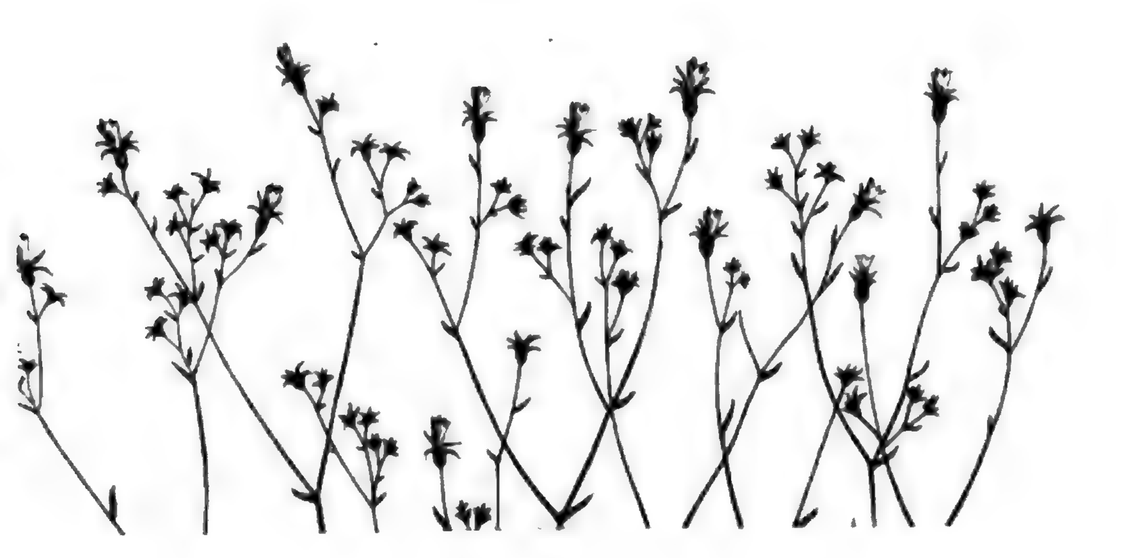
J. Nager sculpsit

Digitized by Google

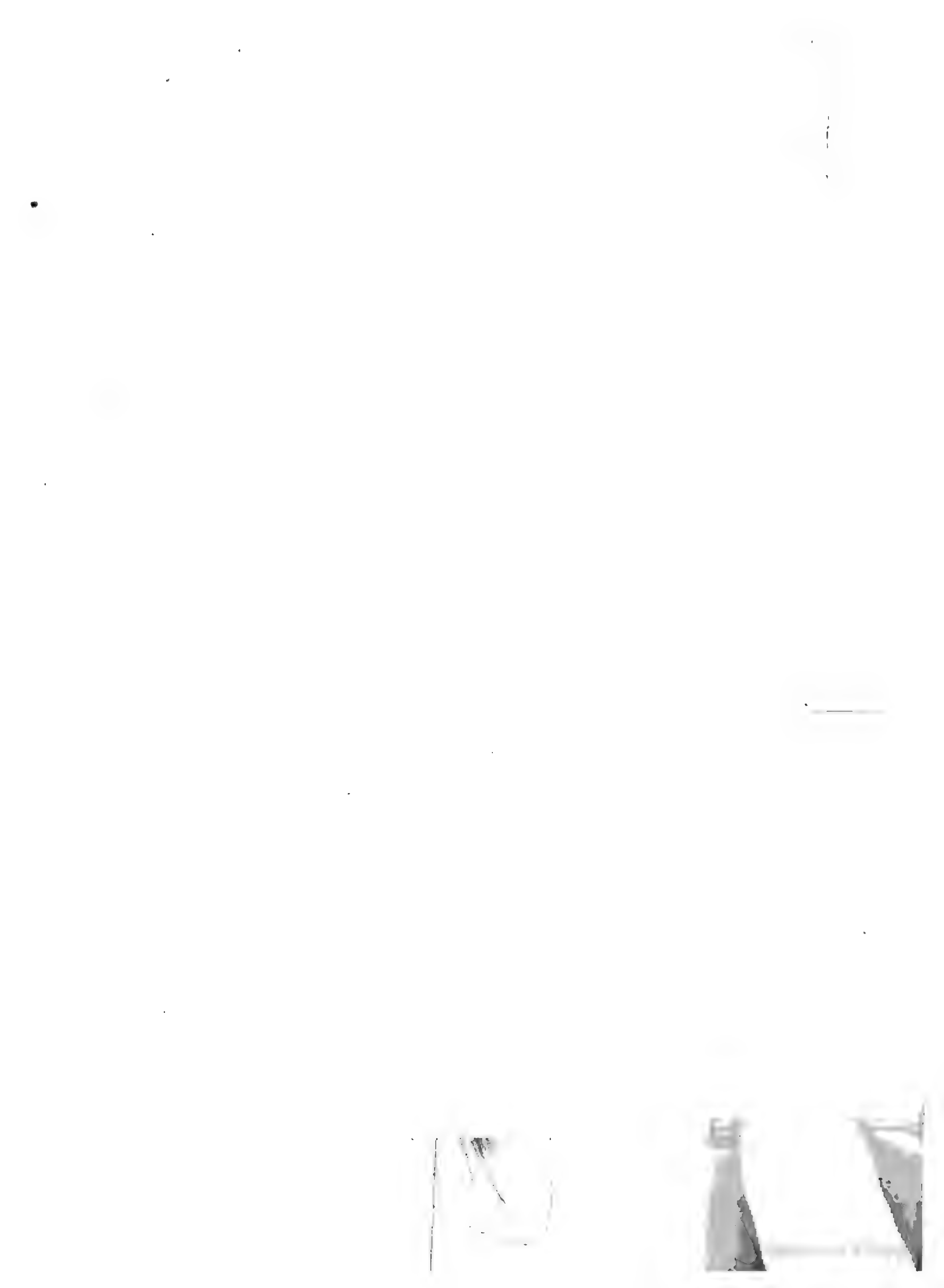
des Sc. Tome IV Tab. V.



Digitized by Google



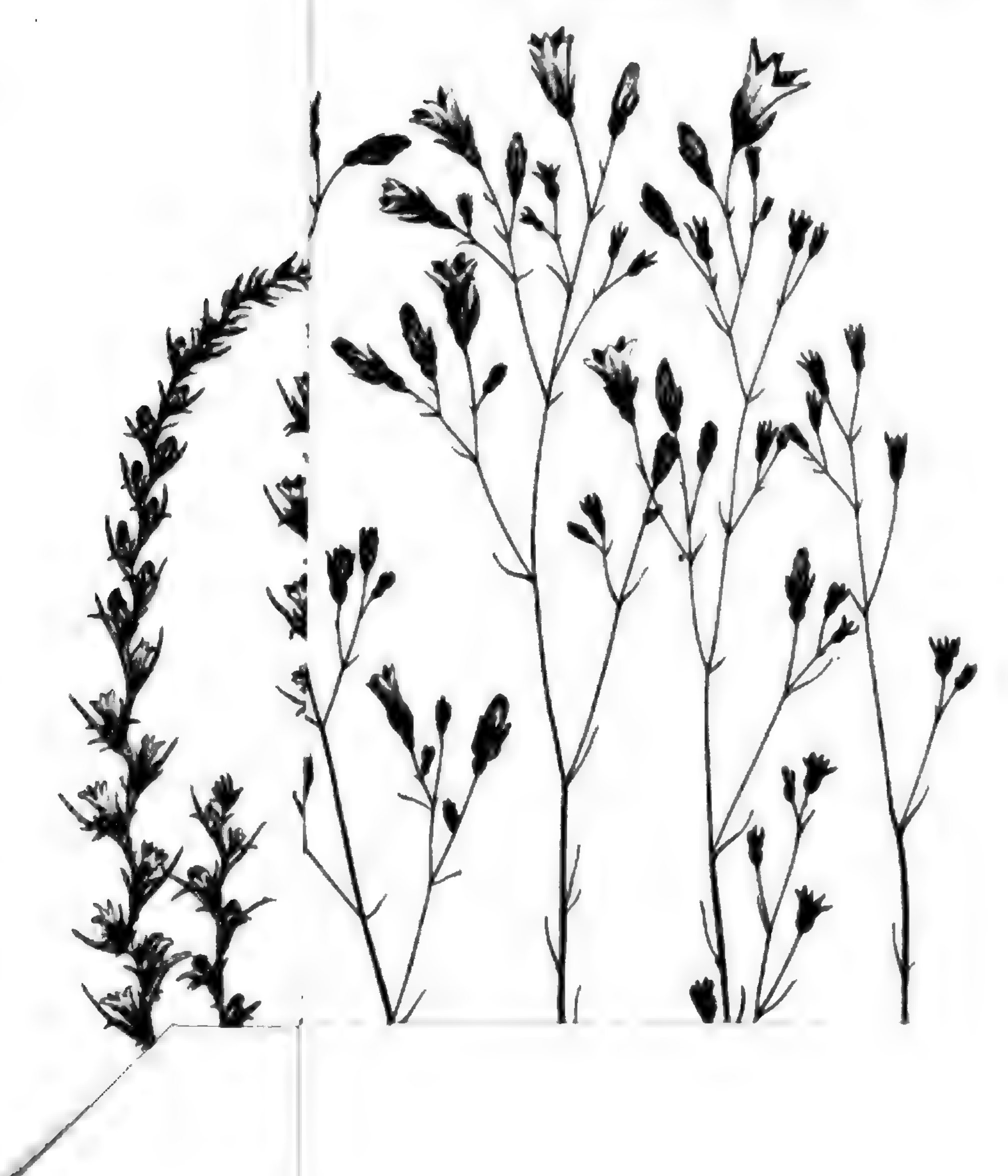
Digitized by



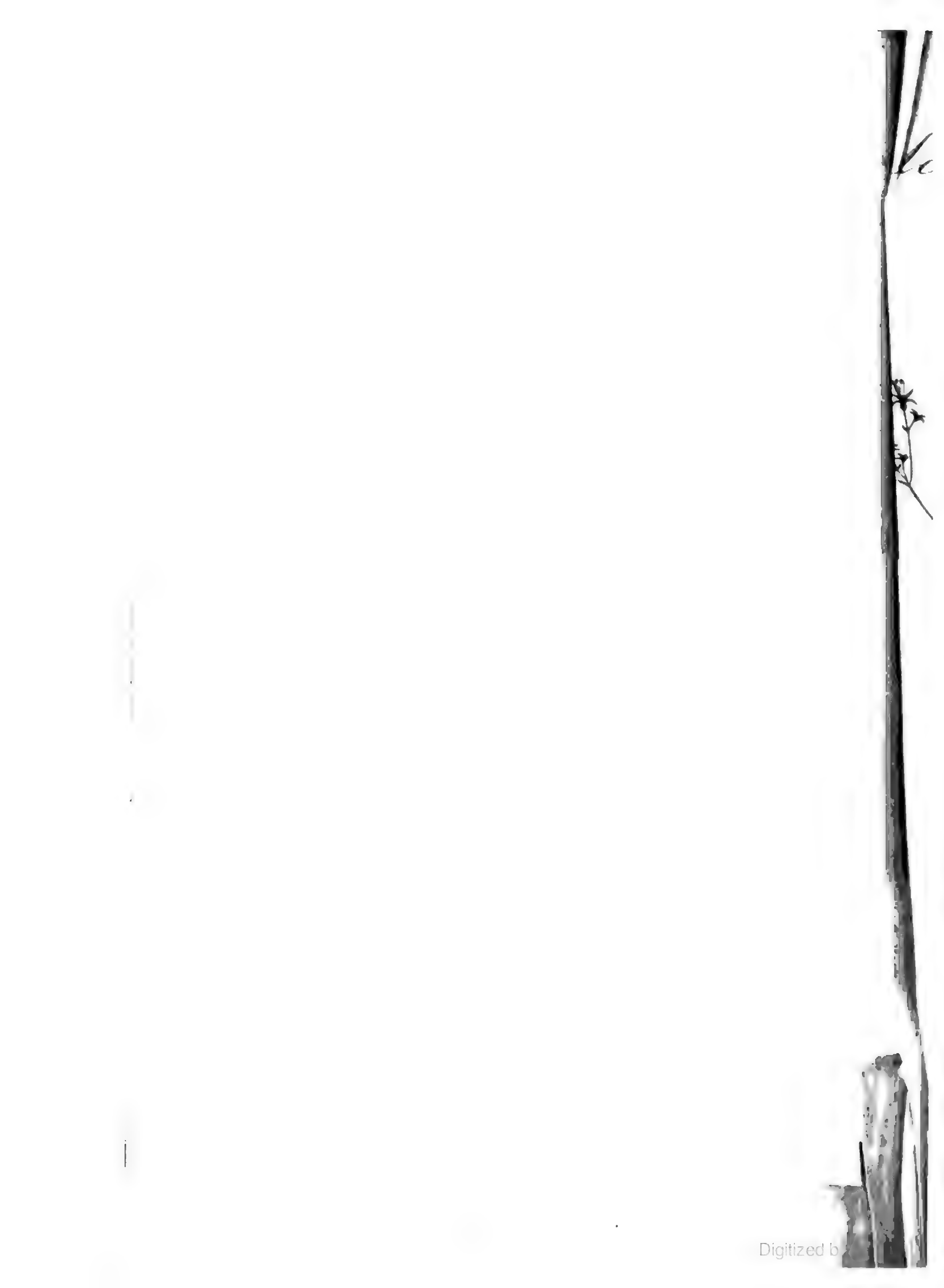
…rusensternii

…fec.

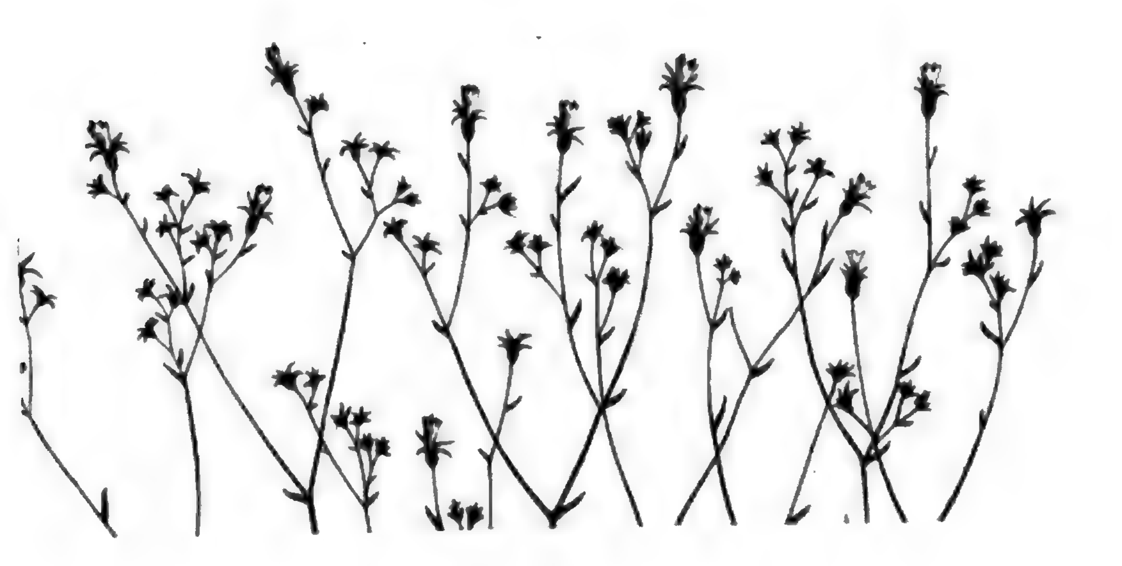
des Sc. Tome IV Tab. V.



Digitized b



Digitized b



Digitized by Google

Digitized b

...rusenstern ii

...fec.

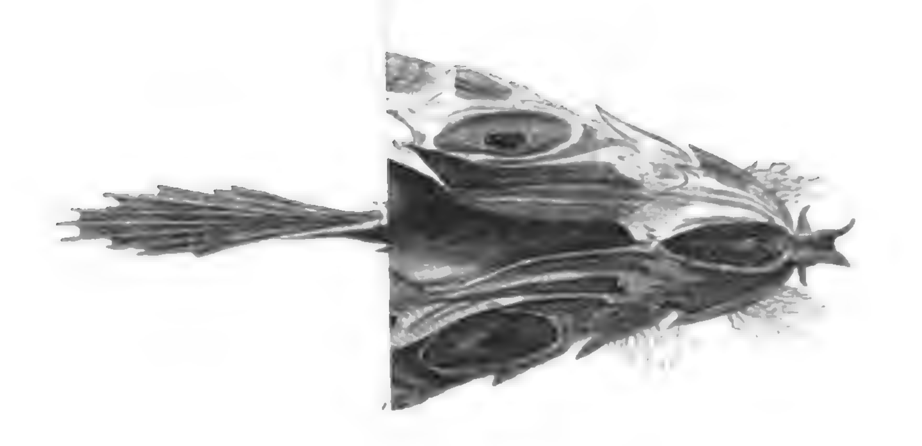
...ata.

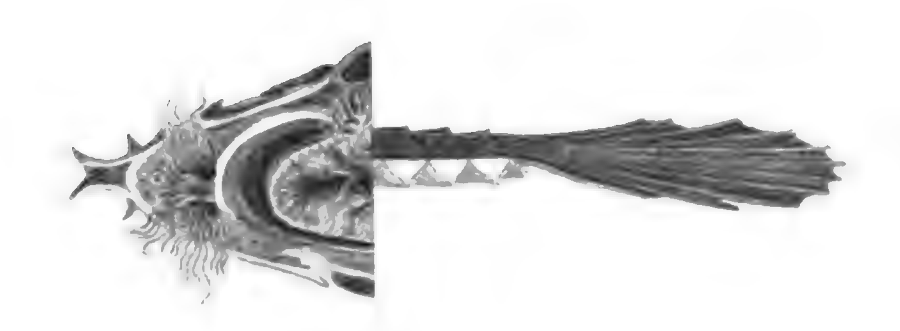
Digitized by

Lobelia Siphylitica.

Linn.

/: Tome IV. Tab. XI.



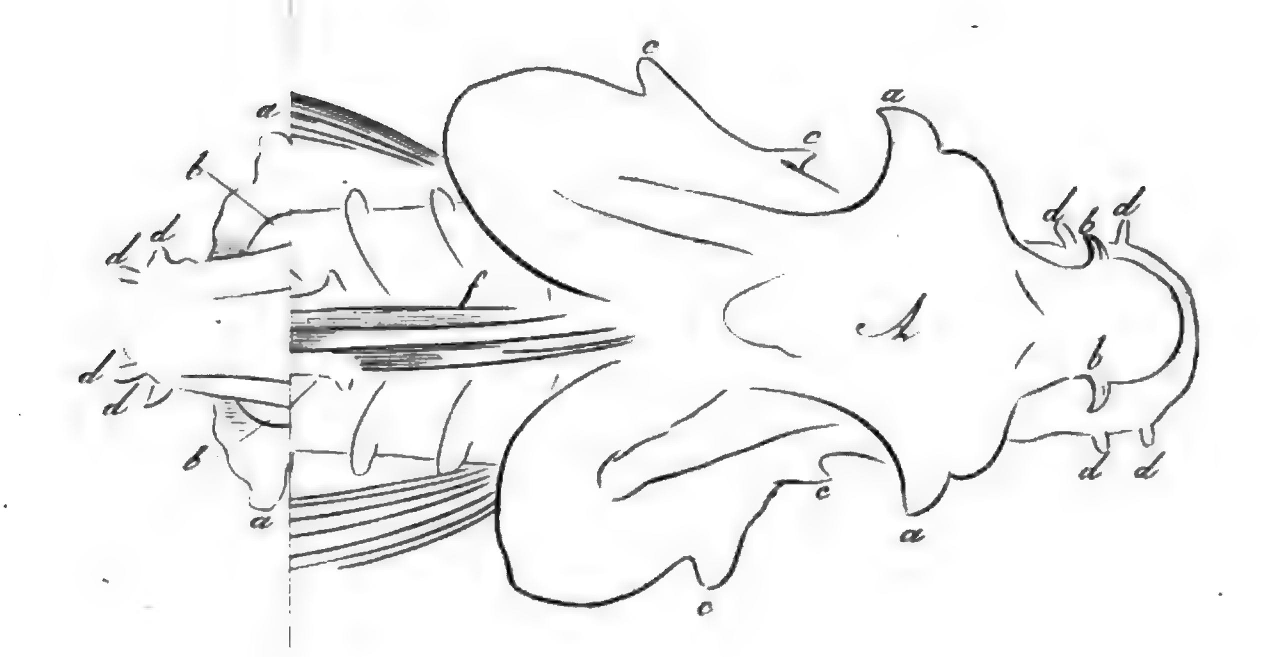


Dr. Tilesius de

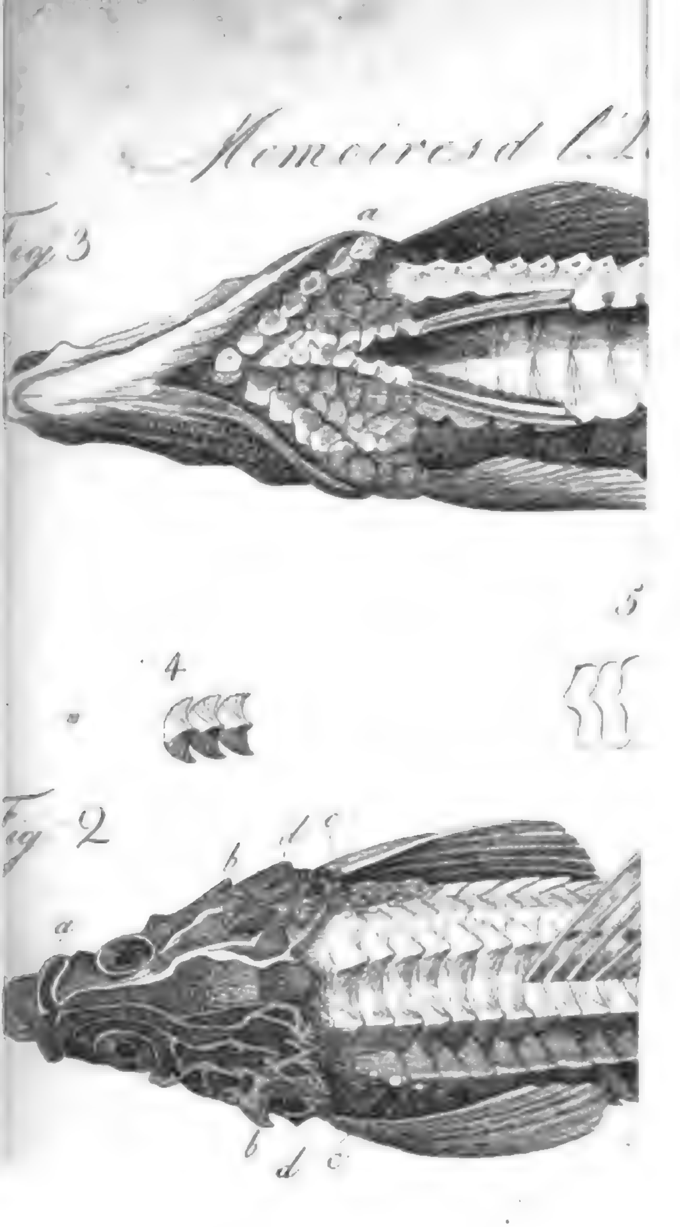
Digitized by Google

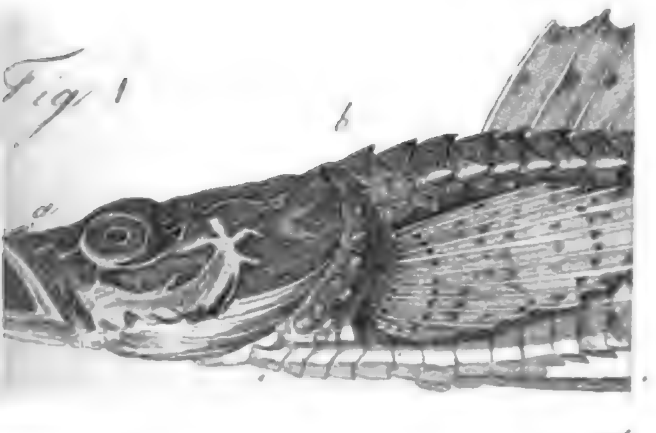
Sc: Tome IV Tab. XII

Fig 2



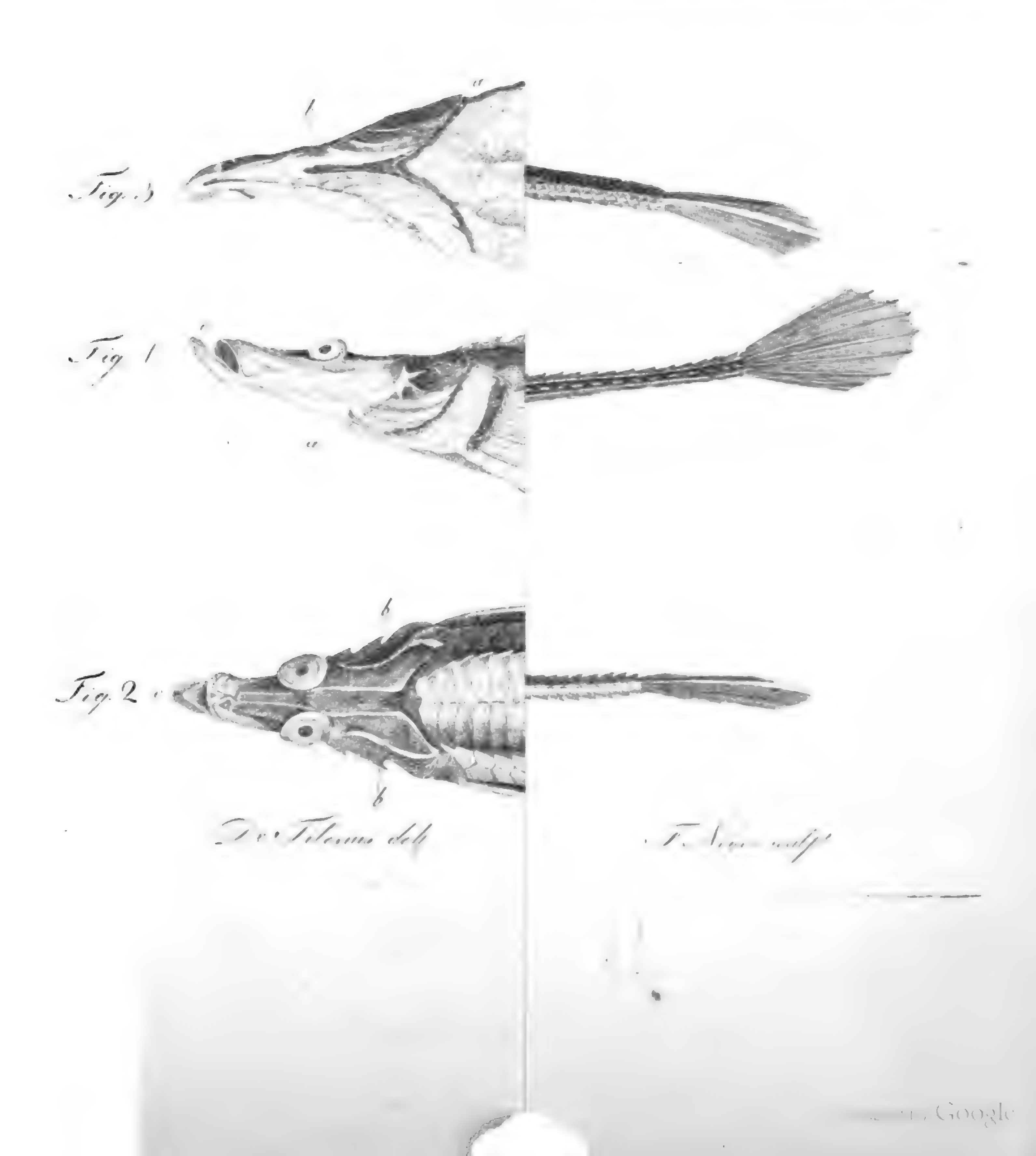
Digitized by Google



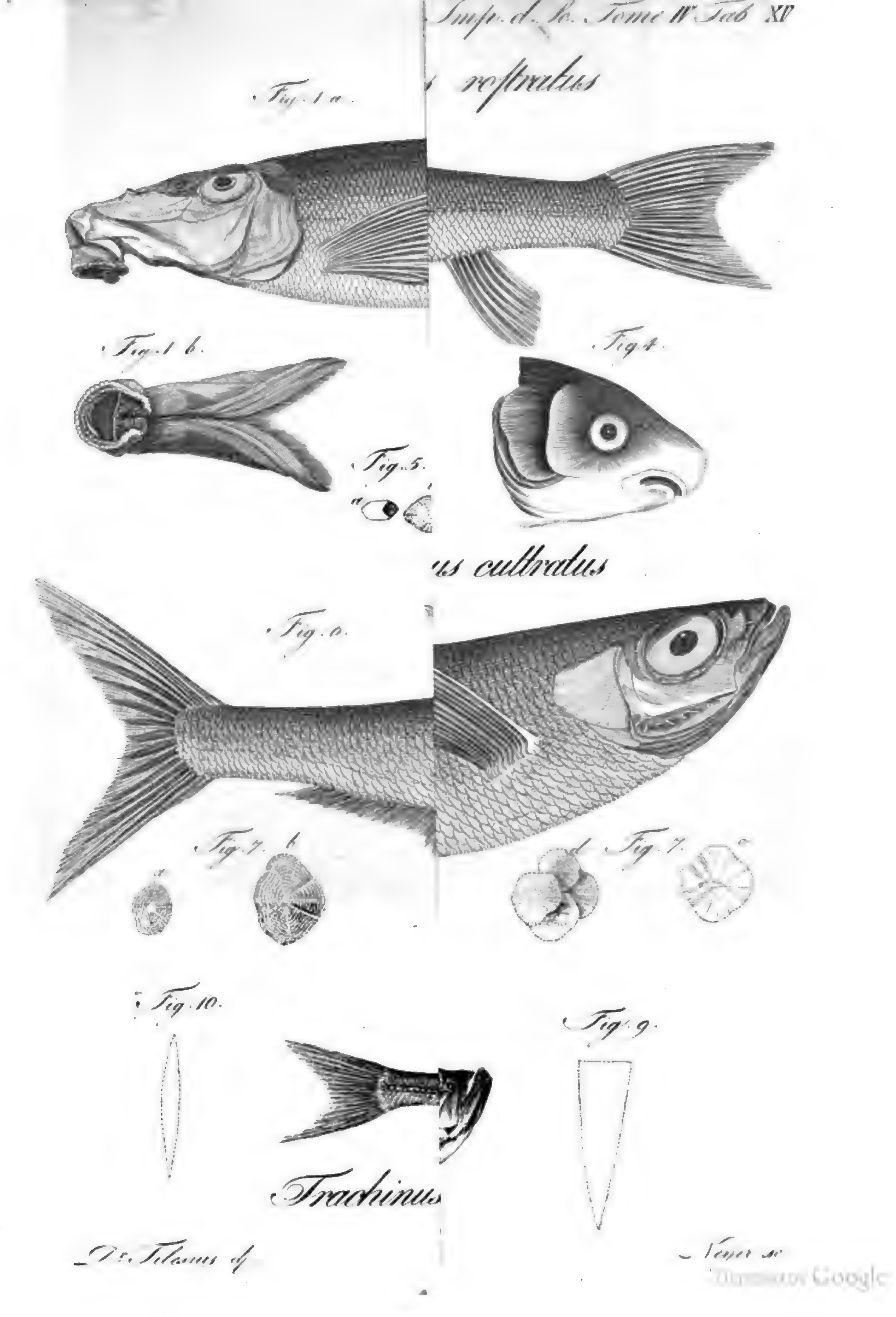


Digitized by Google

Digitized by Google



Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Epinephelus ciliatus.

Dr. Tilesius del.

F. Neyer sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SEP 3 1937

Digitized by Google

Digitized by Google